高等学校试用教材

光学测量

北京工业学院 苏大图 主编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

本书在介绍光学零件和光学系统在研制中常用的基本原理的基础上逐介绍了各种参数的测量方法和精度分析。主要内容包括：光学测量基础；光具座上的综合检测；光学系统光度和色度性能的测量；干涉测量——双光束、多光束、剪切、全息等干涉技术；阴影法检验主要介绍刀口法及朗奇法的原理及应用；光学传递函数测量。上述这些测试技术不仅广泛应用于光学工业中，对其他工业也有广泛应用。

本书为光学仪器专业的专业课教材，还可兼作应用光学专业、光电技术专业的选修课教材。亦可供从事光学和光电技术工作的科技人员参考。

光 学 测 量

北京工业学院　苏大图　主编

*

责任编辑：林静贤

版式设计：霍永明

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 · 印张 17 3/4 · 字数 434 千字

1988年6月北京第一版·1988年6月北京第一次印刷

印数 0,001—2,700 · 定价：3.00 元

*

ISBN 7-111-00235-0/O·4（课）

前　言

本教材是根据1984年4月高等学校光学仪器专业教材编审小组制订的教学计划和九所高等院校从事光学测量教学的教师审订的教学大纲编写的。本教材按测试技术分章，它的好处是：1）有利于对学生分析和解决问题能力的培养；2）有利于启发式教学；3）有利于教材向深度和广度发展；4）适应性广，不仅适用于光学仪器专业，对机械、计量、测绘及航空中有关专业也有参考价值；5）有利于保持课程的先进性和实用性。

本教材共分六章：第一章光学测量基础，介绍其他各章的共同的基本知识。第二章光具序上的综合检测，介绍目前光学仪器生产中常用的测试方法与仪器。所用到的测试技术，可以认为是几何光学技术。第三章光学系统光度和色度性能的测量，主要介绍光学系统透射比和杂光系数的测量及色度学的基本知识。第四章干涉测量，这是很重要的一章。干涉技术有双光束干涉、多光束干涉、剪切干涉、全息干涉等技术。由于应用激光作光源，使干涉技术的应用范围更广、测量精度更高，而且目前还在迅速发展着。这一章既介绍经典干涉技术，又扼要介绍目前最先进的波面位相自动探测技术。第五章阴影法检验，介绍刀口法及朗奇法的原理及应用。阴影法是灵敏度很高的检测方法，可惜目前还不能定量测量。但随着其基本理论的深化和光电技术的发展，应用必将日广。第六章光学传递函数测量，本章应用傅里叶分析技术来研究、测量光学系统的象质，并据此制定出简单可靠的象质评价指标，介绍了几种评价指标的原理及应用。还扼要介绍目前国内外最常用的两种测量仪器的基本结构和光学传递函数用于对准的原理。

本教材用到的基本理论主要来自“应用光学”、“物理光学”和“误差理论与数据处理”三门课。本教材已用到而且以后光学测量必将越来越多地应用“光电技术与实验”和“微机原理及其应用”两门课的有关知识。依据这些理论和知识创立光学测量的测量原理和测量仪器。光学测量与它的实验课一起，对培养光学仪器专业本科生的实验操作技能起着十分重要的作用。光学测量与光学设计、光学工艺及光学仪器装配与校正等课的关系十分密切。因为设计、工艺、测量、装校是生产过程的一个整体，他们既互相渗透又互相促进。

本教材由苏大图主编，张武祖主审。第一、二、三章由苏大图编写，第四章§4-1～§4-3和第五章由戴晓芳编写，第四章§4-4～§4-6由包正康编写，第六章由沙定国编写。史大椿、汤顺清、沙定国、谢敬辉、朱秋东参加了部分章节的审阅与修改等工作。

在本教材编写过程中，曾得到各兄弟院校，有关工厂和研究所的大力支持和热情帮助，对此表示衷心感谢。由于水平有限，书中会有不少缺点错误，希望广大读者批评指正。

编　者

一九八七年四月

目　录

第一章　光学测量基础

§1-1　测量误差与数据处理

一、测量误差概述

1. 有关测量的几个定义

测量是以获得被测量的量值为目的的一组实验操作。它至少应包括以下五个要素：1）测量对象（即被测量）；2）测量单位；3）测量条件；4）测量方法；5）测量的不确定度（即表征测得值可靠程度的指标）。

光学测量是以获得各种光学量的量值为目的的一组实验操作。例如应用焦距仪测量焦距，通过正确安装被测透镜，在室温下测出该透镜所成的一对刻线象的间距，计算出被测透镜的焦距值，用统计方法计算和根据某些已知条件估算得出测量的不确定度等这样一组实验操作就是光学测量。设测量结果为（202.2±0.6）mm。这里，光学量是焦距，数值202.2，单位mm，测量的不确定度是±0.6mm。某些物理量，它本身仅是个比值，例如某透明介质的折射率n_λ是表示波长为λ的单色光在真空中传播的速度v_0与在该介质中传播的速度v_λ之比，或所照明的单色光在真空中的波长λ_0与在该介质中的波长λ之比，即$n_\lambda = v_0/v_\lambda = \lambda_0/\lambda$。所以折射率这个量是无单位的，但它仍是通过一些有单位的量计算出来的。

由于测量方法、设备、条件等不能完美无缺，测量人员的技术水平有限，使得任何测量结果与真值（被测量的真值实际上是无法得到的，我们只能得到接近真值的某个约定值）总有差异。测量误差就是测量结果减去被测量的（约定）真值，即

$$\text{测量误差} = \text{测量结果} - \text{真值}$$

上述定义反映了测量结果偏离真值的大小和方向，称为绝对误差（或真误差）。

在光学测量中，当测量的是线量（如焦距、曲率半径等）时，常用相对误差来表示测量误差的大小（角度、折射率等不能用相对误差），它等于绝对误差除以被测量的（约定）真值，即

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{测量结果}}$$

2. 误差来源与分类

总的来说，误差产生原因可归纳为：

1）设备误差　设备误差来源于读数或示值装置误差、基准器（或标准件）误差、附件（如光源、水准器、调整件等）误差和光电探测电路的误差等。按其表现形式可分为机构误差、调整误差和量值误差。

2）环境误差　温度、湿度、振动、照明等与要求的标准状态不一致而引起的误差；电磁干扰引起的误差。

3）人员误差　由于人眼分辨率有限，操作者技术水平不高和固有习惯、感觉器官的生理变化等引起的误差。

4）方法误差　由于采用的数学模型不完善，采用近似测量方法和由于对该项测量研究不充分而引起的误差。

有时被测对象本身变化也要造成误差。

按照误差的性质，误差可分为系统误差、偶然误差（也称随机误差）和粗大误差三类。

1）系统误差　在同一条件下多次测量同一量时，绝对值和符号保持不变；测量条件改变时，按某确定规律变化的误差。例如，在光学测量中仪器制造误差（如度盘刻度误差，它是有规律变化的）、校准或调整误差（如平行光管的分划板不在其物镜的焦平面上，造成被测光学量的误差值是固定的）、实验条件误差（如温度高于或低于标准值）和标准件的量值误差等。

系统误差可按对误差掌握程度分为已定系统误差（误差的大小和正负已知）和未定系统误差（误差的大小和正负未知）。

2）偶然误差　在实际相同的测量条件下，多次测量同一量时，绝对值和符号以不可预定的方式变化着的误差。例如局部空气紊流、温度小量变化、电源的电压小量起伏等引起的测量误差属偶然误差。此外对准误差和估读误差也属偶然误差。

3）粗大误差　超出在规定条件下预期的误差。如读错或记错数、计算错误、仪器调整错误和实验条件突变等所引起的误差。含有粗大误差的测量值都应剔除。

3．精度与不确定度

反映测量结果与真值接近程度的量，称为精度。精度高则误差小。

精度又分为：

1）精密度　反映偶然误差大小的程度。

2）正确度　反映系统误差大小的程度。

3）准确度（精确度）　反映系统误差与偶然误差综合大小的程度。亦即表示测量结果与真值的接近程度。

在实验测量中，还常用到表示误差的一个重要概念——不确定度。

测量的不确定度是表征被测量的真值处于某个量值范围的一个标志。它包含了两类不同的分量：A类分量是可以将一组测得值进行统计法计算得到的那些分量；B类分量只能用经验或依靠其他已知条件来估算。A类分量用统计方差 s_i^2（或实验标准偏差 s_i）来表征，必要时应给出估计协方差㊀；B类分量用 u_j^2 表征。两类不确定度可用通常的方差合成方法求出合成不确定度 σ（实验不确定度即以标准偏差表示）

$$\sigma=\sqrt{\sum_i s_i^2+\sum_j u_j^2+\text{协方差项}}$$

当各分量彼此独立时，得

$$\sigma=\sqrt{\sum_i s_i^2+\sum_j u_j^2}$$

如果需要可对合成不确定度乘一个因子K，即用 $K\sigma$ 来表征。

误差来源、分类和精度、不确定度用图 1-1 概括地表示。

㊀ 在二维分布情形，协方差为中心化随机变量$[X-E(X)]$与$[Y-E(Y)]$的乘积的期望

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

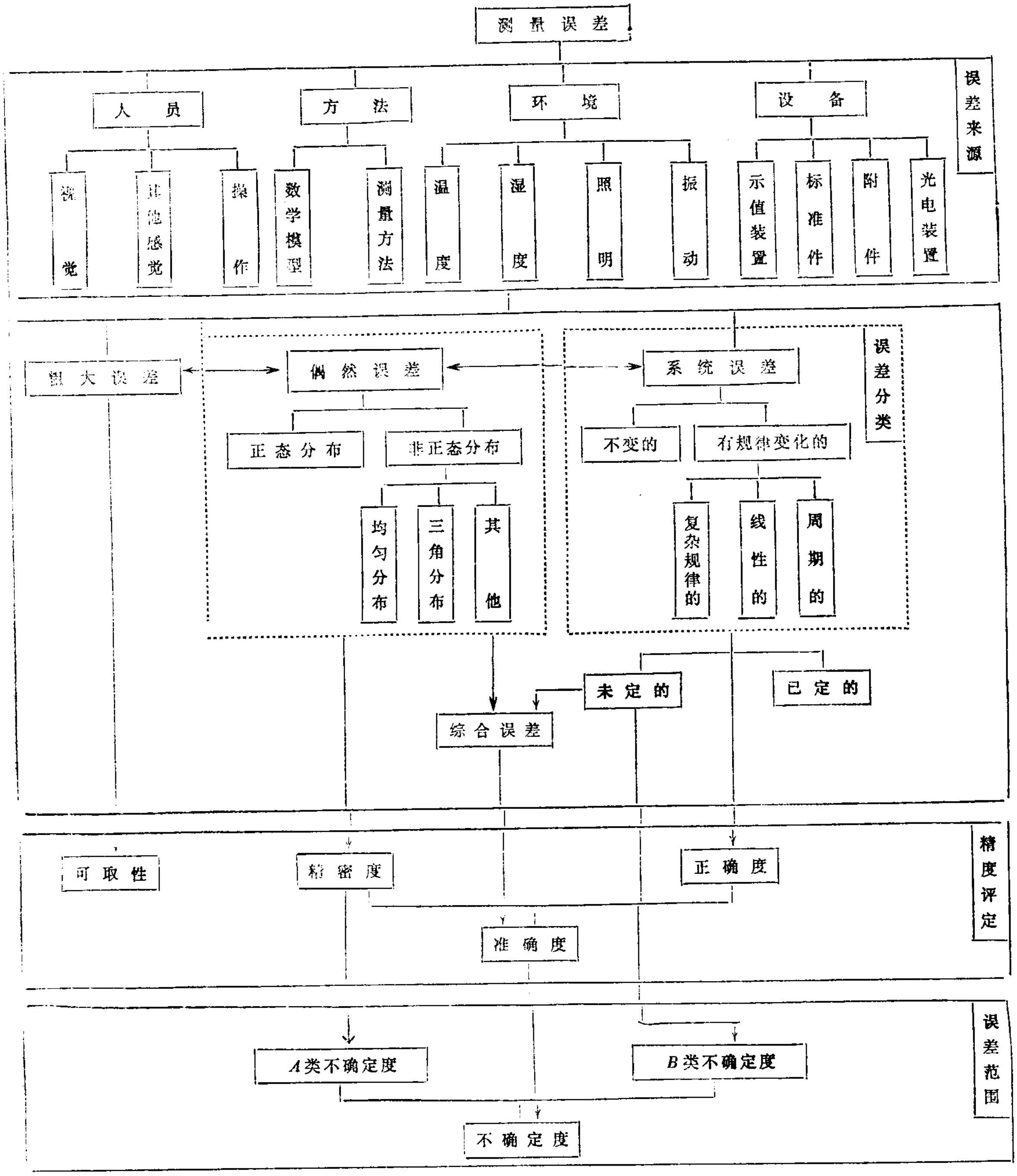

图 1-1

二、偶然误差（亦称随机误差）

在实际相同的测量条件下，对同一量进行多次重复测量，得到一系列测量值（常称测量列），它们都含有不同的偶然误差。偶然误差的单次出现没有任何规律，但就误差的总体而言，却具有互相抵偿的统计规律性。相互抵偿是指这一系列偶然误差 $\delta_1\delta_2\cdots\cdots\delta_n$ 的算术平均值随测量次数 n 的增大而趋于零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n}{n}=0$$

式中
$$\delta_i = x_i - a_0 \tag{1-1}$$
其中 a_0 为真值；x_i 为各次测量值。

1. 偶然误差的评价

因为单个误差值可大可小，为了表明某条件下的测量精密度，引入如下的误差：

1）标准偏差（又称均方根误差） 标准偏差是各误差平方和的算术平均值再开方，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2}{n}} \tag{1-2}$$

2）平均误差 平均误差是各误差绝对值和的算术平均值，即

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|}{n} \tag{1-3}$$

3）或然误差 将误差取绝对值后，按大小排列，居中的一个称或然误差 ρ。

σ、θ、ρ 都是在同一条件下一次测量的误差代表数值，用来表明一次测量的误差的平均大小。一般说，设备愈好，外界条件愈稳定，技术水平愈高，它们就愈小。

σ、θ、ρ 都可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准，但由于 σ 随 n 的变化比较小，又能将危害大的大误差充分反映出来，而且还是表征误差分布的一个重要数字特征，所以在测量工作中最常用的是标准偏差。由于上述原因，故常称 σ 为"测量列中单次测量的标准偏差"。

4）极限误差 各误差实际不应超过的某个界限。极限误差由 $\pm t \times \sigma$ 所确定。t 是一个系数，它由误差分布决定，误差分布不同 t 也不同。例如正态分布，通常取 $t = 3$。

2. 正态分布

当偶然误差是由测量过程中多个互不相关的因素引起测量值微量变化的综合而形成时，这个测量的误差分布将服从正态分布。由于大多数偶然误差均服从正态分布，所以正态分布是极其重要而有用的。

服从正态分布的偶然误差具有如下特征：

（1）单峰性 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大；

（2）对称性 绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等；

（3）有界性 在一定测量条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定限度；

（4）抵偿性 偶然误差的算术平均值随着测量次数的不断增加而趋于零，即

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0$$

服从正态分布的偶然误差，其概率密度函数

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-4}$$

它表示的曲线如图 1-2 所示，称为正态分布曲线。

概率密度函数是分布函数⊖ $F(x)$ 的微商（如果它存在）

⊖ 对任意值 x，给出随机变量 X 小于 x 的概率的函数 $F(x) = P(X < x)$

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(\delta)$$

图 1-2 的曲线下的面积表示概率。例如误差位于$[-\sigma, +\sigma]$区间内的概率为

$$P\{-\sigma \leqslant \xi < +\sigma\}=\int_{-\sigma}^{\sigma} f(\delta)d\delta=\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}d\delta=0.6826$$

这个面积在图 1-2 中是划阴影线的部分。

误差位于$[-2\sigma, +2\sigma]$，$[-3\sigma, +3\sigma]$区间内的概率分别为 0.9544 和 0.9973。由于误差超出$[-3\sigma, +3\sigma]$的概率为 $1-0.9973=0.27\%$，即 370 次重复测量中仅有一次会超出此界限，实际测量一般不超过 20 次，故常以$\pm 3\sigma$作为服从正态分布的测量的极限误差。

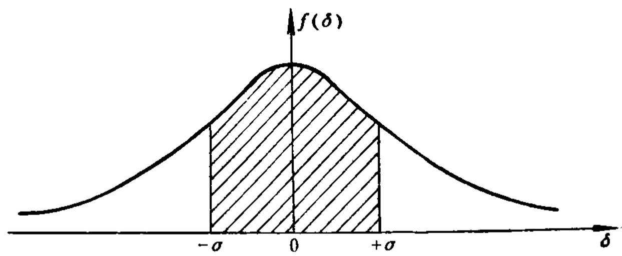

图1-2 正态分布曲线

偶然误差 δ 的数学期望，即 $n\to\infty$ 时 δ_i 的平均值

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\delta f(\delta)d\delta=0 \qquad (1\text{-}5)$$

随机变量的方差可表示为

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^2 f(\delta)d\delta=\sigma^2 \qquad (1\text{-}6)$$

它的平均误差 θ 和或然误差 ρ 分别为

$$\theta=\int_{-\infty}^{\infty}|\delta| f(\delta)d\delta=0.7979\sigma\approx 0.8\sigma \qquad (1\text{-}7)$$

根据或然误差的定义可得

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(\delta)d\delta=\frac{1}{2} \qquad (1\text{-}8)$$

故或然误差 ρ 与 σ、θ 的关系为

$$\rho=0.6745\sigma=0.8453\theta$$

前面讲过，σ 可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准。这个结论可通过图 1-3 得

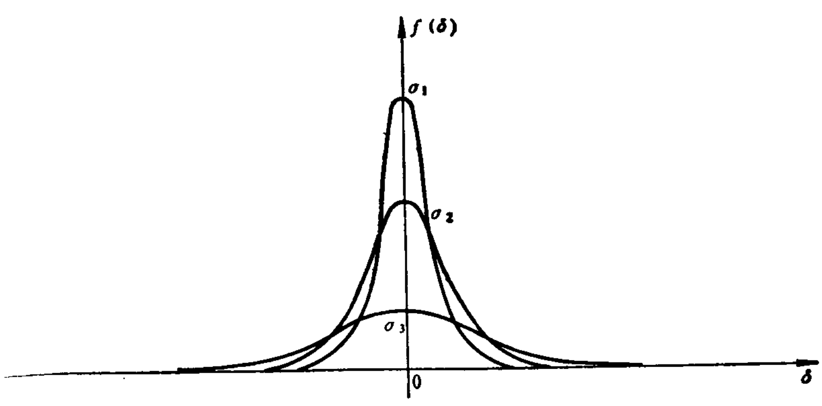

图1-3 不同 σ 的正态分布曲线

到进一步说明。图中给出了三条 σ 大小不同的正态分布曲线（$\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$）。可以看出，$\sigma$ 越小，曲线越高而狭窄，偶然误差的分布越密集，表明测量的精密度越高；相反，σ 越大，曲线越低矮而宽展，偶然误差分布越稀散，精密度就越低（图中三条曲线下面包围的面积皆为1）。

3. 算术平均值

对某一量进行一系列等精度测量（等精度测量——在完成一系列测量时，认为仪器性能、测量方法、操作技术和外界条件都没什么改变的测量），测得值为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

取算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1-9}$$

由于每个测得值是等精度的，因此对它们的信任程度应是一样的，而算术平均值就具有这一简单特性。其次，如果这一测量无系统误差，则式（1-1）中的 δ_i 是偶然误差，由式（1-1）求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-na_0$$

$$a_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta$$

由偶然误差的抵偿性可知：当 $n\to\infty$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i/n\to 0$，所以

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\to a_0$$

虽然实际上测量次数是有限的，但我们还是把算术平均值近似地作为真值。

根据最小二乘法原理，最能代表这测量列的值（称最佳值）是各测得值对这个值的偏差的平方和为最小。设 x_m 是这个最佳值，则有

$$f(x_m)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_m)^2=\min$$

令 $f'(x_m)=0$。可得

$$x_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

由此可见，在同一测量条件下，测量列的最佳值是算术平均值。

测量列中测得值 x_i 与该列的算术平均值之差 ν_i 称残余误差，亦简称残差。

残差有以下两个性质：

1）残差的代数和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}\nu_i=0 \tag{1-10}$$

2）残差的平方和为最小

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 = \min \qquad (1\text{-}11)$$

这是指以算术平均值作为结果具有最小的残差平方和；而用其他方式得到的结果，其残差平方和都比由 $\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2$ 算出的大。

4．算术平均值的标准偏差

由于偶然误差存在，$\bar{x}$ 也是一个随机变量，服从以 a_0 为均值的正态分布。$\bar{x}$ 的标准偏差可由下述方法求出。

设有 m 个测量列，每列皆进行 n 次等精度测量，各测量列中单次测量的标准偏差应相等，即

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = \sigma$$

各测量列的真误差

$$\delta_{\bar{x}_i} = \bar{x}_i - a_0 \qquad i = 1，2，\cdots，m$$

由此算术平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\delta_{\bar{x}_1}^2 + \delta_{\bar{x}_2}^2 + \cdots + \delta_{\bar{x}_m}^2}{m}} \qquad (1\text{-}12)$$

因为 $\delta_{\bar{x}_i} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \Big/ n$，故当 n 适当大时，$\sum_{j,k=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{ik}$ 趋于零(其中 $j \neq k$)，于是近似得

$$\delta_{\bar{x}_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^2}{n^2} \qquad i = 1，2，\cdots，m$$

由定义

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^2$$

则有

$$\delta_{\bar{x}_i}^2 = \sigma_i^2 / n，\quad \sum_{i=1}^{m} \delta_{\bar{x}_i}^2 = m\sigma^2 / n$$

代入式（1-12）得算术平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1\text{-}13)$$

由此可知，增加测量次数可提高测量精度。但因 $\sigma_{\bar{x}}$ 与 n 的平方根成反比，故当 $n>10$ 以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 已减小得非常缓慢。而且，n 愈大愈难做到测量条件不变，因此一般取 $n \leqslant 10$ 较为适宜。

5．用残差计算标准偏差

当被测量的真值为未知时，必须用残差来计算标准偏差。由式（1-1）知

$$\delta_i = x_i - a_0$$

$$\delta_i = x_i - \bar{x} + \bar{x} - a_0 = \nu_i + \delta_{\bar{x}}$$

上式平方后相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 + n\delta_{\bar{x}}^2$$

因为 $\delta_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i / n$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i\right)^2 = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 + \sum_{i \neq j}\delta_i\delta_j}{n} \approx \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n} = \frac{1}{n}\sigma^2$$

其中，当 n 充分大时，δ_i 的分布满足对称性，故 $\sum_{j \neq i} \delta_i\delta_j / n \to 0$ 。那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sigma^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2 + \frac{1}{n}\sigma^2$$

式中用符号 s 代替 σ，使近似式变为等式，则得

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n-1}} \tag{1-14}$$

式(1-14)表示，在有限次测量中，标准偏差 σ 用残差求出的 s 来估计。称 s 是 σ 的最佳估计量。

同样，算术平均值的标准偏差用 $s_{\bar{x}}$ 估计

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{1-15}$$

6．测量的不确定度

单次测量的不确定度和算术平均值的不确定度都以各自的标准偏差乘以置信因子 K ㊀ 表示。即

$$\delta_{\lim x} = \pm K s \tag{1-16}$$

$$\delta_{\lim \bar{x}} = \pm K s_{\bar{x}} \tag{1-17}$$

当服从正态分布，置信概率 $p = 0.9973$，$n \to \infty$ 时，取 $K = 3$ 。若 $p = 0.95$，则 $K = 1.96$。测量次数少时，按正态分布得到的 K 值计算出 $\delta_{\lim x}$ 和 $\delta_{\lim \bar{x}}$，以此作为实际精度的评价还是过高的，因为这时把 $s_{\bar{x}}^2$ 和 s^2 作为 $\sigma_{\bar{x}}^2$ 和 σ^2 的估计，就有不太小的概率把 $\sigma_{\bar{x}}^2$ 和 σ^2 估计过好了。例如当 $n = 4$ 时，s^2 有10%的概率比 σ^2 小4.13倍。$n = 2 \sim 3$ 时，对结果进行这种精度估计就无意义了。因此，测量次数比较少时，计算不确定度 $\delta_{\lim x}$ 和 $\delta_{\lim \bar{x}}$ 的置信因子要适当增大，这时采用由"t 分布"（又称学生分布 Student distribution）得出不同置信概率 p 下的临界值 t_p 进行计算较合适，即计算式为

$$\delta_{\lim x} = \pm t_p s \tag{1-18}$$

$$\delta_{\lim \bar{x}} = \pm t_p s_{\bar{x}} \tag{1-19}$$

式中的 t_p 由测量次数 n 和给定的置信概率 p 查 t 分布表得出。

表 1-1 列出 $n = 3 \sim 10$，$p = 0.682$(适用于实验的不确定度)、$p = 0.95$ 和 0.99 的 t_p值。

㊀ 置信因子（Confidence factor）——遵从一定概率分布的某项误差对应于所给置信概率（按一定概率分布给出某未知参数一个估计区间，该区间能包含这个未知参数的概率，叫做置信概率）的误差限 e 与标准偏差 σ 之比，即 $K = e/\sigma$。也可称置信系数。

表1-1　t分布临界值

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0.682}$	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06
$t_{0.95}$	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26
$t_{0.99}$	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25

7. 偶然误差的其他分布

在光学测量中还常遇到偶然误差分布规律较特殊的情况。其中较重要的有均匀分布和三角分布。本节用到的 t 分布，请参阅肖明耀著的《误差理论与应用》等书籍，这里不作介绍。

1）均匀分布（又称等概率分布）　偶然误差在区间[$-\Delta$，$+\Delta$]各处出现概率相等，在区间外概率为零，如图 1-4 所示。例如用显微镜或望远镜对物体进行调焦时，调焦在物体景深范围内任一点，象都是清晰的，超出景深范围就不清晰了。所以调焦误差（显微镜实际调焦点到物面的轴向距离）服从均匀分布规律。此外，用眼睛瞄准产生的误差和度盘刻度误差所产生的角值误差等均为均匀分布误差。

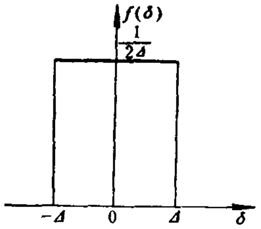

图1-4　均匀分布的概率密度函数

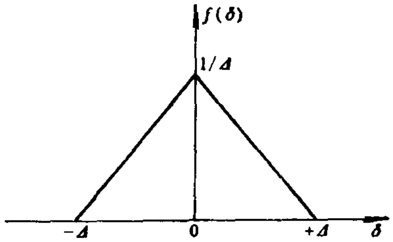

图1-5　三角分布的概率密度函数

均匀分布的概率密度函数 $f(\delta)$ 见图 1-4。

$$f(\delta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\Delta} & |\delta|\leqslant\Delta \\ 0 & |\delta|>\Delta\end{cases}$$

它的数学期望

$$E=\int_{-\Delta}^{\Delta}\delta f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{\delta}{2\Delta}\mathrm{d}\delta=0$$

它的方差

$$\sigma^2=\int_{-\Delta}^{\Delta}\delta^2 f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{\delta^2}{2\Delta}\mathrm{d}\delta=\frac{\Delta^2}{3}$$

$$\sigma=\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \tag{1-20}$$

式（1-20）说明，均匀分布的标准偏差为极限误差的 $1/\sqrt{3}$。

2）三角分布　若随机变量 ξ 与 η 都在[$-\Delta/2$，$\Delta/2$]上均匀分布且独立，则 $\delta=\xi+\eta$ 服从三角分布。

其概率密度函数见图 1-5。

$$f(\delta)=\begin{cases}\dfrac{\Delta+\delta}{\Delta^2} & -\Delta\leqslant\delta<0\\ \dfrac{\Delta-\delta}{\Delta^2} & 0\leqslant\delta<\Delta\\ 0 & 其他\end{cases}$$

它的数学期望　$E=0$

方差

$$\sigma^2=\frac{\Delta^2}{6} \tag{1-21}$$

在光学测量中，当两条平行线经透镜成象，改变垂轴放大率，到平行线象与象面上的两条平行线同时对准时，对准误差服从三角分布。

比较上述三种分布，见表 1-2。

表1-2　三种分布的t和σ^2

分布名称	正态	均匀	三角
$t=\Delta/\sigma$	3　($P=0.9973$)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$
σ^2	$\Delta^2/9$	$\Delta^2/3$	$\Delta^2/6$

三、间接测量误差的传递

在光学测量中，许多光学量都通过间接测量方法来获得结果。就是说，某一个量V，它不能直接测出，需要通过测量另外两个（或两个以上）独立量x和y用公式计算出来。

如果量x和y的某一次测量的真误差（与真值之差）为Δx和Δy，因Δx、Δy与x、y相比很小，所以相应量V的真误差ΔV可近似由下式求得

$$\Delta V=\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y$$

当以σ_x、σ_y表示x、y的标准偏差时，相应V的标准偏差σ_V应该用下面推导出的公式计算。由于Δx、Δy是两个独立的随机变量，且$\partial V/\partial x$、$\partial V/\partial y$在误差范围内是常量，由概率论可知：两随机变量和的方差等于它们各自的方差之和，即

$$D(\Delta V)=D\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)=D\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x\right)+D\left(\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)$$

其中

$$D\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 D(\Delta x),\quad D\left(\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 D(\Delta y)$$

又$D(\Delta V)=\sigma_V^2$，$D(\Delta x)=\sigma_x^2$，$D(\Delta y)=\sigma_y^2$，故得

$$\sigma_V=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2} \tag{1-22}$$

推而广之，当量V是多个独立的直接测得量x_1，$x_2\cdots x_n$的函数$V=V(x_1, x_2\cdots x_n)$时，V的标准偏差σ_V按下式计算：

$$\sigma_V=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2\sigma_{x_1}^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)\sigma_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2\sigma_{x_n}^2} \tag{1-23}$$

例： 测量一望远物镜的焦距。当测得无限远的物体在物镜焦面上成象的大小$2y'$及其对

应的视场角 2ω（见图 1-6）后，应用公式

$$f'=\frac{y'}{\mathrm{tg}\,\omega}$$

算出物镜的焦距。

设测得象高 $2y'=10\mathrm{mm}$，其标准偏差 $\sigma_{y'}=0.01\mathrm{mm}$；视场角 $2\omega=3^\circ$，$\sigma_\omega=0.00005$ rad。物镜的焦距为

$$f'=\frac{5\mathrm{mm}}{\mathrm{tg}1^\circ 30'}=190.94 \quad \mathrm{mm}$$

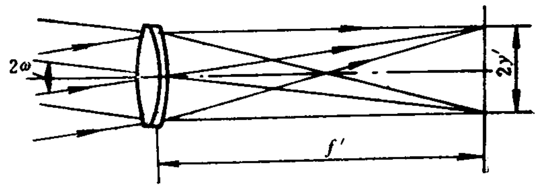

图1-6 测量物镜焦距的原理图

因焦距 f' 是象高 y' 和视场角 ω 两个直接测得量的函数，故由公式（1-22）求焦距的标准偏差

$$\sigma_{f'}=\sqrt{\left(\frac{\partial f'}{\partial y'}\right)^2\sigma_{y'}^2+\left(\frac{\partial f'}{\partial \omega}\right)^2\sigma_\omega^2}$$

其中

$$\frac{\partial f'}{\partial y'}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\omega},\quad \frac{\partial f'}{\partial \omega}=-\frac{y'}{\sin^2\omega}$$

将各已知值代入得

$$\sigma_{f'}=\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}1^\circ 30'}\right)^2(0.01)^2+\left(\frac{5}{\sin^2 1^\circ 30'}\right)^2(0.00005)^2}\ \mathrm{mm}=0.53 \quad \mathrm{mm}$$

四、不等精度测量

对同一物理量用不同的仪器，不同的测量方法，不同的测量次数以及不同的测量者进行测量，在计算算术平均值时，显然不能认为各测量数据的可靠程度是相同的。各测得值的可靠程度可用一数值来表示，这个数值称为“权”。例如用两种不同的量具测量一透镜同一表面的曲率半径，测得值为 30.62mm和 30.53mm，若已估计出第一个数值比第二个的误差小一倍，则求算术平均值时，不应按前述的等精度测量的方法，而应使第一个数值占更大的比重，即

$$\frac{4\times 30.62+1\times 30.53}{5}\mathrm{mm}=30.60 \quad \mathrm{mm}$$

计算式中 4 和 1 称为权，平均值 30.60 称为加权算术平均值。

要确定一组不等精度测得值的加权算术平均值和加权算术平均值的标准偏差，关键问题是如何选择“权”的值。

既然权说明了测量的可靠程度，根据这一原则，可按测量条件的优劣、测量仪器和测量方法的精度高低、重复测量次数的多少以及测量者技术水平的高低等确定权的大小。

我们从等精度测量入手介绍确定权的方法。设对同一物理量进行等精度测量，第一组共测了 n_1 次，第二组测了 n_2 次，它们的算术平均值及其标准偏差分别为

$$\bar{x}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}x_i}{n_1},\quad \sigma_{\bar{x}_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$$

$$\bar{x}_2=\frac{\sum_{j=1}^{n_2} x_j}{n_2},\quad \sigma_{\bar{x}_2}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

由于 $n_1 \neq n_2$，所以 $\sigma_{\bar{x}_1} \neq \sigma_{\bar{x}_2}$，由此我们可把 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 看作是不等精度测量的两个测得值，它们的算术平均值不难求得

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i+\sum_{j=1}^{n_2} x_j}{n_1+n_2}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

同理，若有 m 个不等精度的测得值，就有

$$\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2+\cdots+n_m\bar{x}_m}{n_1+n_2+\cdots+n_m}$$

以测量次数为权，并用 p_i 表示，不等精度测得值用 l_i 表示，即得计算加权算术平均值的一般表示式

$$\bar{l}=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_il_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \tag{1-24}$$

又 $\bar{x}$ 的标准偏差的平方为

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2}=\frac{n_1\sigma_{\bar{x}_1}^2}{n_1+n_2}=\frac{n_2\sigma_{\bar{x}_2}^2}{n_1+n_2}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{n_1\sigma_{\bar{x}_1}^2+n_2\sigma_{\bar{x}_2}^2}{2(n_1+n_2)}$$

同理，若有 m 个不等精度的测得值，就有

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sum_{i=1}^{m} n_i\sigma_{\bar{x}_i}^2}{m\sum_{i=1}^{m} n_i}$$

由此可得加权算术平均值的标准偏差的一般表示式

$$\sigma_{\bar{l}}=\sqrt{\frac{p_1\sigma_{l_1}^2+p_2\sigma_{l_2}^2+\cdots+p_n\sigma_{l_n}^2}{n(p_1+p_2+\cdots+p_n)}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\sigma_{l_i}^2}{n\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)}}$$

实际计算中，σ_{l_i} 为未知，则以残差 $\nu_i=l_i-\bar{l}$ 代替，根据式（1-14）的含义，σ_i 用下式估计，为

$$s_{\bar{l}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\nu_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} p_i}} \tag{1-25}$$

根据等精度测量中的式（1-13）可得

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_1}^2}{\sigma_{\bar{x}_2}^2}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{p_2}{p_1}$$

写成一般形式为

$$\frac{\sigma_{l_1}^2}{\sigma_{l_2}^2}=\frac{p_2}{p_1} \tag{1-26}$$

式（1-26）表明，不等精度测得值的权与其相应的标准偏差平方成反比。

今设一不等精度测量列 l_1、l_2……l_n 的标准偏差为 σ_{l_1}、σ_{l_2}……σ_{l_n}，则它们的权为

$$p_1=\frac{\mu^2}{\sigma_{l_1}^2},\ p_2=\frac{\mu^2}{\sigma_{l_2}^2}\cdots\cdots,\ p_n=\frac{\mu^2}{\sigma_{l_n}^2} \tag{1-27}$$

式中 μ 为比例系数，可取任意值，为计算方便，一般选 σ_{l_i} 中的最大或最小的一个。因为当 $\mu=\sigma_{l_i}$ 时，$p_i=1$，故μ又称单位权的标准偏差。

式（1-27）是一般确定权的依据。但当我们还不能准确知道测得值的标准偏差时，就需要根据具体情况和式（1-27）的含义选定各个权的值。例如当根据公式 $f'=y'/\mathrm{tg}\,\omega$ 测量透镜的焦距时，测量的 y' 值增大，ω 值也要相应增大。但在长度和角度的测量中，标准偏差 $\sigma_{y'}$和σ_ω一般不随 y' 和 ω 的大小变化。因此，由焦距的标准偏差计算公式

$$\sigma_{f'}=\sqrt{(1/\mathrm{tg}\,\omega)^2\sigma_{y'}^2+(y'/\sin^2\omega)^2\sigma_\omega^2}$$

可知，对同一个焦距值的测量，y' 和 ω 越大，因 $1/\mathrm{tg}\,\omega$ 和 $y'/\sin^2\omega$ 都同样地减小（实际测量中，$\omega\leqslant3^\circ$），$\sigma_{f'}$也就越小。就是说，由不同大小的 y' 和 ω 计算出的一系列 f' 值为不等精度测得值。求加权算术平均值及其标准偏差时，对应较大的y'和 ω 者，应给较大的权。如果 f_1' 对应的 y_1' 较 f_2' 的 y_2' 大一倍（ω 也大致大一倍），相应的$\sigma_{f'}$就大致减小一倍，两个f'值的算术平均值按式 $f'=1/5(4f_1'+f_2')$ 计算。

五、粗大误差的判断

粗大误差明显歪曲了测量结果，含粗大误差的坏值应该剔除。如果在测量过程中发现读错和记错数、或操作错、或外界条件突变而产生了坏值，则应随时发现随时剔除。但当整个测量完成后，在得到的测量列中往往会有个别数据和其余的比较，相差较大，如果能分析出明确的物理或技术方面的原因，证实它是坏值，当然应该舍弃。然而这种分析常常是做不到的，于是会变成凭个人主观判断来决定数据的取舍。这就很可能把相近的数保留，而舍弃相差较大的数，造成虚假的精密度高的结果。当测量次数较少时，还会产生人为的系统误差。为了能作出合理的判断，推荐采用格拉布斯（Grubbs）判断准则。

常见的判断准则有五种，它们是：拉依达（Райта）准则、肖维勒（Chauvenet）准则、格拉布斯准则、t 检验准则和狄克逊（Dixon）准则。大量的试验，特别是我国几位学者对这些准则作的大量分析和试验证明，格拉布斯准则的效果最好。它比拉依达准则和肖维勒准则可靠，又比 t 检验准则宽，比狄克逊准则严，因而宽严适宜。

格拉布斯准则判定步骤如下：

设对某物理量作等精度独立测量，测得值由小到大排列为 x_1、x_2、……x_n。

1）选定风险率 α　α 指判定是坏值而实际上不是坏值而犯了错误的概率。通常取 $\alpha=5.0\%$或 1.0%。

2）计算判定值 T　如果 x_1 或 x_n 是可怀疑的，则 $T=(\bar{x}-x_1)/s$ 或 $T=(x_n-\bar{x})/s$。