高等学校教材

电磁理论

杨儒贵 陈达章 刘鹏程 编

西安交通大学出版社

高等学校教材

电　磁　理　论

杨儒贵　陈达章　刘鹏程　编

西安交通大学出版社

内容提要

本书系统介绍电磁场的基本理论。在全面论述麦克斯韦方程及媒质的电磁特性后，通过平面波及导行波的讨论，深刻阐述电磁波的传播特性，并通过各种基本原理及定理的论证，揭示电磁现象中很多重要规律。讨论了电磁理论中常用的各种辅助函数，使读者能够理解并掌握其运用方法。论述了电磁工程中常用的近似分析与计算方法。本书既注意基本概念的分析，也着重介绍分析方法及计算方法。为扩大知识面，还介绍了电磁波在运动系统、随机媒质及非线性媒质中的传播特性。同时，还概述了瞬变电磁场的基本特点以及与时谐场的异同。

本书为“电磁场与微波技术”专业研究生教材。也可作为无线电类专业的高年级本科生及科技人员的参考书。

高等学校教材
电 磁 理 论
杨儒贵 陈达章 刘鹏程 编
责任编辑 嘉 成
*
西安交通大学出版社出版
（邮政编码：710049）
西安高特国际电子电脑有限公司激光照排
（雁塔路北段44号）
陕西省富平县印刷厂印装
陕西省新华书店经售
*
开本 787×1092 1/16 印张 18.25 字数：450千字
1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷
印数：1——1200
ISBN7-5605-0405-1/TN·29 定价：4.80元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从 1978 年至 1985 年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了 1986～1990 年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近 400 种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部电子类教材办公室

前　言

本教材系按机械电子工业部工科电子类专业教材1986～1990年编审出版规划，由电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场编审小组征稿，推荐出版，责任编委楼仁海。

本教材由杨儒贵、陈达章、刘鹏程编写。杨儒贵担任主编，电子科技大学袁敬闳主审。

本教材是为"电磁场与微波技术"专业硕士研究生编写的。参考学时为80学时。

全书共分十一章，有八个附录。第一章论述麦克斯韦方程及媒质的电磁特性；第二章全面地分析平面波在各种媒质中的传播特性；第三章讨论电磁理论中常用的各种辅助函数的定义、特性及应用；第四章论证了电磁理论中的基本原理及常用的定理；第五章讨论电磁辐射，介绍了辐射特性及研究方法；第六章讨论电磁散射，主要讨论简单的几何形状物体的散射；第七章论述导波系统电磁场的特性及有关的研究方法；第八章是关于谐振腔的特性分析；第九章介绍几种近似计算方法；第十章介绍运动系统中的电磁波特性，第十一章概述了随机媒质及非线媒质中电磁波的传播特性，介绍了瞬变电磁场的基本特性。为了培养学习者的分析问题和解决问题的能力，除第十一章外，每章末给出了一定数量的习题。同时，也介绍了与各章内容密切相关的参考文献。附录中列入了正交曲面坐标系、矢量分析、并矢分析、贝塞耳函数、修正贝塞耳函数、球贝塞耳函数、勒让德函数及连带勒让德函数等内容。全书采用SI单位制，对于简谐场采用$e^{j\omega t}$时间因子。

本书作者来自三所院校。西安交通大学杨儒贵编写了第一、第三、第五及第六章；汕头大学陈达章编写了第四、第七、及第八章；西安电子科技大学刘鹏程编写了第二、第九及第十章；西安交通大学汪文秉编写了第十一章中瞬变电磁场部分。全书内容安排经集体讨论研究决定。杨儒贵担任主编，刘鹏程参加了最后统稿工作。电子科技大学袁敬闳仔细阅读了全稿，对内容的取舍，深浅程度的掌握，提出了很多宝贵意见，使得本书的质量获得提高，在此表示衷心感谢。西安交通大学出版社大力支持本书的出版，编者也深表谢意。

由于本书作者来自多所院校，充分发挥各自所长，是其优点，但对内容的前后呼应，融为一体会有不周之处。另外，编者水平所限，错误一定难免，渴望广大读者指正。

编　者

1991.3

本书基本符号

$\boldsymbol{A}$	矢量磁位
$\boldsymbol{B}$	磁感应强度
c	自由空间光速
$\boldsymbol{D}$	电位移
$\boldsymbol{E}$	电场强度
$\boldsymbol{F}$	矢量电位
$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$	全空间格林函数
$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$	格林函数
$\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$	并矢格林函数
$\boldsymbol{H}$	磁场强度
I	电流
$\bar{\bar{I}}$	单位并矢
$\boldsymbol{J}$	电流密度
$\boldsymbol{J}_s$	电流线密度
k	波数
k_0	自由空间波数
$\boldsymbol{L}$	矢量波函数
$\boldsymbol{M}$	矢量波函数
$\boldsymbol{N}$	矢量波函数
R	距离
$\boldsymbol{r}$	矢径
$\boldsymbol{S}$	并矢散射矩阵
$\boldsymbol{S}$	能流密度
$\delta(\cdot)$	狄拉克 δ 函数
ε	介电常数
μ	导磁率
$\bar{\bar{\varepsilon}}$	张量介电常数
$\bar{\bar{\mu}}$	张量导磁率
$\boldsymbol{\Pi}^e,\boldsymbol{\Pi}^m$	赫兹矢量位
ρ	电荷体密度
Φ	标量位
σ	导电率
χ^e	电极化常数
χ^m	磁极化常数
ω	正弦量的角频率

目　　录

第一章　基本电磁场方程

本章简要叙述麦克斯韦方程，媒质参量，边界条件及电磁能和能流等。读者对初等的电磁理论应该是熟悉的，这里仅对麦克斯韦方程及其某些推论作一回顾。

§1-1　麦克斯韦方程

英国物理学家麦克斯韦概括了凭经验发现的规律性，引进了位移电流的概念，第一个表述了一组经典电动力学的方程。这组方程是经典电动力学的“公理”，它的形式如下：

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} = \int_s \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{s} + \int_s \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{s} \tag{1-1-1}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_s \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{s} \tag{1-1-2}$$

$$\oint_s \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{1-1-3}$$

$$\oint_s \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_v \rho(\boldsymbol{r},t)\cdot dv \tag{1-1-4}$$

式中 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ 为磁场强度，单位为安/米(A/m)；$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 为电场强度，单位为伏/米(v/m)；$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ 为磁感应强度，单位为 $\mathrm{Wb/m^2}$；$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ 为电位移，单位为库/米^2($\mathrm{C/m^2}$)；$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 为电流密度，单位为($\mathrm{A/m^2}$)；$\rho(\boldsymbol{r},t)$ 为电荷密度，单位为($\mathrm{C/m^3}$)。这些量都是空间矢径 $\boldsymbol{r}$ 及时间 t 的函数。式(1-1-1)称为广义安培定律，式(1-1-2)称为电磁感应定律，式(1-1-3)称为磁场高斯定律，也称为磁通连续性原理，式(1-1-4)称为电场高斯定律。此四方程式总称为麦克斯韦方程的积分形式。利用矢量分析中的高斯定理及斯托克斯定理，由式(1-1-1)到式(1-1-4)分别可以导出麦克斯韦方程的微分形式如下：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{1-1-7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-8}$$

式(1-1-5)同式(1-1-1)中的电流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 应包括三个部分：产生电磁场的外源 $\boldsymbol{J}^i$；媒质中的传导电流 $\boldsymbol{J}^c$ 及运流电流或徒动电流 $\boldsymbol{J}^v$。因此，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^i+\boldsymbol{J}^c+\boldsymbol{J}^v$。麦克斯韦方程的微分形式只能适用于场量连续可导区域，不像积分形式，在场量不连续处仍然成立。

对式(1-1-5)：两边取散度，且考虑到矢量恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$，再利用式(1-1-8)可以推导得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-9}$$

这是电量守恒的连续性方程。此关系说明时变电荷与时变电流是同时存在、不可分割的孤立的时变电荷是不存在的。只有静止的电荷才能单独存在。同时，也可看到，麦克斯韦方程是隐含着

电量守恒定律的。

由媒质参量将电磁场基本矢量彼此联系起来的关系式也必须列入麦克斯韦基本方程内，它们是：

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-10}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-11}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-12}$$

式中 ε 为介电常数，μ 为导磁率，σ 为电导率，这里认为这些量是不依时间为转移的给定点的函数。它们的更一般情况将在下一节讨论。

对于随时间按正弦函数变化的正弦电磁场(又称为时谐场或简谐场)，由于场源是正弦函数，在媒质为线性时，场量必为与场源同频的正弦量。因而，可用复矢量表示。本书以 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$及 $\rho(\boldsymbol{r})$分别表示各量的振幅值。这样，上述麦克斯韦方程的复数形式分别为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})+j\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-13}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-j\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-14}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1-1-15}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-16}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=-j\omega\rho(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-17}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-18}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-19}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=\sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-20}$$

式中 ω 为正弦函数的角频率。

§1-2　媒质的电磁特性

当媒质是真空时，则式(1-1-10)、(1-1-11)及(1-1-12)中的 $\varepsilon=\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\cdot10^{-9}\mathrm{F/m}\approx8.85\cdot10^{-12}\mathrm{F/m}$，$\mu=\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}=1.257\cdot10^{-6}\mathrm{H/m}$，$\sigma=0$。它们是不随时间变化且与空间位置无关，故真空是时不变、均匀的媒质。在一般媒质中，由于媒质的极化及磁化，则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-1}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-2}$$

式中 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$称为电极化矢量，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t)$称为磁化矢量，当

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0\chi^e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-3}$$

及式

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\chi^m\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-4}$$

而且 χ^e,χ^e 为与时间空间无关的常数时，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 同向($\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 同向)从而得

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0(1+\chi^e)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-5}$$

其中 $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi^e)=\varepsilon_r\varepsilon_0$，$\varepsilon_r$ 称为相对介电常数。对于 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$，有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0(1+\chi^m)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-6}$$

$\mu=\mu_0(1+\chi^m)=\mu_0\mu_r$，$\mu_r$ 称相对导磁率。这种媒质称为均匀各向同性时不变的。若 χ^e 与/或 χ^m 是空间坐标的函数，仍能有式(1-2-5)及(1-2-6)，则是 ε 也为空间坐标的函数(μ 也如此)，于是

媒质称为不均匀的。若 $P((r,t)$(同样 $M((r,t))$与 $E((r,t)$(同样 $H((r,t))$从而与 $D((r,t)$(同样 $B(r,t)$)方向不同时，一般应有

$$\left.\begin{aligned} P_x &= [(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_0)E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z] \\ P_y &= [\varepsilon_{yx}E_x + (\varepsilon_{yy}-\varepsilon_0)E_y + \varepsilon_{yz}E_z] \\ P_z &= [\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{yz}E_y + (\varepsilon_{zz}-\varepsilon_0)E_z] \end{aligned}\right\} \tag{1-2-6}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z \end{aligned}\right\} \tag{1-2-7}$$

将介电常数写成张量形式，即

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{1-2-8}$$

则 $D(r,t) = \bar{\varepsilon}E(r,t)$ (1-2-9)

对于 B 及 H，类似地有

$$B(r,t) = \bar{\mu}H(r,t) \tag{1-2-10}$$

其中

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{1-2-11}$$

以上各式中场量下标表示直角坐标的分量。若非直角坐标，利用坐标变换关系，可以导得各分量间的关系。具有张量介电常数导磁率的媒质称为电磁各向异性性媒质。例如，处于恒定磁场中的等离子体具有电各向异，处于恒定磁场中的铁氧体具有磁各向异性。晶体也是一种电各向异性媒质。

还有一些媒质，其电磁特性方程可以表示为

$$D(r,t) = \bar{\varepsilon}E(r,t) + \bar{\xi}H(r,t) \tag{1-2-12}$$

$$B(r,t) = \bar{\zeta}E(r,t) + \bar{\mu}H(r,t) \tag{1-2-13}$$

式中 ξ 及 ζ 称为电磁张量。这些关系表明，媒质的化特性与化特性存在一定的耦合关系，这种媒质称为双各向异性媒质。若 $\bar{\varepsilon},\bar{\xi},\bar{\zeta}$ 及 $\bar{\mu}$ 蜕化为实标量时，媒质称为双各向同性。一切运动媒质都具有这种偶合关系，例如处于电场中的运动介质可以发生磁化现象，而处于磁场中的运动介质可以发生极化现象。

在 χ^e,χ^m 不随场量 E 及 H 改变时，媒质称为线性的。若 χ^e 及/或 χ^m 与 E 或 H 有关，则称为非线性的。

对于某些媒质，D(或 B)除与 E(或 H)的当前时刻的值有关外，还与它早些时刻的值有关。在时谐情况，表现为与频率有关，例如，当频率由零值升至光频范围时，水的相对介电常数可能由81降至1.8左右。这种媒质称为时间色散媒质。若 D(或 B)不仅与空间同一点的 E(或 H)有关外，尚与周围的 E 或 H 有关，则媒质称为空间色散。媒质的色散特性。还将在第11章讨论。

通常电导率 $\sigma=0$的介质称为理想介质，电导率为∞的导体称为理想导体，介于这二者之间的 $\sigma\neq0$的媒质称为导电媒质。在导电媒质中，由式(1-1-13)有

$$\nabla \times H(r) = J(r) + j\omega D(r) = \sigma E(r) + j\omega\varepsilon E(r)$$

$$= j\omega\varepsilon\left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)E(r) = j\omega\varepsilon_e E(r) \qquad (1\text{-}2\text{-}14)$$

我们可认为导电媒质的介电系数为一复数，其值为 $\varepsilon_e = \varepsilon(1 + \sigma/j\omega\varepsilon)$ 称为等效介电系数。媒质导电率的出现，使媒质中的电磁场耗损能量，媒质参量虚部的出现反映了媒质是有耗的。时谐场情况，频率足够高时，由于存在极化损耗与磁化损耗，媒质的介电常数及磁导率，即使不计导电率，也均变化复数。即 $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$，$\mu = \mu' - j\mu''$，虚部的出现表示媒质存在能耗。常用损耗角来表示媒质损耗特性，其定如下：

导电损耗角 $\delta_c = \mathrm{tg}^{-1}\sigma/\omega\varepsilon$ (1-2-15a)

介质损耗角 $\delta_e = \mathrm{tg}^{-1}\varepsilon''/\varepsilon'$ (1-2-15b)

磁损耗角 $\delta_m = \mathrm{tg}^{-1}\mu''/\mu'$ (1-2-15c)

当频率极高时，由于媒质极化与磁化的滞后特性对于电磁场的快速变化反应很弱，此时媒质性能与真空相似。

§1-3 边界条件

当电磁场所在的区域中含有几种媒质时，在两种媒质形成的边界上，媒质的特性参数发生突变，导致场量发生变化。为了使麦克斯韦方程的解在边界上保持连续性，以使全区域中的合成解处处成立且唯一，我们必须知道边界上场量应该服从的边界条件，也就是边界上两侧场量之间的关系。

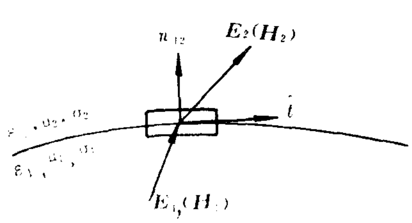

图1-3-1 切向边界条件

众所周知，对于这种场量不连续的边界区域，利用麦克斯韦方程的积分形式，可以导出边界上两侧场量之间应该服从的边界条件。通常，将边界上的场分解为两个分量，即平行于边界的切向分量（$\hat{t}$ 分量）和垂直于边界的法向分量（$\hat{n}$ 分量）。如图1-3-1所示，在边界上作一个矩形闭合回线，利用式(1-1-1)及式(1-1-2)，可以求得边界上电场切向分量 E_t 与磁场切向分量 H_t 应满足的条件是

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

式中 $\boldsymbol{J}_s$ 为表面电流，$\boldsymbol{H}_t$ 及 $\boldsymbol{E}_t$ 的方向如图1-3-1所示。式(1-3-1)及式(1-3-2)也可写成矢量形式

$$\hat{n}_{12} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{J}_s \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

$$\hat{n}_{12} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

式中 $\hat{n}_{12}$ 为由媒质①指向媒质②且垂直于边界的法向单位矢量。注意，$\boldsymbol{J}_s$ 的方向必须与矩形回路方向构成右旋关系。由于表面电流 $\boldsymbol{J}$ 实际上仅存在于理想导电体表面，因此，我们可以认为在一般非理想导电体边界上，磁场强度及电场强度的切向分量总是连续的。

在边界上作一个封闭的圆柱表面，如图1-3-2所示，利用式(1-1-3)及式(1-1-4)可以求得边界上磁感应强度的法向分量及电位移的法向分量应满足的条件是

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

式中 ρ_s 为表面电荷，$\boldsymbol{B}_n$ 及 $\boldsymbol{D}_n$ 的方向如图1-3-2所示。式(1-3-5)及式(1-3-6)也可写成矢量形式

$$\hat{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

$$\hat{n}_{12}\cdot(D_2-D_1)=\rho_s \tag{1-3-8}$$

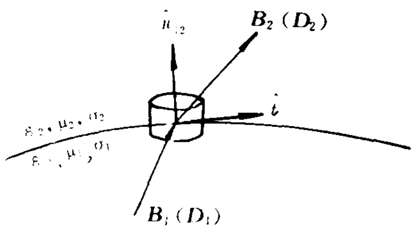

图1-3-2　法向边界条件

式中 $\hat{n}_{12}$为由媒质①指向媒质②且垂直于边界的法向单位矢量。注意，表面电荷实际上仅存在于导电体表面，可见，在一般非导电边界上，磁感应强度及电位移的法向分量总是连续的。

已知理想导电体内部不可能存在时变电磁场，因此，在理想导电体表面上的边界条件可以写为

$$\hat{n}\times H=J_s \tag{1-3-9}$$

$$\hat{n}\times E=0 \tag{1-3-10}$$

$$\hat{n}\cdot B=0 \tag{1-3-11}$$

$$\hat{n}\cdot D=\rho_s \tag{1-3-12}$$

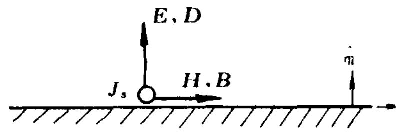

图1-3-3　理想导电边界

式中各个矢量的方向如图1-3-3所示。由此可见，在理想导电体表面上，仅可能存在切向磁场分量及法向电场分量。

§1-4　电磁能量及能流

若不考虑极化损耗与磁化损耗时，电场储能密度 W_e，磁场储能密度 W_m 及损耗功率密度 P 的瞬时值为

$$W_e(r,t)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(r,t) \tag{1-4-1}$$

$$W_m(r,t)=\frac{1}{2}\mu H^2(r,t) \tag{1-4-2}$$

$$P(r,t)=\sigma E^2(r,t) \tag{1-4-3}$$

对正弦电磁场，其时间平均值分别为

$$W_e(r)=\frac{1}{4}\varepsilon E^2(r)=\frac{1}{4}\varepsilon E\cdot E^* \tag{1-4-4}$$

$$W_m(r)=\frac{1}{4}\mu H^2(r)=\frac{1}{4}\mu H\cdot H^* \tag{1-4-5}$$

$$P(r)=\frac{1}{2}\sigma E^2(r)=\frac{1}{2}\sigma E\cdot E^* \tag{1-4-6}$$

式中 E^* 及 H^* 分别为复矢量 E 及 H 的共轭量。

用来描述电磁波能量流动强度的能流密度矢量 S，其瞬时值 $S(r,t)$ 为

$$S(r,t)=\frac{1}{2}E(r,t)\times H(r,t) \tag{1-4-7}$$

其复数形式为

$$S_c(r)=\frac{1}{2}E(r)\times H^*(r) \tag{1-4-8}$$

可以证明，能流密度的时间平均值 $<S(r)>=\frac{1}{T}\int_0^T S(rt)dt$ 等于复能流密度的实部，即

$$< S > = \frac{1}{2}R_e(S_c) \qquad (1\text{-}4\text{-}9)$$

所以，复能流密度矢量的实部代表传递能量，而虚部代表交换能量。

利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$，再根据式(1-1-5)及式(1-1-6)，对于不包括外源的区域 V 中的电磁场可以求得下列方程

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left[\frac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t)\right]dv$$

$$= \oint_s \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{s} + \int_V \sigma E^2(\boldsymbol{r},t)dv \qquad (1\text{-}4\text{-}10)$$

式中 S 为包围 V 的闭合面，左端代表 V 中的电磁储能减少率，右端第一项为 V 中流出的功率，第二项为 V 中的消耗功率。由此可见，式(1-4-10)表明，V 中单位时间内减少的电磁储能等于 V 中单位时间内流出的能量与消耗的能量之和，显然，这是符合能量守恒原理的。式(1-4-10)通常称为能流定理。

对于时谐场，能流定理的复数形式为

$$-2j\omega\int_V \frac{1}{4}[\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^* - \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*]dv = \frac{1}{2}\oint_s \boldsymbol{S}_c \cdot d\boldsymbol{s} + \int_V \frac{1}{2}\sigma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* dv$$

$$= \frac{1}{2}Re\oint_s S_c \cdot ds + \frac{1}{2}Im\oint_s S_c \cdot ds + \frac{1}{2}\int_V \sigma E \cdot E^* dv \qquad (1\text{-}4\text{-}11)$$

若考虑极化与磁化损耗，则 $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$，$\mu = \mu' - j\mu''$。此时，能流定理的复数形式为

$$-j2\omega\int_V\left[\frac{\mu_r \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^*}{4} - \frac{\varepsilon' \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^*}{4}\right]dv = \frac{1}{2}Re\oint_s S_c \cdot ds + \frac{1}{2}Im\oint_s S_c \cdot ds + \frac{1}{2}\int_V \sigma \cdot E^* dv$$

$$+ \frac{1}{2}\int_V (\omega\varepsilon''\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* + \omega\mu''\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^*)dv \qquad (1\text{-}4\text{-}12)$$

可见，式(1-4-12)右边的第三项代表极化损耗与磁化损耗之和，虚部 ε'' 及 μ'' 代表损耗。

§1 5　磁荷及磁流

众所周知，电荷与电流是产生电磁场的唯一的源。自然界中至今尚未发现磁荷及磁流存在。但是，在处理某些电磁场问题，引入磁荷与磁流的假想概念是有益的。引入磁荷及磁流后，认为磁荷为磁场散度源，磁流为电场旋度源，那么由电荷及电流、磁荷与磁流共同产生的时谐场方程式为

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{J}^m(\boldsymbol{r}) - j\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad (1\text{-}5\text{-}2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\rho}^m(\boldsymbol{r}) \qquad (1\text{-}5\text{-}3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r}) \qquad (1\text{-}5\text{-}4)$$

式中 J^m 为磁流密度，ρ^m 为磁荷密度，它们满足的磁荷守恒原理为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}^m(\boldsymbol{r}) = -j\omega\boldsymbol{\rho}^m(\boldsymbol{r}) \qquad (1\text{-}5\text{-}5)$$

如果将电场及磁场分为两个部分，一部分是由电荷及电流产生的，另一部分是由磁荷及磁流产生的，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^m(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}^m(\boldsymbol{r})$$

代入前式。由于麦克斯韦方程是线性的，我们求得电荷及电流产生的电磁场方程和磁荷及磁流产生的电磁场方程分别为

$$
\begin{cases}
\nabla \times H^e(r) = J(r) + j\omega\varepsilon E^e(r) & (1\text{-}5\text{-}6) \\
\nabla \times E^e(r) = -j\omega\mu H^e(r) & (1\text{-}5\text{-}7) \\
\nabla \cdot B^e(r) = 0 & (1\text{-}5\text{-}8) \\
\nabla \cdot B^e(r) = \rho(r) & (1\text{-}5\text{-}9)
\end{cases}
$$

及

$$\nabla \times H^m(r) = j\omega\varepsilon E^m(r) \quad (1\text{-}5\text{-}10)$$

$$\nabla \times E^m(r) = -J^m(r) - j\omega\mu H^m(r) \quad (1\text{-}5\text{-}11)$$

$$\nabla \cdot B^m(r) = \rho^m(r) \quad (1\text{-}5\text{-}12)$$

$$\nabla \cdot D^m(r) = 0 \quad (1\text{-}5\text{-}13)$$

比较上述两组方程可见，它们之间存在下列对应关系

$$
\begin{cases} H^e \sim -E^m \\ E^e \sim -H^m \end{cases}
\quad
\begin{cases} \varepsilon \sim \mu \\ \mu \sim -\varepsilon \end{cases}
\quad
\begin{cases} J \sim -J^m \\ \rho \sim \rho^m \end{cases}
\quad (1\text{-}5\text{-}14)
$$

这就意味着，若我们已经求出电荷及电流产生的电磁场，只要将这些表示式中，各个对应参量以式(1-5-14)代换以后，即可代表具有相同分布特性的磁荷及磁流产生的电磁场。关系式(1-5-14)通常称为对偶原理或二重性原理。引入磁荷及磁流概念以后，由于式(1-5-2)及式(1-5-3)不同于式(1-1-15)及式(1-1-16)，因而相应的积分形式也不相同，因此前述边界条件必须加以修正。但该两式仅涉及到电场强度的切向分量与磁感应强度的法向分量，很容易证明，此时电场的切向分量关系为

$$E_{2t} - E_{1t} = -J_s^m \quad (1\text{-}5\text{-}15)$$

或者写为

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{J}_s^m \quad (1\text{-}5\text{-}16)$$

式中 $\mathbf{J}_s^m$ 为表面磁流密度，$\hat{\mathbf{n}}_{12}$乃由媒质①指向媒质②的边界上法向单位矢量。

边界上磁感应强度的法向分量应满足的方程为

$$B_{2n} - B_{2n} = \rho_s^m \quad (1\text{-}5\text{-}17)$$

或者写为

$$\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_s^m \quad (1\text{-}5\text{-}18)$$

式中 ρ_s^m 表示面磁荷密度，$\hat{\mathbf{n}}_{12}$的意义同上。

至于边界上磁场强度的切向分量以及电场强度的法向分量应满足的边界条件仍然同前

§1-6 波动方程

对于线性、均匀、各向同性的静止理想介质，若不考虑磁荷及磁流时，麦克斯韦方程式的微分形式变为

$$\nabla \times H(r,t) = J(r,t) + \varepsilon \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} \quad (1\text{-}6\text{-}1)$$

$$\nabla \times E(r,t) = -\mu \frac{\partial H(r,t)}{\partial t} \quad (1\text{-}6\text{-}2)$$

$$\nabla \cdot H(r,t) = 0 \quad (1\text{-}6\text{-}3)$$