高等代数习题集

[苏] Д. К. 法杰耶夫 И. С. 索明斯基 著 丁寿田 原译
项观捷 赵本杰 赵继盛 修订 李师正 校

高等教育出版社

高等代数习题集

(修订第二版)

〔苏〕Д.К. 法杰耶夫，И.С. 索明斯基著
丁 寿 田 原 译
项观捷 赵本杰 赵继盛 修订
李师正 校

高等教育出版社

本书是中译本修订第二版．第一版是已故丁寿田先生根据苏联Д.К.法杰耶夫和И.С.索明斯基所著"Сборник задач по высшей алгебре"(1952年)译出的《高等代数习题》．1977年，苏联科学出版社出了该书的增订第十一版．修订者根据这个新版，并参照了丁寿田先生的译本，重新翻译了本书．

新版本比原先的版本有较大的改变，增加了有关数论、群论初步知识的两章，其它方面的内容也有更新和增删，章节安排上也有一些变动．

本书共分三个部分：1.习题．共有八章，包括难易程度不等的1157个习题；2.提示．部分习题（标"*"的）给出了简要的提示；3.答案与解法．

本书可供数学专业大学生、教师参考．

高等代数习题集

（修订第二版）

〔苏〕Д.К.法杰耶夫，И.С.索明斯基 著

丁寿田 原译

项观捷　赵本杰　赵继盛　修订

李师正　校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

沈阳新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.5　字数 290 000

1987年10月第2版　　1987年10月第1次印刷

印数 00,001—10,150

书号 13010·01351　　定价：2.90 元

序 言

本习题集的基础是Д. К. 法杰耶夫和И. С. 索明斯基的《高等代数习题》第二版（1949年），嗣后，曾按该版本印行过。但是本版作了实质性的改动，新增添了两章——数论初步和群论初步，对于线性代数方面的章节，在题材方面作了很大的扩充，各章中都加进了与域和剩余类环有关的习题。与此同时，删掉了原版的一些习题，章节的安排也作了某些变动。同先前一样，仍然保持着线性代数的两个重点，其中第一个重点（第三、四章）具有形式计算的特点，而第二个重点（第八章）则带有几何的色彩。本版压缩了原版中一些过于详尽的解答，对于有提示的习题（这些习题标以星号），在叙述上通常将解答作为提示的直接继续。

Д. К. 法杰耶夫

目　　录

序言
第一章　数论的简单知识……………………………………1
§1　整数部分，分数部分，到最近整数的距离……………1
§2　最大公约数………………………………………………2
§3　素因数标准分解式………………………………………4
§4　同余式的理论……………………………………………5
§5　数论函数…………………………………………………8
§6　环与域的简单知识………………………………………11
第二章　复数……………………………………………………14
§1　表为分量形式的复数的运算……………………………14
§2　几何表示与三角形式……………………………………16
§3　三次方程与四次方程……………………………………21
§4　单位根……………………………………………………23
§5　指数函数和自然对数……………………………………26
§6　某些推广…………………………………………………27
第三章　矩阵和行列式的运算…………………………………28
§1　矩阵的运算………………………………………………28
§2　二阶和三阶行列式………………………………………31
§3　排列………………………………………………………32
§4　行列式的定义和简单性质………………………………34
§5　行列式的计算……………………………………………38
§6　用矩阵乘法计算行列式…………………………………55
§7　用分块矩阵的乘法计算行列式…………………………60
第四章　线性方程组，矩阵，二次型…………………………62

§1 线性方程组，唯一解的情况……62
§2 逆矩阵……65
§3 矩阵的秩。一般形式的线性方程组……72
§4 矩阵代数……79
§5 二次型和对称矩阵……86
第五章 多项式代数……90
§1 多项式的初等运算。单根和重根……90
§2 多项式的最大公因式……94
§3 多项式分解为一次因式之积及其应用……97
§4 有理分式展为部分分式之和……100
§5 插值法……103
§6 多项式的有理根。在域Q上和在域 GF(p) 上的可约性与不可约性……105
§7 多项式环的同余式。代数扩域……109
§8 对称多项式……111
§9 结式和判别式……115
第六章 多项式的根在实轴上和在复变量平面上的分布
§1 理论基础……121
§2 斯图姆定理……124
§3 辐角原理及其推论……126
§4 关于多项式根分布的杂题……128
§5 多项式根的近似计算……130
第七章 群论……132
§1 半群公理与群公理，简单性质，例子……132
§2 子群，正规子群，商群，同态……134
§3 自由群和自由积……138
§4 不变多项式。在研究最低次方程上的应用……139
第八章 线性代数……142

§1 基，维数，子空间 …………142
§2 线性映射和线性算子。象，核，半逆算子 …………148
§3 算子矩阵化为标准形的理论基础 …………153
§4 特征值和特征向量，不变子空间，标准形 …………156
§5 n 维欧氏空间中的初等几何 …………163
§6 欧氏空间和酉空间中的算子 …………167
提示 …………172
第一章 …………172
第二章 …………174
第三章 …………177
第四章 …………182
第五章 …………187
第六章 …………192
第七章 …………195
第八章 …………198
答案与解法 …………204
第一章 …………204
第二章 …………209
第三章 …………227
第四章 …………240
第五章 …………266
第六章 …………306
第七章 …………323
第八章 …………333

第一章　数论的简单知识

§1.　整数部分，分数部分，到最近整数的距离

1．画出以下各函数的图象：$[x]$（数 x 的整数部分）；$\{x\}$（数 x 的分数部分）；(x)（数 x 到最近整数的距离）；$f(x)=\{x-a\}-\{x\}+a$，其中 $0<a<1$。

2．证明 $(x)=\frac{1}{2}-\left|\{x\}-\frac{1}{2}\right|$。

3．讨论函数 $f(x,y)=[x+y]-[x]-[y]$。

4．计算 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{n^2-1}]$。

*5．证明：对于任何自然数 n，数 $(\sqrt{3}+2)^n$ 的整数部分是奇数

6．假设 $1<a<b$。试问适合条件 $a^k\leqslant b$ 的最大的自然数指数 k 等于什么？

7．假设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上非负函数，证明：$\sum\limits_{a\leqslant n\leqslant b}[f(n)]$ 等于函数 $f(x)$ 图象下方（包括图象本身）的这样的点的个数，这些点的横坐标为整数 $n,a\leqslant n\leqslant b$，纵坐标为自然数。

*8．假设 φ 和 ψ 是两个递增的非负函数，且互为反函数，它们分别定义在区间 $[a,b]$ 和 $[\alpha,\beta]$ 上，其中 $\alpha=\varphi(a)$，$\beta=\varphi(b)$。证明：

$$\sum_{a<m\leqslant b}[\varphi(m)]+\sum_{\alpha<n\leqslant\beta}[\psi(n)]=[b]\cdot[\beta]-[a]\cdot[\alpha]+N,$$

其中 N 是函数 φ 在区间 $a<x\leqslant b$ 的图象所经过的整数坐标

的点数。

*9. 假设 φ 和 ψ 是两个递减的非负函数，且互为反函数，它们分别定义在区间 $[a,b]$ 和 $[\beta,\alpha]$ 上，其中 $\alpha=\varphi(a)$，$\beta=\varphi(b)$。证明：

$$\sum_{a<m<b}[\varphi(m)]-\sum_{\beta<n<\alpha}[\psi(n)]=[b]\cdot[\beta]-[a][\alpha].$$

10. 计算$\sum\limits_{k=1}^{n}[\sqrt{k}]$。

*11. 证明定理：为了使数列 $[\alpha x]$ 和 $[\beta y]$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$x=1,2,3\cdots,y=1,2,3,\cdots$，不重不漏地充满自然数列，必须且只须 α 与 β 为无理数且满足关系式$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$。

§2 最大公约数

12. 试求下面每对数的最大公约数：

a) 321与843， b) 23521与75217， c) 6787与7194.

*13. 已知自然数 a_0 与a_1。作数列： $a_2=|a_0-a_1|$， $a_3=|a_1-a_2|$，$a_4=|a_2-a_3|,\cdots$。证明：此数列从某项起，将形如：$d,d,0,d,d,0,\cdots$，这里 $d=(a_0,a_1)$ 是数 a_0 与 a_1 的最大公约数。

14. 试求在十进位制下数$\overbrace{111\cdots1}^{m个}$和数$\overbrace{111\cdots1}^{n个}$的最大公约数。

*15. 证明：假设 m 和 n 互素，那么 2^m-1 和 2^n-1 也互素。

16. 试求数 a^n-1 和数 a^m-1 的最大公约数，这里 a是整数，m,n 是自然数。

*17. 试求数 a^2+1 和 $2a+3$（a 是整数）的最大公约数。

18．试求习题12中各数对的最大公约数的线性表达式。

*19．证明：整数$a_1,a_2,\cdots,a_k$的最大公约数$d=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$等于a_1与$(a_2,\cdots,a_k)$的最大公约数且能被数$a_1,a_2,\cdots,a_k$的任意公约数整除。

*20．证明：整数$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$的最大公约数d可有如下的线性表示：

$$d=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_ku_k,$$

其中$u_1,u_2,\cdots,u_k$是整数。

21．证明：假如$q_0,q_1,\cdots,q_k$是数a与b的欧几里德(Euclid)算法中的不完全商：

$$a=bq_0+r_1,$$

$$b=r_1q_1+r_2,$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$r_{k-2}=r_{k-1}q_{k-1}+r_k,$$

$$r_{k-1}=r_kq_k,$$

那么就有

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{q_k}}}$$

（即由上述一系列不完全商，可以确定a/b的所谓连分数展开式）。

22．斐波那契(Fibonacci)数由下列公式确定：

$u_0=1$，$u_1=1$，$u_k=u_{k-1}+u_{k-2}$ $(k\geqslant2)$。证明：

$$\frac{a^{u_{k+2}}-1}{a^{u_{k+1}}-1}=a^{u_k}+$$

$$\cfrac{1}{a^{u_{k-1}}+\cdots+\cfrac{1}{a^{u_1}+\cfrac{1}{a^{u_0}}}}.$$

§3 素因数标准分解式

23. 写出下列各数的标准分解式：

a) 1440； b) 1575； c) 111111.

24. 写出数 1，2，…，n 的最小公倍数的标准分解式.

25. 写出数 $n!$ 的标准分解式.

26. 证明：数 $2^{n-1}/n!$ 化成既约分数后的分母是奇数. 又，分子能等于 1 吗？

27. 不利用组合方面的考虑，证明 $\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ 是整数.

*28. 证明：$\dfrac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$ 是整数.

29. 假设 S 是某个实数集合，我们在 S 中定义下述 M 和 m 两个运算：

$a\mathrm{M}b=\mathrm{Max}(a,b)$ （即数 a,b 中的较大者）；

$a\mathrm{m}b=\min(a,b)$ （即数 a,b 中的较小者）.

证明：这两个运算适合交换律、结合律，并适合两种分配律：

$(a\mathrm{m}b)\mathrm{M}c=(a\mathrm{M}c)\mathrm{m}(b\mathrm{M}c)$，

$(a\mathrm{M}b)\mathrm{m}c=(a\mathrm{m}c)\mathrm{M}(b\mathrm{m}c)$.

并证：$(a\mathrm{m}b)+(a\mathrm{M}b)=a+b$.

30. 假设 $a=\Pi p^{\alpha_p}$ 和 $b=\Pi p^{\beta_p}$ 是自然数 a 和 b 的标准分

解式。证明：数 a 与 b 的最大公约数 $(a,b)=\prod p^{\alpha_p \mathrm{m}\beta_p}$，而数 a 与 b 的最小公倍数 $[a,b]=\prod p^{\alpha_p M \beta_p}$。

31. 证明：对于自然数 a_1,a_2,a_3，有

$(a_1,a_2)[a_1,a_2]=a_1a_2$；

$(a_1,[a_2,a_3])=[(a_1,a_2),(a_1,a_3)]$；

$[a_1,(a_2,a_3)]=([a_1,a_2],[a_1,a_3])$。

32. 利用乘法运算和求最大公约数，写出三个自然数的最小公倍数。

*33. 假如 M 是自然数的一个有限集，M_i 表示它的所有非空子集，$d(M_i)$ 表示集合 M_i 所含数的最大公约数，依M_i的元素个数是偶数或奇数取 $\varepsilon_i=1$ 或 $\varepsilon_i=-1$。证明：M所含数的最小公倍数等于 $\prod(d(M_i))^{-\varepsilon_i}$。

34. 设自然数 $n\geqslant 5$。证明：当且仅当 $(n-1)!$ 不能被n整除时，n 是素数。

*35. 证明存在无限多个形如 $4n-1$ 的素数。

36. 证明：如果两个互素的整数的积是某一个整数的平方，那么这两个数除了符号不计外，各可表为某整数的平方。

*37. 证明：如果 a,b 是互素的整数，且 $a^2+b^2=c^2$，这里 c 是一个正整数，那么一定能找到整数 m 和 n，满足 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$ （或者 $a=2mn$，$b=m^2-n^2$）。

*38. 试写出方程 $x^2+y^2=2z^2$ 整数解的一般形式，这里 x和 y 假定为互素的整数。

§4 同余式的理论

39. 解同余式：

a) $2x+1\equiv 0 \pmod{13}$；

b) $5x\equiv 7 \pmod{21}$；

c) $10x\equiv 3 \pmod{49}$。

40．解同余式：

a) $x^2\equiv -1\ (\bmod 13)$；

b) $x^2\equiv -1(\bmod 11)$；

c) $x^2\equiv 2\ (\bmod 31)$。

41．解同余式：

a) $x^2+2x+14\equiv 0\ (\bmod 17)$；

b) $x^2+3x+10\equiv 0\ (\bmod 19)$；

c) $x^3-3x+1\equiv 0\ (\bmod 19)$；

d) $x^3\equiv 5\ (\bmod 11)$；

e) $x^3\equiv 10\ (\bmod 37)$。

42．解同余式：

a) $6x\equiv 8\ (\bmod 26)$；

b) $15x\equiv 12\ (\bmod 33)$。

*43．证明：数 a^2+m 与 $ka+l(a,m,k,l$ 都是整数）的最大公约数是 l^2+mk^2 的因数。

*44．假设 a_1，…，$a_{\varphi(m)}$ 是关于模 m 的各本原同余类的最小正剩余。证明：$a_1+\cdots+a_{\varphi(m)}=\dfrac{1}{2}m\varphi(m)$①。

45．解同余式 $x^2-1\equiv 0\ (\bmod p^m)$。这里 p 是素数，$p>2$，m 是自然数。

46．解同余式 $x^2-1\equiv 0\ (\bmod 2^m)$。

47．假设自然数 m_1 和 m_2 互素，a_1 和 a_2 是任意的整数。证明：可以在关于模 m_1m_2 的同余类中，找到唯一的一类 x，满足 $x\equiv a_1(\bmod m_1)$，$x\equiv a_2(\bmod m_2)$。

48．假设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 两两互素，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是任意

---

① 关于模m的本原同余类是指一切与m互素的整数所在的同余类．$\varphi(m)$ 表示不大于m而与m互素的自然数个数，称为欧拉（Euler）函数。——译校者。

的整数。证明：能找到数 $x\equiv a_i(\mathrm{mod}\ m_i)$，且 x 关于模$m_1m_2\cdots m_k$ 是唯一确定的。

49．假设 $n=2^{m_0}p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$，$p_1,\cdots,p_k$是奇素数，$m_1\geqslant1,\cdots,m_k\geqslant1$，$m_0\geqslant0$。证明：当 $m_0=0$ 或 $m_0=1$ 时，同余式$x^2-1\equiv0\ (\mathrm{mod}\ n)$ 有 2^k 个解；当 $m_0=2$ 时，上述同余式有 2^{k+1} 个解，当 $m_0\geqslant3$ 时，则有 2^{k+2} 个解。

50．证明：同余式 $x^2-1\equiv0(\mathrm{mod}\ n)$，在解的个数不是2时，所有解的乘积与1关于模 n 同余，而当解的个数为2时，该乘积与 -1 关于模 n 同余。

51．证明：同余式 $x^2+1\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$，当 $p\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$时无解。

*52.证明：在序列 $4k+1$ 中存在无限多个素数。

*53.证明：当 p 是素数时，$(p-1)!+1\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$。

*54.假设 p 是素数，$p=2k+1$，证明同余式 $(k!)^2+(-1)^k\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$成立。

*55.假设 a_1，a_2，…，a_k（其中 $k=\varphi(n)$）是关于模 n 的约化剩余系①证明：当 $n=4$，$n=p^m$ 或 $n=2p^m$（p 是奇素数，$m\geqslant1$）时，$a_1a_2\cdots a_k\equiv-1(\mathrm{mod}\ n)$；当 n 为其他自然数时，$a_1a_2\cdots a_k\equiv1(\mathrm{mod}\ n)$。

56．求数3^{1000}关于模13的最小正剩余。

57．假设 m 是自然数，且不能被2和5整除。证明：当$(a,m)=1$，数 a/m 按10进位制展开时，每个循环节中所含数字的个数是一个确定的数②，且这个数是 $\varphi(m)$ 的因子。

58．形如 $7^n+11^n(n=1,2,3\cdots)$ 的数关于模19的剩余是什么？

---

① 关于模n的约化剩余系，是指从与n互素的所有同余类（即本原同余类）各取一个代表组成的数组．它含有$\varphi(n)$个数．——译校者。

② 即这个数与a的选取无关．——译校者

59．解同余式$2^n \equiv n \pmod 7$。

*60．解同余式 $2^n \equiv n \pmod p$，其中 p 是素数。

61．解同余式 $2^n \equiv n^2 \pmod p$，其中 p是素数。

62．试求数 $u_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ 关于模 7 的剩余，此式中 2 的个数为 n

*63．证明：数 u_n 关于模 p（素数）的剩余，当 n 足够大时，将稳定不变。

*64．假设 a 与 b 是互素的自然数，证明：当 x, y 取非负整数时，$ax+by$ 可取遍小于 ab 的$\frac{(a-1)(b-1)}{2}$个整数之外的所有非负整数值。

§5 数论函数

65．函数 μ 叫作麦比乌斯（Möbius）函数，定义如下：$\mu(1)=1$；$\mu(p_1p_2\cdots p_k)=(-1)^k$；当至少有一个指数 a_i 大于1时，$\mu(p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k})=0$。证明：当$n>1$ 时，$\sum\limits_{d|n}\mu(d)=0$。

*66．证明恒等式：$\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]=1$。

*67．证明下述反演公式（Формула обращения）：如果$f(n)=\sum\limits_{d|n} g(d)$；则$g(n)=\sum\limits_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$。

68．假设函数f是积性函数，即当 n_1, n_2 互素时，$f(n_1n_2)=f(n_1)f(n_2)$。证明：$g(n)=\sum\limits_{d|n} f(d)$ 和 $h(n)=\sum\limits_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ 也是积性函数。

69．对于积性函数 f，证明：

a) $f(n)=f(p_1^{\alpha_1})\cdots f(p_k^{\alpha_k})$;

b) $\sum\limits_{d|n}f(d)=\prod\limits_{p_i|d}(1+f(p_i)+\cdots+f(p_i^{\alpha_i}))$;

c) $\sum\limits_{d|n} f(d)\mu(d)=(1-f(p_1))\cdots(1-f(p_k))$;

d) $\sum\limits_{d|n}f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=(f(p_1^{\alpha_1})-f(p_1^{\alpha_1-1}))\cdots(f(p_k^{\alpha_k})-f(p_k^{\alpha_k-1}))$，其中 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是标准分解式。

70．从公式$\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$ 出发（其中 φ 是欧拉函数），推出公式：$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$．其中 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$.

71．假设$\tau(n)$是数 n 的自然数因子的个数，证明：

a) $\tau(n)=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)$;

b) $\sum\limits_{d|n}\tau(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=1$;

c) $\sum\limits_{d|n}\tau(d)\mu(d)=(-1)^k$;

d) $\sum\limits_{d|n}\tau(d)=\frac{1}{2}\tau(n)\prod\limits_{i=1}^{k}(\alpha_i+2)$。

其中$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$。

72．假设 $\zeta(n)$ 等于数 n 的自然数因子的和。证明：

a) $\zeta(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$,

b) $\sum\limits_{d|n}\zeta(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=n$;

c) $\sum\limits_{d|n}\zeta(d)\mu(d)=(-1)^k p_1p_2\cdots p_k$。

*73. 证明：

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\tau(k)=\sum_{x=1}^{n}\left[\frac{n}{x}\right] \text{和} \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\tau(k)=2\sum_{x=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right]-$$

$[\sqrt{n}]^2$.

*74. 证明：

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\zeta(k)=\sum_{x=1}^{n}x\left[\frac{n}{x}\right]=\frac{1}{2}\sum_{y=1}^{n}\left[\frac{n}{y}\right]\cdot\left(\left[\frac{n}{y}\right]+1\right).$$

75. 假设函数 $f(x)$ 定义在 $0<x<\infty$，且当 $x<\delta$ 时等于零。令 $g(x)=\sum^{\infty} f\left(\frac{x}{k^{\alpha}}\right)$，其中 α 是实数，$\alpha>0$. 证明：

$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{k^{\alpha}}\right)\mu(k)$（上述两和实际上是有限的）。

*76. 证明：小于 M 且无平方因子（即不能被素数的平方整除）的自然数的个数等于$\sum_{k^2\leqslant M}\mu(k)\left[\frac{M}{k^2}\right]$.

*77. 证明：在正方形$0<x\leqslant M$，$0<y\leqslant M$中坐标为互素整数的点之数且等于$\sum_{k\leqslant M}\mu(k)\left[\frac{M}{k}\right]^2$.

*78. 假设 $k(n)$ 是数 n 的素因子的个数。证明：$\sum_{x\leqslant M}2^{k(x)}=\sum_{y\leqslant M}T\left(\frac{M}{y}\right)\mu(y)$. 其中 $T(t)=\sum_{z\leqslant t}\tau(z)$（参阅习题73）.

下面的习题需要无穷级数理论方面的初步知识。在讨论中我们引入黎曼(Riemann)ζ-函数：$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，定义 $\zeta(s)$ 的