

70
21 世纪数学系列教材(大专)
“九五”教育部重点教材

高等数学

(第三版)

吉林工学院数学教研室编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第三版)/吉林工学院数学教研室编
武汉:华中科技大学出版社, 2001年10月
ISBN 7-5609-1224-9

I. 高…

II. 吉…

III. 高等数学-高等学校-教材

IV. O13

高等数学(第三版)

吉林工学院数学教研室编

责任编辑:龙纯曼
责任校对:陈元玉

封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:安陆市鼎鑫印务有限责任公司

开本:787×960 1/16

印张:28

字数:523 000

版次:2001年10月第3版

印次:2002年8月第16次印刷

印数:77 001—81 000

ISBN 7-5609-1224-9/O · 143

定价:29.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

第三版前言

为适应我国高等教育发展的需要,使更多的学校采用本教材,我们根据一些兄弟院校提出的意见和《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》,对第二版内容进行一些修改和调整.删去概率数理统计部分,保留高等数学和线性代数两部分;增加了多元隐函数求导法、微分法在几何上的应用.重心和转动惯量、数项级数的审敛法等内容;对“*”号内容也作了变动,如三重积分改为必学内容;针对原书例题习题偏少的不足,增编了 100 多道例题和近 600 多道习题,并增加“*”号题的数量和难度,供选学.第三版的《高等数学》,将更便于教学和自学.

本书第三版由杜文思教授主编并增写有关内容,由赵健闯参加编写习题.

华中科技大学出版社编辑部对第二版的修改提出很多宝贵意见,特致衷心感谢.

编 者

2001 年 5 月

目 录

第一章 函数、极限、连续.....	(1)
§ 1 变量与函数	(1)
习题 1	(5)
§ 2 函数的几种特性	(6)
习题 2	(8)
§ 3 初等函数	(9)
习题 3	(14)
§ 4 极限概念	(14)
习题 4	(17)
§ 5 极限运算	(17)
习题 5	(19)
§ 6 极限存在准则 两个重要极限	(20)
习题 6	(24)
§ 7 无穷小和无穷大	(25)
习题 7	(28)
§ 8 函数的连续性	(29)
习题 8	(34)
复习题一	(35)
第二章 导数与微分	(37)
§ 1 导数概念	(37)
习题 1	(42)
§ 2 导数的基本公式与运算法则	(44)
习题 2	(54)
§ 3 高阶导数	(56)
习题 3	(58)
§ 4 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(58)
习题 4	(63)
§ 5 微分	(64)
习题 5	(70)
复习题二	(71)
第三章 中值定理与导数的应用	(73)
§ 1 中值定理	(73)
习题 1	(77)

• 2 • 高等数学

§ 2 罗必塔(L'Hospital)法则	(77)
习题 2	(80)
§ 3 函数的增减性与极值	(81)
习题 3	(85)
§ 4 最大值、最小值问题	(87)
习题 4	(89)
§ 5 曲线的凹向与拐点 函数图像的描绘	(90)
习题 5	(94)
* § 6 曲线的曲率	(94)
习题 6	(99)
复习题三	(99)
第四章 不定积分	(101)
§ 1 不定积分的概念与性质	(101)
习题 1	(104)
§ 2 换元积分法	(105)
习题 2	(111)
§ 3 分部积分法	(113)
习题 3	(116)
§ 4 有理函数的积分举例	(116)
习题 4	(119)
§ 5 积分表的用法	(119)
习题 5	(121)
复习题四	(121)
第五章 定积分及其应用	(123)
§ 1 定积分的概念及性质	(123)
习题 1	(128)
§ 2 微积分基本公式	(128)
习题 2	(131)
§ 3 定积分的换元法与分部积分法	(132)
习题 3	(136)
§ 4 广义积分	(137)
习题 4	(141)
§ 5 定积分的应用	(141)
习题 5	(151)
复习题五	(153)
第六章 向量代数与空间解析几何简介	(156)
§ 1 空间直角坐标系	(156)
习题 1	(158)

§ 2 向量及其线性运算	(158)
习题 2	(161)
§ 3 向量的坐标	(162)
习题 3	(165)
§ 4 向量的数量积	(165)
习题 4	(167)
§ 5 向量的向量积	(168)
习题 5	(170)
§ 6 曲面	(170)
习题 6	(178)
§ 7 空间曲线	(179)
习题 7	(183)
复习题六	(183)
第七章 多元函数微分法	(185)
§ 1 多元函数的基本概念	(185)
习题 1	(189)
§ 2 偏导数	(190)
习题 2	(193)
§ 3 全微分	(194)
习题 3	(196)
§ 4 多元复合函数的求导法则	(197)
习题 4	(200)
§ 5 隐函数求导数法则	(200)
习题 5	(202)
§ 6 微分法在几何上的应用	(203)
习题 6	(206)
§ 7 多元函数的极值、最大值、最小值问题	(206)
习题 7	(211)
复习题七	(212)
第八章 重积分	(214)
§ 1 二重积分的概念与性质	(214)
习题 1	(218)
§ 2 利用直角坐标计算二重积分	(219)
习题 2	(226)
§ 3 利用极坐标计算二重积分	(227)
习题 3	(231)
§ 4 二重积分的应用	(232)
习题 4	(235)

§ 5 三重积分的概念及其算法	(235)
习题 5	(239)
§ 6 利用柱面坐标及球面坐标计算三重积分	(239)
习题 6	(242)
复习题八	(243)
第九章 曲线积分与曲面积分	(245)
* § 1 对弧长的曲线积分	(245)
习题 1	(247)
§ 2 对坐标的曲线积分	(248)
习题 2	(253)
§ 3 格林公式	(254)
习题 3	(260)
* § 4 曲面的面积 有向曲面	(261)
* § 5 对面积的曲面积分	(263)
习题 5	(265)
* § 6 对坐标的曲面积分	(266)
习题 6	(269)
* § 7 高斯公式	(270)
习题 7	(271)
复习题九	(271)
第十章 级数	(274)
§ 1 级数的概念和性质	(274)
习题 1	(277)
§ 2 正项级数及其审敛法	(278)
习题 2	(281)
§ 3 任意项级数及其审敛法	(281)
习题 3	(284)
* § 4 幂级数	(284)
习题 4	(288)
* § 5 函数展开成幂级数	(289)
习题 5	(293)
* § 6 傅立叶级数	(294)
习题 6	(300)
复习题十	(300)
第十一章 常微分方程	(303)
§ 1 微分方程的一般概念	(303)
习题 1	(305)
§ 2 可分离变量的微分方程 齐次方程	(306)

习题 2	(310)
§ 3 一阶线性微分方程及可降阶的高阶方程	(311)
习题 3	(315)
§ 4 二阶常系数齐次线性微分方程	(316)
习题 4	(319)
§ 5 二阶常系数非齐次线性微分方程	(319)
习题 5	(322)
复习题十一	(323)
第十二章 行列式	(325)
§ 1 二、三阶行列式	(325)
习题 1	(328)
§ 2 三阶行列式的性质	(329)
习题 2	(333)
§ 3 n 阶行列式	(334)
习题 3	(339)
§ 4 克莱姆法则	(341)
习题 4	(343)
复习题十二	(344)
第十三章 矩阵及其运算	(346)
§ 1 线性变换与矩阵的概念	(346)
习题 1	(348)
§ 2 矩阵的运算	(349)
习题 2	(357)
§ 3 几个特殊形式的矩阵	(358)
习题 3	(362)
§ 4 逆矩阵及其求法	(362)
习题 4	(371)
复习题十三	(373)
第十四章 矩阵的秩和线性方程组	(375)
§ 1 矩阵的秩	(375)
习题 1	(378)
§ 2 用矩阵的初等行变换解非齐次线性方程组	(379)
习题 2	(383)
§ 3 用矩阵的初等行变换解齐次线性方程组	(383)
习题 3	(386)
复习题十四	(387)
附录	(389)
习题答案	(406)

第一章 函数、极限、连续

高等数学的主要内容是微分学和积分学,而微分和积分的研究对象是函数,研究手段是极限方法,函数的连续性又保证了微分和积分的存在.本章在中学已学的函数、极限知识的基础上,进一步研究函数及其极限和连续性问题.

§ 1 变量与函数

一、常量与变量

在观察某种自然现象或技术过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,也就是保持固定的数值,这种量叫做常量;还有一些量在过程中是变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫做变量.例如,自由落体在下落过程中,它们所经过的路程 S 和速度 v 都随着时间 t 而变化,这里的路程 S 速度 v 和时间 t 都是变量,而它的重力加速度 g 不变,是个常量.

一个量是常量还是变量,要根据具体情况作出具体分析,例如,重力加速度 g ,就小范围区域来说,可以认为是常量,就大范围区域来说,则是变量.

常量通常用字母 a, b, c 等表示,变量用 x, y, z 等表示.

任何一个变量,总有一定的变化范围,例如,某天的最高温度是 8°C ,最低温度是 -6°C ,那么,这一天的气温 T 的变化范围就是 -6°C 到 8°C ,或者说 -6°C 到 8°C 是变量 T 的取值范围.

如果变量的变化是连续的,常用区间来表示变量的变化范围.关于区间的名称和记号,在中学数学中已经学过,这里不再重复.

以后,时常会遇到被称做邻域的一种开区间,其规定如下:

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的实数 x 的全体叫作点 a 的 δ 邻域,点 a 叫作这邻域的中心, δ 叫作这邻域的半径.

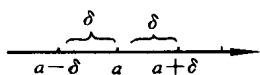


图 1-1

易知

$$|x - a| < \delta$$

$$\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta$$

$$\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta,$$

因此,以点 a 为中心的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$,如图 1-1.

二、函数概念

先看两个例子

例 1 自由落体下落的距离 S 和时间 t 的关系是

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

当 t 在其变化范围内变化时, S 也随之变化; t 有一确定值时, S 的值随之确定.

例 2 金属圆板的面积 A 与半径 r 的关系是

$$A = \pi r^2.$$

当圆板受热膨胀时, 半径 r 发生变化, 面积 A 也随之变化, 当 r 在其变化范围内有一确定值时, 面积 A 的值也就确定.

上述二例具有共同的本质, 那就是: 在某一变化过程中有两个变量, 其中一个发生变化, 另一个就跟着变化, 而且当其中一个取定了某个确定的值时, 另一个按着一定的法则总有确定的值和它对应. 这时我们说两个变量之间具有函数关系.

一般地, 函数的定义如下:

定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时, 变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数. 记作

$$y = f(x),$$

其中 x 叫自变量, y 叫因变量.

函数的定义包括三个内容:

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域.

如果自变量取某一数值 x_0 时, 函数有确定的值和它对应, 那么就说函数在 x_0 处有定义. 这时的函数值记作 $f(x_0)$. 因此函数的定义域可以说成是使函数有定义的实数的全体.

定义域不同, 函数就不同, 例如

$$y = 2\log_a x \quad \text{与} \quad y = \log_a x^2,$$

前者的定义域是 $(0, +\infty)$, 后者的定义域是 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$.

2. 对应关系

定义中“变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应”一语, 表明了 y 与 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的. 这个“一定的法则”就是 x 与 y 之间的对应关系, 即函数关系. 因此, 对应关系不同就是不同的函数; 给出 y 与 x 间的对应关系就是给出了函数.

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母 f 是表示 x 与 y 之间对应关系的, 也就是定义中的

“一定的法则”. 因此, 当同时考察几个不同函数时, 为了避免混淆, 就要用不同的字母来表示. 例如

$$y = x \quad \text{与} \quad y = \sqrt{x^2},$$

虽然定义域相同, 但对应关系不同, 仍是两个不同的函数. 如果同时讨论它们, 应当记作

$$y = f(x) = x \quad \text{与} \quad y = F(x) = \sqrt{x^2}.$$

3. 函数的值域

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I , 那么对于 I 中的每一个 x 值, 函数 y 就有确定的值 $f(x)$ 和它对应, 所有函数值的全体叫做函数的**值域**.

例如, $y=x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$;

$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[0, +\infty)$;

$y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[-1, 1]$.

此外, 对于函数的定义域还应注意的是: 自变量在定义域内任意取定一个数值时, “变量 y ……总有确定的数值和它对应”, 至于函数 y 有几个数值和自变量取定的那个数值相对应, 由概念的内涵可知, 至少一个, 多则不限. 如果对于自变量的每一个值, 函数都只有一个确定的值和它对应, 这种函数叫**单值函数**, 否则叫**多值函数**. 例如, $y^2=x$, 函数 y 在 $[0, +\infty)$ 内是 x 的双值函数, 即对于 x 的每一个数值, y 有两个数值和它对应.

在函数定义中, 并不要求在自变量变化时函数一定要变, 只要求有确定的函数值和它对应即可. 因此在此种意义下, 常量可以当作函数来看待, 即常量是这样一个函数, 它对于自变量的一切值来说, 函数恒取相同的数值, 其图像是平行于 x 轴的一条直线.

三、函数的表示法

常用来表示函数的方法有三种:

1. 公式法

这是用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法. 有些函数在其定义域内用一个式子就可完全表示, 有些函数在其定义域内要用几个式子才能完全表示. 后者称为**分段函数**, 例如,

$$y = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

又如,

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

其图形如图 1-2, 图 1-3.

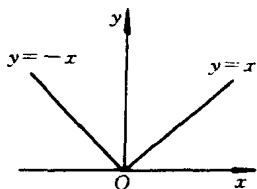


图 1-2

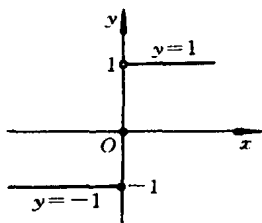


图 1-3

2. 表格法

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表,如平方表、对数表、三角函数表等等,这种表示函数的方法叫做表格法.

3. 图示法

在坐标系中用直线或曲线表示函数的方法叫图示法.

四、反函数及其图形

在自由落体运动中,我们选定时间 t 为自变量,距离 S 为函数,则距离 S 与 t 的函数关系为

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

我们也可以选取距离 S 作为自变量,而时间 t 作函数,这时 t 与 S 的函数关系式为

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

我们称 $t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$ 是 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 当然 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 也是 $t = \sqrt{\frac{2S}{g}}$ 的反函数,它们互为反函数.

一般地,设给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$,如果把 y 当作自变量, x 当作函数,则由 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数,而 $f(x)$ 叫直接函数.

习惯上,我们总是用 x 表示自变量, y 表示因变量,因此,把反函数 $x = \varphi(y)$ 改写为 $y = \varphi(x)$,称 $y = \varphi(x)$ 和 $y = f(x)$ 互为反函数.

例 3 求函数 $y = 2x - 1$ 的反函数,并在同一直角坐标系中作出它们的图形.

解 由 $y = 2x - 1$ 解出 x ,得所要求的反函数为

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2},$$

再改写为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

直接函数 $y=2x-1$ 的图形是通过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 与点 $(0, -1)$ 的直线, 而反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图形是通过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 与点 $(-1, 0)$ 的直线(图 1-4).

从图 1-4 可以看出, 直接函数 $y=2x-1$ 的图形与反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 这结论具有普遍的意义, 即我们可以证明: 反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$ (图 1-5).

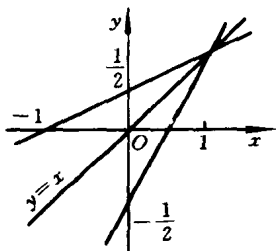


图 1-4

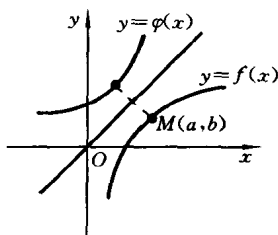


图 1-5

习题 1

1. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同? 为什么? 在哪一区间内它们是相同的?

(1) $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = 1$;

(2) $f(x) = \lg x^2$, $\varphi(x) = 2 \lg x$;

(3) $f(x) = x$, $\varphi(x) = (\sqrt{x})^2$;

(4) $f(x) = x$, $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

(2) $y = \sqrt{3x+4}$;

(3) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;

(4) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

(5) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$;

(6) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(7) $y = \frac{1}{\lg(1-x)}$;

(8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$.

3. 设 $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, 求函数值 $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(x_0+h)$.

4. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.

6. 设 $f(\frac{1}{x}) = x(1 + \sqrt{x^2 + 1})$, $x > 0$, 求 $f(x)$.
7. 若 $F(x) = x^2 + \cos x$, 证明 $F(x) = F(-x)$.
8. 若 $\varphi(x) = \sin x - 5x^3$, 证明 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.
9. 若 $\psi(x) = 2\sin x - 3\cos x$, 证明 $\psi(x + 2\pi) = \psi(x)$.
10. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

§ 2 函数的几种特性

一、函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, 函数 $f(x) = x^2$, 由于 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, 所以, $f(x) = x^2$ 是偶函数.

对于偶函数, 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以, 如果点 $M(x, f(x))$ 在函数图形上, 那么它的关于 y 轴的对称点 $M'(-x, f(x))$ 也在图形上, 因此, 偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-6).

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x , 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

容易看出, 奇函数的图形是关于原点对称的. 事实上, 因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以, 如果点 $N(x, f(x))$ 在函数图形上, 那么它的关于原点的对称点 $N'(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-7).

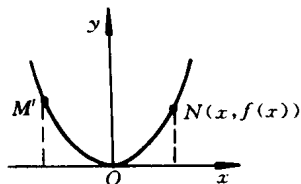


图 1-6

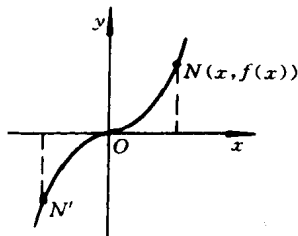


图 1-7

例 1 判断 $y = f(x) = \frac{1}{x}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, 所以 $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数.

例 2 判断 $y=f(x)=\tan x+\cos x$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\tan(-x)+\cos(-x)=-\tan x+\cos x$, 显然

$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

所以 $f(x)$ 既不是偶函数也不是奇函数, 这种函数称为非奇非偶函数.

例 3 判断 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

二、函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$, 如果存在不为零的常数 T , 使关系式

$$f(x+T) = f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 叫做 $f(x)$ 的周期. 一般我们所说的周期是指最小正周期.

例如, $\sin x, \cos x$ 是周期函数, 它的周期是 2π .

例 4 求 $y=f(x)=\sin \omega x$ 的周期.

解 因为 $\sin x$ 的周期为 2π , 所以

$$\begin{aligned} y=f(x) &= \sin \omega x = \sin(\omega x + 2\pi) \\ &= \sin \omega(x + \frac{2\pi}{\omega}) = f(x + \frac{2\pi}{\omega}), \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

三、函数的单调性

如果对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的; 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少的. 单调增加的或单调减少的函数统称为单调函数.

类似地, 可以定义无穷区间上的单调函数.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的; 单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的 (图 1-8).

例 5 判断函数 $f(x)=x^3$ 的单调性.

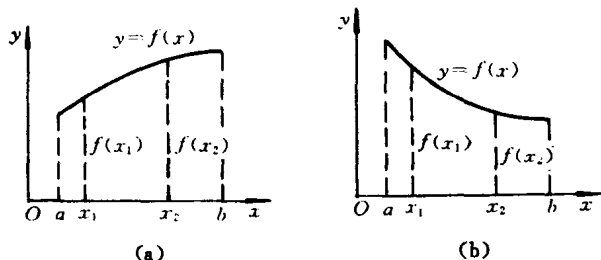


图 1-8

解 因为对于区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意两点 x_1, x_2 , 如果 $x_1 < x_2$, 则有

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例 6 判断函数 $y = x^2 + 1$ 的单调增减性.

解 对于任意两点 x_1, x_2 ,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

如果 $x_1 < x_2 \leq 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以在区间 $(-\infty, 0]$ 上函数是单调减少的;

如果 $x_2 > x_1 \geq 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以在区间 $[0, +\infty)$ 上函数是单调增加的.

因此函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

四、函数的有界性

设函数在区间 I 内有定义(I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域, 也可以只是定义域的一部分). 如果存在正的常数 M , 使得对于区间 I 内的任何 x 值, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是有界的; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 I 内是无界的.

例如, 取 $M \geq 1$, 那么在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 总有 $|\sin x| \leq M$, 所以, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 而函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的, 但在 $[\epsilon, +\infty)$ 上却是有界的, 这里 ϵ 是正数.

习题 2

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = \frac{1}{x^2}$;

(2) $y = x(x-1)(x+1)$;

- (3) $y=e^x$; (4) $y=\tan x$;
 (5) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$; (6) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.
 (7) $y=x^2(1-x^2)$; (8) $y=3x^2-x^3$;
 (9) $\cos(\sin x)$; (10) $y=3x^3-5\sin x$;
 (11) $y=\sin x-\cos x+1$; (12) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

2. 求下列函数的周期:

- (1) $y=\cos 4x$; (2) $y=1+\sin \pi x$;
 (3) $y=\sin^2 x$; (4) $y=\cos(\frac{1}{2}x+1)$.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 如果 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 试证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

§ 3 初等函数

一、基本初等函数

1. 幂函数

函数 $y=x^\mu$, 其中 μ 为任意实数, 叫幂函数, 它的定义域随 μ 的不同而不同. 但不论 μ 取什么值, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义, 且图形都通过点 $(1, 1)$.

$y=x^\mu$ 中, $\mu=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 是最常见的幂函数, 它们的图形如图 1-9 所示.

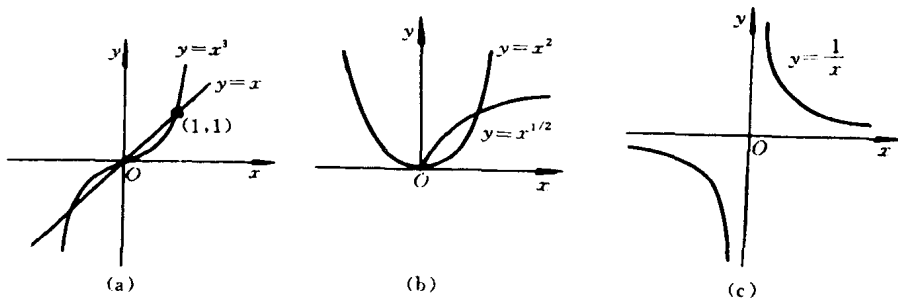


图 1-9

有些幂函数具有奇偶性. 例如 $y=x^2$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数, 而 $y=x^3$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数.

2. 指数函数

函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$ 叫做指数函数, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 因为恒有 $a^x > 0$, 及 $a^0=1$, 所以指数函数的图形总在 x 轴上方, 且通过点 $(0, 1)$.