70

21世纪数学系列教材（大专）
“九五”教育部重点教材

高等数学

（第三版）

吉林工学院数学教研室编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第三版)/吉林工学院数学教研室编
武汉:华中科技大学出版社, 2001 年 10 月
ISBN 7-5609-1224-9

Ⅰ.高…
Ⅱ.吉…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

高等数学(第三版)　　　　吉林工学院数学教研室编

责任编辑:龙纯曼　　　　封面设计:刘　卉
责任校对:陈元玉　　　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
　　武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:华中科技大学出版社照排室
印　刷:安陆市鼎鑫印务有限责任公司

开本:787×960　1/16　　印张:28　　字数:523 000
版次:2001 年 10 月第 3 版　印次:2002 年 8 月第 16 次印刷　印数:77 001—81 000
ISBN 7-5609-1224-9/O · 143　　定价:29.80 元

第三版前言

为适应我国高等教育发展的需要，使更多的学校采用本教材，我们根据一些兄弟院校提出的意见和《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》，对第二版内容进行一些修改和调整．删去概率数理统计部分，保留高等数学和线性代数两部分；增加了多元隐函数求导法、微分法在几何上的应用．重心和转动惯量、数项级数的审敛法等内容；对“＊”号内容也作了变动，如三重积分改为必学内容；针对原书例题习题偏少的不足，增编了 100 多道例题和近 600 多道习题，并增加“＊”号题的数量和难度，供选学．第三版的《高等数学》，将更便于教学和自学．

本书第三版由杜文思教授主编并增写有关内容，由赵健闯参加编写习题．

华中科技大学出版社编辑部对第二版的修改提出很多宝贵意见，特致衷心感谢．

编　者

2001 年 5 月

目　　录

第一章　函数、极限、连续

高等数学的主要内容是微分学和积分学，而微分和积分的研究对象是函数，研究手段是极限方法，函数的连续性又保证了微分和积分的存在. 本章在中学已学的函数、极限知识的基础上，进一步研究函数及其极限和连续性问题.

§1　变量与函数

一、常量与变量

在观察某种自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持固定的数值，这种量叫做**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做**变量**. 例如，自由落体在下落过程中，它们所经过的路程 S 和速度 v 都随着时间 t 而变化，这里的路程 S 速度 v 和时间 t 都是变量，而它的重力加速度 g 不变，是个常量.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析，例如，重力加速度 g，就小范围区域来说，可以认为是常量，就大范围区域来说，则是变量.

常量通常用字母 a,b,c 等表示，变量用 x,y,z 等表示.

任何一个变量，总有一定的变化范围，例如，某天的最高温度是 8℃，最低温度是 −6℃，那么，这一天的气温 T 的变化范围就是 −6℃到 8℃，或者说 −6℃到 8℃是变量 T 的取值范围.

如果变量的变化是连续的，常用**区间**来表示变量的变化范围. 关于区间的名称和记号，在中学数学中已经学过，这里不再重复.

以后，时常会遇到被称做**邻域**的一种开区间，其规定如下：

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体叫作点 a 的 δ 邻域，点 a 叫作这邻域的中心，δ 叫作这邻域的半径.

易知

$$|x-a|<\delta$$
$$\Longleftrightarrow -\delta<x-a<\delta$$
$$\Longleftrightarrow a-\delta<x<a+\delta,$$

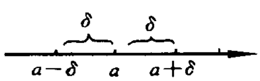

图 1-1

因此，以点 a 为中心的 δ 邻域就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，如图 1-1.

二、函数概念

先看两个例子

例 1 自由落体下落的距离 S 和时间 t 的关系是

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

当 t 在其变化范围内变化时，S 也随之变化；t 有一确定值时，S 的值随之确定.

例 2 金属圆板的面积 A 与半径 r 的关系是

$$A = \pi r^2.$$

当圆板受热膨胀时，半径 r 发生变化，面积 A 也随之变化，当 r 在其变化范围内有一确定值时，面积 A 的值也就确定.

上述二例具有共同的本质，那就是：在某一变化过程中有两个变量，其中一个发生变化，另一个就跟着变化，而且当其中一个取定了某个确定的值时，另一个按着一定的法则总有确定的值和它对应. 这时我们说两个变量之间具有函数关系.

一般地，函数的定义如下：

定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x **的函数**. 记作

$$y = f(x),$$

其中 x 叫**自变量**，y 叫**因变量**.

函数的定义包括三个内容：

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围叫做函数的**定义域**.

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有确定的值和它对应，那么就说函数在 x_0 处有定义. 这时的函数值记作 $f(x_0)$. 因此函数的定义域可以说成是使函数有定义的实数的全体.

定义域不同，函数就不同，例如

$$y = 2\log_a x \quad 与 \quad y = \log_a x^2,$$

前者的定义域是 $(0,+\infty)$，后者的定义域是 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$.

2. 对应关系

定义中“变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应”一语，表明了 y 与 x 之间的关系是按照一定的法则联系起来的. 这个“一定的法则”就是 x 与 y 之间的**对应关系**，即函数关系. 因此，对应关系不同就是不同的函数；给出 y 与 x 间的对应关系就是给出了函数.

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母 f 是表示 x 与 y 之间对应关系的，也就是定义中的

"一定的法则".因此,当同时考察几个不同函数时,为了避免混淆,就要用不同的字母来表示.例如

$$y=x \quad 与 \quad y=\sqrt{x^2},$$

虽然定义域相同,但对应关系不同,仍是两个不同的函数.如果同时讨论它们,应当记作

$$y=f(x)=x \quad 与 \quad y=F(x)=\sqrt{x^2}.$$

3. 函数的值域

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,那么对于 I 中的每一个 x 值,函数 y 就有确定的值 $f(x)$ 和它对应,所有函数值的全体叫做函数的**值域**.

例如,$y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $(-\infty,+\infty)$;

$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $[0,+\infty)$;

$y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $[-1,1]$.

此外,对于函数的定义域还应注意的是:自变量在定义域内任意取定一个数值时,"变量 y……总有确定的数值和它对应",至于函数 y 有几个数值和自变量取定的那个数值相对应,由概念的内涵可知,至少一个,多则不限.如果对于自变量的每一个值,函数都只有一个确定的值和它对应,这种函数叫**单值函数**,否则叫**多值函数**.例如,$y^2=x$,函数 y 在 $[0,+\infty)$ 内是 x 的双值函数,即对于 x 的每一个数值,y 有两个数值和它对应.

在函数定义中,并不要求在自变量变化时函数一定要变,只要求有确定的函数值和它对应即可.因此在此种意义下,常量可以当作函数来看待,即常量是这样一个函数,它对于自变量的一切值来说,函数恒取相同的数值,其图像是平行于 x 轴的一条直线.

三、函数的表示法

常用来表示函数的方法有三种:

1. 公式法

这是用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法.有些函数在其定义域内用一个式子就可完全表示,有些函数在其定义域内要用几个式子才能完全表示.后者称为**分段函数**,例如,

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

又如,

$$y=\begin{cases} 1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

其图形如图 1-2,图 1-3.

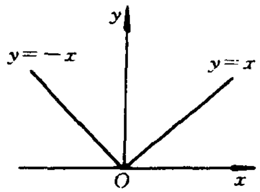

图 1-2

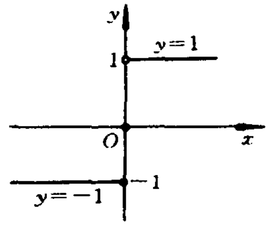

图 1-3

2. 表格法

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表,如平方表、对数表、三角函数表等等,这种表示函数的方法叫做**表格法**.

3. 图示法

在坐标系中用直线或曲线表示函数的方法叫**图示法**.

四、反函数及其图形

在自由落体运动中,我们选定时间 t 为自变量,距离 S 为函数,则距离 S 与 t 的函数关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

我们也可以选取距离 S 作为自变量,而时间 t 作函数,这时 t 与 S 的函数关系式为

$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}.$$

我们称 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$ 是 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的**反函数**. 当然 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 也是 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$ 的反函数,它们互为反函数.

一般地,设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,而 $f(x)$ 叫**直接函数**.

习惯上,我们总是用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此,把反函数 $x=\varphi(y)$ 改写为 $y=\varphi(x)$,称 $y=\varphi(x)$ 和 $y=f(x)$ 互为反函数.

例 3 求函数 $y=2x-1$ 的反函数,并在同一直角坐标系中作出它们的图形.

解 由 $y=2x-1$ 解出 x,得所要求的反函数为

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2},$$

再改写为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

直接函数 $y=2x-1$ 的图形是通过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 与点 $(0,-1)$ 的直线，而反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图形是通过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 与点 $(-1,0)$ 的直线（图 1-4）.

从图 1-4 可以看出，直接函数 $y=2x-1$ 的图形与反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 这结论具有普遍的意义，即我们可以证明：反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$（图 1-5）.

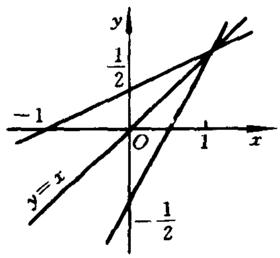

图 1-4

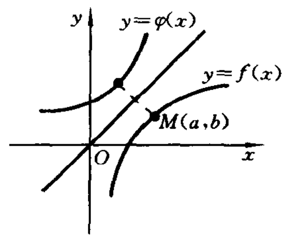

图 1-5

习题 1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同？为什么？在哪一区间内它们是相同的？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=1$；　(2) $f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=x$，$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$；　(4) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；　(2) $y=\sqrt{3x+4}$；

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(4) $y=\sqrt{x^2-1}$；

(5) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(6) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(7) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}$；　(8) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求函数值 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$，$f(x_0+h)$.

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3};\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(2)$.

6. 设 $f(\frac{1}{x})=x(1+\sqrt{x^2+1}), x>0$, 求 $f(x)$.
7. 若 $F(x)=x^2+\cos x$,证明 $F(x)=F(-x)$.
8. 若 $\varphi(x)=\sin x-5x^3$,证明 $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.
9. 若 $\psi(x)=2\sin x-3\cos x$,证明 $\psi(x+2\pi)=\psi(x)$.
10. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

§2　函数的几种特性

一、函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如,函数 $f(x)=x^2$,由于 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,所以,$f(x)=x^2$ 是偶函数.

对于偶函数,因为 $f(-x)=f(x)$,所以,如果点 $M(x,f(x))$ 在函数图形上,那么它的关于 y 轴的对称点 $M'(-x,f(x))$ 也在图形上,因此,偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1-6).

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任何 x,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

容易看出,奇函数的图形是关于原点对称的.事实上,因为 $f(-x)=-f(x)$,所以,如果点 $N(x,f(x))$ 在函数图形上,那么它的关于原点的对称点 $N'(-x,-f(x))$ 也在图形上(图 1-7).

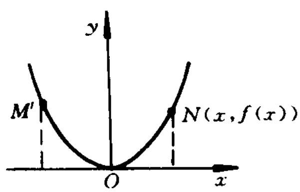

图 1-6

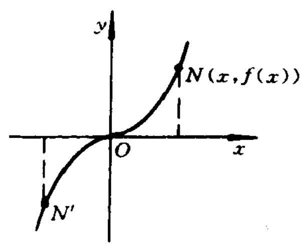

图 1-7

例 1　判断 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的奇偶性.

解　因为 $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$,所以 $y=\frac{1}{x}$ 是奇函数.

例 2 判断 $y=f(x)=\tan x+\cos x$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\tan(-x)+\cos(-x)=-\tan x+\cos x$,显然

$$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x).$$

所以 $f(x)$ 既不是偶函数也不是奇函数,这种函数称为非奇非偶函数.

例 3 判断 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

二、函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的常数 T,使关系式

$$f(x+T)=f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立,则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,T 叫做 $f(x)$ 的**周期**.一般我们所说的周期是指最小正周期.

例如,$\sin x$,$\cos x$ 是周期函数,它的周期是 2π.

例 4 求 $y=f(x)=\sin\omega x$ 的周期.

解 因为 $\sin x$ 的周期为 2π,所以

$$\begin{aligned}y=f(x)&=\sin\omega x=\sin(\omega x+2\pi)\\&=\sin\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})=f(x+\frac{2\pi}{\omega}),\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

三、函数的单调性

如果对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加的**;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少的**.单调增加的或单调减少的函数统称为**单调函数**.

类似地,可以定义无穷区间上的单调函数.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的;单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的(图 1-8).

例 5 判断函数 $f(x)=x^3$ 的单调性.

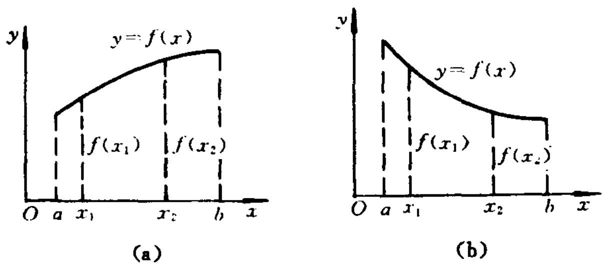

图 1-8

解 因为对于区间$(-\infty,+\infty)$上的任意两点 x_1,x_2,如果 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

例 6 判断函数 $y=x^2+1$ 的单调增减性.

解 对于任意两点 x_1、x_2,

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2).$$

如果 $x_1<x_2\leqslant 0$,则 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,所以在区间$(-\infty,0]$上函数是单调减少的;

如果 $x_2>x_1\geqslant 0$,则 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以在区间$[0,+\infty)$上函数是单调增加的.

因此函数在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

四、函数的有界性

设函数在区间 I 内有定义(I 可以是函数 $f(x)$的整个定义域,也可以只是定义域的一部分).如果存在正的常数 M,使得对于区间 I 内的任何 x 值,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 内是**有界的**;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$在 I 内是**无界的**.

例如,取 $M\geqslant 1$,那么在区间$(-\infty,+\infty)$内,总有 $|\sin x|\leqslant M$,所以,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内是无界的,但在$[\varepsilon,+\infty)$上却是有界的,这里 ε 是正数.

习题 2

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$;　　　(2) $y=x(x-1)(x+1)$;

(3) $y=e^x$; (4) $y=\tan x$;

(5) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$; (6) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

(7) $y=x^2(1-x^2)$; (8) $y=3x^2-x^3$;

(9) $\cos(\sin x)$; (10) $y=3x^3-5\sin x$;

(11) $y=\sin x-\cos x+1$; (12) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

2. 求下列函数的周期:

(1) $y=\cos 4x$; (2) $y=1+\sin\pi x$;

(3) $y=\sin^2 x$; (4) $y=\cos(\dfrac{1}{2}x+1)$.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,如果 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,试证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

§3 初等函数

一、基本初等函数

1. 幂函数

函数 $y=x^\mu$,其中 μ 为任意实数,叫**幂函数**,它的定义域随 μ 的不同而不同.但不论 μ 取什么值,幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义,且图形都通过点 $(1,1)$.

$y=x^\mu$ 中,$\mu=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 是最常见的幂函数,它们的图形如图 1-9所示.

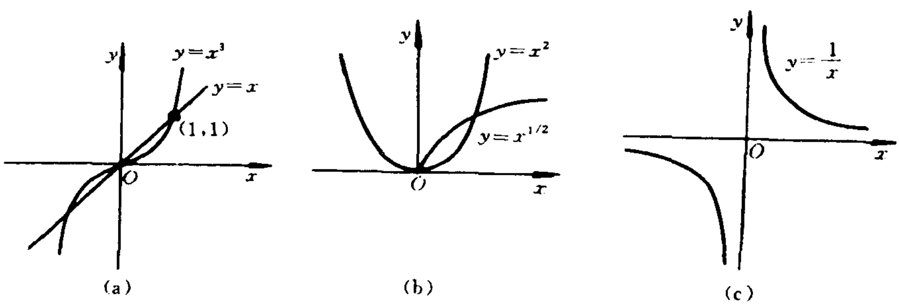

图 1-9

有些幂函数具有奇偶性.例如 $y=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数,而 $y=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数.

2. 指数函数

函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 叫做**指数函数**,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.因为恒有 $a^x>0$,及 $a^0=1$,所以指数函数的图形总在 x 轴上方,且通过点 $(0,1)$.