

外国教育译丛

中小學生数学能力心理学

〔苏〕克鲁切茨基 著

赵裕春 李文湑 杨 琦 李树珍 译
朱法良 杨玉英 王 琳

林宗基 校

教育科学出版社

一九八四年·北京

内 容 提 要

本书是苏联心理学家克鲁切茨基对中小学生学习数学能力的性质和结构进行长达十二年之久的研究报告。作者根据大量的实验材料,以信息加工的观点分析了数学能力不同的学生在解答数学问题时,收集、加工和保持信息这三个基本阶段上的心理活动特点;详细地介绍了他们使用的研究方法和用于测验学生数学能力的26个系列的实验题目;最后,还论述了有关数学能力成分中的类型、年龄、性别差异以及数学能力与个性的关系等问题。

本书可供我国高等学校教育心理学专业、心理学专业的师生,师范学校的师生,以及广大的中小学数学教师 and 研究人员参考。

外国教育译丛

中小学生学习数学能力心理学

(苏)克鲁切茨基 著

赵裕春 李文栖 杨琦 李树珍 译
朱法良 杨玉英 王琳
林宗基 校

教育科学出版社出版

(北京北环西路 10 号)

新华书店北京发行所发行

顺义燕华营印刷厂印装

开本850×1168毫米 1/32 印张13.5 字数349,000

1984年3月第1版 1984年4月第1次印刷

印数 1—20,000册

书号:7232·144 定价:1.50元

英译本编者序

一九六三年，在华盛顿举行的第十七届国际心理学会上，克鲁切茨基提出了一篇关于数学能力问题的短文（心理学报 23 [1964]:314—315），他的著作从此首次为西方心理学家和数学教育工作者所知道。同年，人们还在英文版的苏联教育心理学论文集（B.西蒙和J.西蒙主编，斯坦福大学出版社出版）看到了他的一篇题为《数学能力低的学生思维的某些特点》的论文。

人们对克鲁切茨基的著作之所以感兴趣，不仅因为他在苏联心理学家中似乎是唯一的研究数学能力个别差异问题的人，而且也因为他在研究中所使用的数学题目形式多样和富有创造性。六十年代后期，学校数学研究小组和近代东欧数学文献研究小组联合翻译出版了一套苏联数学教育方面的文献资料（苏联关于数学的学习与教学方面的研究报告）。编辑们对克鲁切茨基的著作颇感兴趣，因此，在这套丛书的第二卷里编入了他的四篇论文。

尽管克鲁切茨基的这些短篇论文和报告很有价值，但提供的仅仅是他研究的一部分。1968年初，出版了本书的俄文原著，其中包括了克鲁切茨基前十二年所做的理论与实验研究的全部报告。这是苏联关于学生数学能力问题的第一部心理学专著。这本莫斯科出版的专著是经苏联教育科学院心理研究所的科学委员会批准，并由国立莫斯科大学的数学教授、教育科学院副院长马尔库谢维奇和物理、数学博士勒文及教育科学博士卡巴诺娃-梅勒等人写了书评。全书共431页，第一版印了二万五千册。

本书是由大、中、小学的数学近代东欧文献研究小组和芝加哥大学的数学学会翻译的。在这里要特别感谢琼·泰勒尔，她精心地翻译和编辑了本书。另外，剑桥大学、大英博物馆、芝加哥大学、哥伦比亚大学师范学院的图书馆员，协助我们核对了参考

书目；芝加哥大学的札尔曼·尤斯斯金为原稿提出了意见；卡尔兰·基尔帕特里克阅读和打印了原稿；哈维·艾德尔伯格帮助我们做了编辑和行政工作；而斯坦福大学学校数学研究小组的前主任贝格尔，发起了导致这个计划的协作。在此，谨向他们表示谢意。

杰里米·基尔帕特里克

艾泽克·威里斯兹

作者俄文原版序言

这本书反映了从一九五五年以来关于中小学学生数学能力问题的理论与实验研究工作中的主要成果。我们必须强调，我们的工作严格的心理学研究。因而，无论现在和将来，我们既不想分析数学教学方法，也不想创造新的教学方法。我们深信，这不是心理学家的任务，而是数学研究者、教育学家和教学法专家们——即在有关领域里有资格的学者们的任务。当然，心理学家能够而且应该通过提供所需要的材料或对特定的问题进行心理学的研究来同他们合作。

今后我们准备在下述几方面继续开展我们的工作：

1. 与数学家们密切合作，研究最高级的数学创造能力（数学研究人员的能力）的结构。
2. 与生理学家合作，试图揭示数学能力的生理学本质。
3. 与教师和教学法专家一道，在先搞清现有的数学体系究竟能在何种程度上塑造学生的数学思维或数学能力之后，来研究形成和发展中小学学生数学能力的最佳方法。

本书在编写过程中遇到了很大的困难，其中主要的是在苏联的文献中缺乏关于能力心理学与教育学方面的科学研究。近些年来（大约自1959年以来）尽管人们对这个问题的兴趣有了显著的增长，并发表了一些在理论与实验方面都有价值的著作，但是，考虑到关于青少年在学习与发育成熟过程中，其能力的多方面发展问题在当前的重要意义，就感到这些研究还是很不足的。

希望本书能对心理学家、数学家、教师、数学教学法专家、研究生和各有关专业的大学生们有所帮助。但这并不意味着这本书就没有缺点，我们将愉快地接受读者们的任何评论、意见和建议，并认真地加以考虑。

本书经斯米尔诺夫教授，心理学家捷普洛夫和谢瓦列夫，教育科学(心理学的)博士卡巴诺娃-海勒和数学家马尔库谢维奇、勒文、安德罗诺夫和金教授等认真关注，并提出了宝贵的意见，作者谨向他们表示衷心的感谢。

(李树珍 译)

英译本编者前言

近几十年来，美国和其他西方国家的教育心理学家们，在研究上取得了很大的进展。这至少部分地是由于他们采用了在心理学或其他科学中被证明是有效的方法。当前，西方无论在研究或成果报告的水平上都取得了显著成就，其重要性是不可低估的。不过他们在研究方法上的进展并不是没有付出代价的。一些教育研究者已经开始提出了疑问，他们是否会由于过分推崇实验室实验而看不到一些重大的教育问题^①。

在数学能力的研究方面，几乎新近每一个研究课题的格式都大致相同：研究者收集一套假定与数学能力有某些关系的测验；在学龄儿童中取样进行测量，使每一个儿童在每一个测验上都得到一个分数；然后用因素分析的统计方法，从测验所得的这些分数之间的相关系数，来确定各测验的关系。如果测验的分数有较高的相关，就认为它们是测量同一种潜在能力的；如果没有相关，则认为是测量不同能力的。目的在于用少数的因素来解释这些测验分数，而每一种因素都代表着一种不同的能力。不同的因素分析方法可以产生不同的几组能力，但是不管在哪一种情况下，研究者的任务都是指明什么是这些测验的共有的东西，即指出相关系数高一点的因素，从而确定每一种能力。

因素分析是西方研究能力问题时所喜欢使用的一种方法。尽管在怎样用的问题上有争论，但却没有人否认它能够从一组的测验分数中抽出有用的信息^②。不过，问题就在于：为什么只限于

① 参见，例如，L.S.舒尔曼 (Lee.S.Shulman) 《教育研究的改造》·《教育研究评论》40(1970):371—96。

② 因素分析入门及其对研究能力的作用，参见 P.E.弗农 (Philip.E.Vernon): 《人类能力的结构》，第二版 (伦敦: Methuen, 1961年)。

测验分数？为什么要把测验分数假定为数学能力的唯一的、甚至是最好的信息来源？有了因素分析（更不用说在几秒钟之内就能完成必要计算的电子计算机了）真的就能使研究者看不到其他研究方法了吗？或许一个人需要通过考察跟自己没有共同传统的研究者的工作成果，才能对他的研究的偏见有点了解。

1936年，苏联共产党中央委员会曾经禁止使用心理测验，同时关于能力个别差异问题的研究也就停止了。在学校里，他们虽然还继续使用学业成绩测验，但却禁止教育工作者和研究人员使用其他别的测验。苏联的观点是：测验仅能提供当前状态的某种指标，而不能提供关于学生成就的潜在水平和他们解题时心理活动过程方面的信息。同时认为，测验鼓励给学生贴标签，并以此来确定他们在学习上应当得到什么和期待于他的又是什么的标准或范围，所以，这无疑会阻碍人们去探索有效的教学过程。

基于这种情况，苏联的教育心理学家们采用了另外的研究方法。他们为了对学生的心理活动过程获得一个更为清晰的概念，便向学生呈现一个问题，并要求他在解答问题时出声地思考；如果他解答不了这个问题，就给以暗示或改变题目。询问时，为了克服学生的紧张情绪，他们可以在几个月内重复这种询问，直到这个学生习惯于这种情景时为止。有时，学生的老师也可以作为询问人。他们研究学生掌握概念时，会整学期地呆在学校和教师们一起工作，设计一系列的课程，同时使用个别进行的成绩测验，再辅以询问去追踪研究学生的学习过程。这种方法经过几年的发展和完善，出现了一大批关于学生学习各种课程方面的研究^①。不过他们很少用它来探讨孩子们在如何思考和学习上的差异问题。

在过去的二十年里，苏联逐渐出现了一些关于能力个别差异问题方面的研究。虽然有不少人都同这个运动有关，但克鲁切茨

^① 梅钦斯卡娅《苏联教学心理学五十年》刊于《苏联在数学学习与教学心理方面的研究》卷I《数学概念的学习》，编者基尔帕特里克和威尔苏普第5—27页（斯坦福、加利福尼亚：学校数学研究小组，1969）。

名曰《个别差异》的论文中谈道：“人生来就是不平等的，并且也不能为人们提供使其平等的一定的教育和某种环境。”由此得出，不仅精神上是不平等的，而且社会环境和教育也同样是不平等的结论。1963年德国出版的一部著作中谈道：“才能是由先天的和天然的因素决定的，并且是各种领域中心理的和心理运动表现形式的潜在创造性素质”（鲍姆加滕）。

诚然，近来只有少数资产阶级心理学家公开宣扬那些毫无科学根据和反动本质十分明显的观点，而大多数人开始对此采取某种保留态度，特别是认识到了教育和教养的重要作用以及环境的作用。但是，他们认为这只不过是二种独立的、分别起作用的先天生物学特性和社会环境因素的的同时和平行影响的问题，或者前一种因素明显地占优势而社会环境的影响次之。遗传为发展规定了界限，而这种界限在任何条件下都是不能突破的。

当然，这种对于整个资产阶级心理学的谴责并不适用于每个研究者。例如，卡彭特在《关于创造性的性质和本质》一书中，主张所有学生都具有某一方面的创造能力，而只是教师的漫不经心妨碍了他们的发展。在每个儿童身上这些能力都能得到发展（尽管不是无限的）。教师的责任是去发现每一个儿童在哪一方面最能显示出他的创造能力。但是，我们再重复一句，这种观点在资产阶级心理学中是不具有代表性的。

正如民主德国的马克思主义心理学家罗森费尔德在他的一篇论文中正确指出的那样，“在资产阶级心理学中，不是用社会历史的原因，而是用生来不变的天赋能力来解释某些人的高尚和其他人的低下，而没有考虑到高度的文化知识是社会特权地位的结果。”罗森费尔德引用了资产阶级心理学家休伯特·沃尔特的研究，此人在调查了一万个人以后，发现上层社会中的百分之九十四点六的儿童是属于有天赋的*。

* 克鲁切茨基的引用是错误的，一万这个数字来自罗森费尔德所引用的其它研究，而这个百分数是指这些学生能上高级学校，而不是指有天赋学生的百分数。——英文版编者。

在近来的一些外国著作中，还能听到上述这些熟悉的观点。《差异心理学》这部重要著作的作者、美国心理学家阿纳斯塔西强调：“因为智力高的父母倾向有智力高的后代，所以上层社会的儿童应当是更聪明的。”她甚至提到种族之间的生物学的不平等；人类种族在他们的“基因频率”上是不同的。

为了“最大限度地利用人类资源”的目的（戈斯林），在资产阶级国家中（特别是在美国和英国）广泛流行着测验，以此作为研究心理禀赋的方法。《能力的研究》这部重要而概括的著作的作者戈斯林认为：“在过去的五十年里……测验确实已经成为美国文化的一部分。”他引用了一项观察结果，即“在苏联和美国为争夺世界霸权的抗衡中……美国的测验和指导技术可以成为我们的‘秘密武器’（能帮助我们超过苏联）。”

四十多年以前，施特恩指出当时“要做大量各种不同的测验是困难的”。但从此以后各种测验的数量明显地增加了。近年来出现了无数的论文和各式各样的测验。尽管测验法受到了较进步的资产阶级学者的尖锐批评，但是国外特别是美国和心理学的和教育学杂志，有关智力测验、特殊能力测验和成就测验的论文，测验结果的比较，试图找出预言未来成就的方法的分析，能力的诊断和预后的方法等等，简直把人弄得眼花缭乱。正如戈斯林指出的那样，“虽然关于测验的应用范围的报道是很少的，但是在美国每年仍然要由普通学校、大学、企业、机关，包括兵役站，对一亿五千万人到二亿五千万人进行各种不同的标准化能力测验，以便鉴定和挑选最合适的申请人”。

测验（这个词没有确切的俄语同义词）大约是在1905年首先由比奈开始进行的。比奈认为人类的心理发展是有可能进行测定和度量的，也是有可能根据人们的心理禀赋的程度进行分类（排列）的。测验开始被看作一种预测的诊断方法，“一种迅速决定人的个体价值的简便方法。”（施特恩）

必须说明，甚至那些直言不讳的测验鼓吹者们也从一开始就看出了它的严重缺点：“一定不要过高地估计心理测验，好象它

题目和关于视觉形象方面的题目。这些题目，无论对教师还是对从事研究的人来说都大有益处，因为人们既可以直接利用它，也可以把它作为同类型题的一些附加题来加以使用。

克鲁切茨基认为，解答数学题时的心理活动有三个基本阶段：收集解题所需要的信息；对信息进行加工，获得一个答案；然后把有关这个答案的信息保持下来。它的每一个阶段都和一种或多种能力相适应。数学上特别有能力的学生比能力差的学生能更好地立即抓住问题的实质。有能力的学生能迅速而容易地概括数学材料；在逻辑论证上则倾向于越过中间步骤，能容易地变换其他的解题方法，而且只要有可能便力求找出一个“漂亮的”答案；必要时，他们能容易地逆转思维的进程。最后，如果说有能力的学生和能力差的学生在数学记忆上也有某些差别的话，那么，前者偏于记忆题目中的关系和解题的原理，而后者则偏于记忆题目的具体细节。

克鲁切茨基坚决主张有所谓“有数学头脑”——即倾向以数学的方式来解释世界的人。在数学禀赋好的学生身上可以清楚地看到这一点。他还提到，这种倾向甚至在人一生下来就可能有所表现。他区分出三种数学头脑的基本类型：分析型（倾向以言语——逻辑的关系来思考）、几何型（倾向以视觉——形象的关系来思考）和调和型（兼具前两种类型的特征）。

克鲁切茨基在分析前述研究结果的基础上所做出的系统阐述，同他在第六章中所假设的那套特殊能力并没有多大差别。不过，他的主要材料来自于谈话法，也包括学生完成数学作业时所得到的分数（表明学生解题的质和量的那些分数）。由于苏联在教育研究上更喜欢用比较原始的分析材料的方法，所以，对克鲁切茨基利用因素分析法研究数学能力一事，颇感意外。不过他在使用上是人为的和有选择性的。他分析了假定是测量同种能力的一组测验之间的相关系数，并以单一的、共同具有的因素来证明某种能力被分离出来了，然后再继续搞另一组测验和重复做这样的证明。问题在于，他是以不同的方法来说明每组测验都共同具有的

一般因素。他在一次(包括所有测验的)分析中,从来没有证明,他所编制的那些组测验是和不同的因素联系的。举例来说,这些测验很可能有高度的相关,因而有一个因素——一般的心理能力——是所有这些测验的共同因素。这种可能性似乎很遥远,但克鲁切茨基的分析并没有排除这种可能。

读者应当看到,苏联的研究报告,就其完整性与客观性来说,尚未达到西方的标准。对克鲁切茨基所使用的因素分析,也要象对他的文献评论及其实验程序与结果所做的不完整报告那样加以估计:他并没有使自己的假设经受严格的实践检验;反之,他是用研究的结果与分析来支持他所要证明的论点——这是建立在先有的概念、直觉和在某种程度上尚属经验材料之上的论点。

那么,克鲁切茨基的报告有什么价值呢?可以毫不夸张地说,这本书对从事数学教育的人来说,和皮亚杰的著作有同样的影响力。正象皮亚杰的实验题目曾为教师和研究人員所改编和使用一样,克鲁切茨基的实验题目更接近于学校的数学课程,因而同样地能为教师和研究人員加以改编和使用;正如皮亚杰关于智力发展的概念曾使教育工作者认识到不同年龄儿童思维上的差异一样,克鲁切茨基关于数学能力结构的观念,能使他们认识到能力的不同组成和它们是怎样在共同起作用的;正象皮亚杰曾经扩大了我们关于什么是适当的研究方法的概念一样,克鲁切茨基则更进一步扩展了这个概念。

美国近二十年来所从事的学校数学课程改革,并没有在数学测验方面做出相应的改革。当前使用的最标准的数学测验,充其量也只做了少许的修订,教师也没能找到得以测量新教材要求发展的“较高级的认识能力”的有关方法。在这里,他们既没有努力去发展测验,也没有连续的研究方案,更没有提出基本理论,从而使数学教育工作者能把它作为一个基础,去理解究竟什么是较高级的认识能力,更不用说能使教师理解这些能力究竟是怎样发展起来的了。这本书中报告的研究成果,或许能帮助教育工作者和研究人員不再把那些测验分数作为能力的指标,并激发他

们去探索更有创造性的测量数学思维过程的方法。

J. 基尔帕特里克

I. 威尔苏普

(赵裕春 译)

目 录

英译本编者序	(1)
作者俄文原版序言	(3)
英译本编者前言	(5)
第一编 研究的问题和目的	(1)
第一章 数学能力问题在当代苏联科学和教育的理论与 与实践上的重要性	(1)
第二章 关于数学能力的国外心理学文献	(6)
第三章 十月革命前的俄国和革命后的苏联有关数学 能力的心理学文献	(50)
第四章 研究的问题和目的的说明	(64)
第二编 研究的方法及其组织	(87)
第五章 一般的方法和组织	(87)
第六章 关于数学能力组成成分的假说	(90)
第七章 实验研究所用的方法	(95)
第八章 研究中、小学生数学能力的实验题体系	(105)
第九章 实验研究的组织	(195)
第三编 中小学生学习数学能力结构的分析	(200)
第十章 关于中小学生学习数学能力组成成分的非实验 性材料的分析	(203)
第十一章 数学天才儿童的个案分析	(212)
第十二章 数学能力强的学生信息搜集(对问题的 最初定向)的特点	(249)
第十三章 数学能力强的学生解决问题时信息加工 的特点	(264)
第十四章 数学能力强的学生保持信息(数学材料) 的特点	(334)

第十五章	学生数学能力结构中的某些特殊问题……	(341)
第十六章	数学能力组成成分中的类型、年龄和性 别差异……	(353)
第十七章	数学能力和个性……	(391)
第十八章	关于数学能力结构的一般问题……	(398)
译后记	……	(413)

第一编 研究的问题和目的

第一章 数学能力问题在当代苏联科学 和教育的理论与实践上的重要性

在共产主义社会中，人的个性的全面、和谐的发展，要求对人从事某种活动的能力问题作出彻底科学的解释。对这个问题的详细阐述，无论在理论上，还是在实践上都有重要意义。在苏联心理学中，分析从事特定活动的能力结构及其形成、发展条件的有关理论，极为贫乏。在最近十年里，苏联心理学对这个问题的兴趣，虽有显著的增长，但这种状况，基本上没有什么改变。在资产阶级心理学中，这个问题并没有得到正确的解决，因为许多从事这方面工作的学者，甚至对能力性质的理解还是错误的。所以，解决能力问题，在我国仍有巨大的实践意义。恰当地安置全体人员，就意味着能人尽其才，而要达到这一点，就必须懂得如何去发现和培养人的潜在能力。

能力问题就是个别差异问题。如果每个人在各方面的发展和在从事任何活动上都有同样的能力，那么讨论能力问题也就没有意义了。我们谈论能力问题，就等于预先假定了人们之间有某些个别差异。没有一个人在任何事情上都是无能的，每个人都有最适宜于从事某种活动的能力——这是苏联心理学的基本观点之一——不过，同是从事一样的工作，也有能力水平上的差异。一个人可能在某些活动中更有能力，而在另一些活动中则较少有能力。说某人在某一领域里（不仅在音乐、舞蹈或美术上，而且也在数学上）无能，并不意味着，他无论在哪一方面都不行，都没才能；这只意味着，他的能力表现在其他别的方面。能力不是天

生的，是通过生活和劳动发展起来的。但这并不排斥需要把它搞清楚，并给予重视。

所有上述观点都可应用到学校的教育实践中去。苏联心理学家在下述观点上是一致的：所有儿童都能受教育；每一个心理上正常而健康的学生，都能接受中等学校的教育，掌握学校课程范围内的教材；教师一定要设法使所有的学生都达到这一点。正如莫斯科的教学法专家布达尔尼所说：“在学校的各种学科中，找不出任何一个单元能被证明是学生（指能力水平发展低的学生——作者注）不能接受的。”我也从未遇到过一个其水平低到不能读完普通中学的学生（指在普通学校接受教育的正常儿童）。有名的数学家、院士科尔莫戈罗夫的权威性说法是：“学习和领会数学所需要的特殊才能常常被夸大了……如果有好的指导或好的教材，普通的、一般人的能力对掌握学校所教的数学是绰绰有余的。”

但这决不意味着，所有的学生教起来会使人感到同样地容易。在这里，教师“付出的劳动”量完全不同。在组织得极好的教学方法的指导下，一个学生在一个领域里可能比在另一个领域里进步得更快、更有成绩。在一定的领域里，一些学生的成绩可能比另一些学生要好得多；而这种好成绩，主要地不仅有赖于学生的兴趣和爱好，也和学生的能力有关。一个学生可能没有付出特殊的努力和劳动，就在较短的时间内取得了很大的成就和进展；而另一个学生虽以最大的意志与努力也可能达不到那个水平，或者达到了，也极艰巨。在这个意义上，我们完全可以说，某个学生是比较有能力的，或是能力比较差的，而且完全可以使用这类词汇来描述学生在学习活动中的个别差异。不过，不论属于上述哪一类学生，他们都有潜能，都能掌握中学的课程，只是他们的“潜能”不同罢了。

当然，“潜能”不是固定不变的。教师切不可满足于仅仅认为儿童的不同成绩——譬如说，在数学上的成绩——是他们不同能力水平的反映。能力，自然不是某种命中注定或不能改变的东西。