工程数学

复变函数
学习方法指导书

陆庆乐 编

人民教育出版社

本书是配合我社出版的西安交通大学高等数学教研室编《工程数学——复变函数》教材1981年第二版的函授辅助教材. 按照课本各章的顺序分章编写,每章都分(一)引言,(二)基本要求,(三)对自学的建议,(四)补充说明与例题四部分. 每章末还配备了具有阶段测验性质的"自我检查题".

本书供按照上述课本学习的高等工业学校各专业函授学生和自学者阅读.

工程数学
复变函数
学习方法指导书
陆庆乐 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 4.625 字数 113,000
1982年10月第1版 1983年4月第1次印刷
印数 00,001—34,000
书号 13012·0814 定价 0.54 元

目　录

致 读 者

本指导书是为了配合函授学生自学工程数学中的《复变函数》部分① 而编写的．全书共分六章．每章的内容包括：(一)引言，(二)本章的基本要求，(三)对自学的建议，(四)补充说明与例题等四个部分，此外，在章末有自我检查题并在书末附有答案．

建议读者在开始自学每章的课文(指课本)之前，先阅读一下本指导书相应的章中的(一)、(二)、(三)三个部分——(一)“引言”中可能有初读不易理解的地方，可暂时放过．以便1)对本章内容以及一些有关的问题有一个大概的了解；2)明确学习要求；3)了解自学步骤．然后按照指导书中的第三部分“对自学的建议”阅读课文和与它配合的指导书中的第四部分“补充说明与例题”和做习题．在学完本章内容并做完自我检查题之后，回过头来再看一遍指导书中的“引言”部分．这样，可使对本章的主要内容理解得更加深刻并能对本章内容有一个比较总体的认识．在此基础上，读者可以写出(读者也可按照自己的情形采取其他方式)学习小结，包括基本概念、基本理论和基本方法，主要的定理、公式等．特别应当注意的是要把复变函数与实变函数在概念上、理论上和方法上进行对比，明察其相似之处与不同之处．

“补充说明与例题”中的小字部分有的是解题方法的扩充，有的是教材中某些定理或结论的补充证明，有的是大纲② 内容的引

① 配合西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》，人民教育出版社，1981年6月第二版．

② 指1981年12月教育部在石家庄召开的高等工业学校函授教学工作会议审订的《工程数学函授教学大纲》(草案)．

伸，有的是大纲以外内容的补充．对这些内容，我们一律不作要求，可以不读．但，如果时间允许，学有余力，阅读一下这些(或其中一部分)内容是有益的．顺便提一下：课本中有些内容前加了星号*或**，那是按照全日制工科大纲定的．由于函授大纲与全日制大纲微有出入，函授生应按照本指导书或函授教师指定的内容学习，而不要拘泥于有没有加星号．

在每章末都附有自我检查题，用以检查经过自学是否已经掌握了该章的主要内容，具有阶段测验性质．要在认真学完该章以后再做这些题目．如果在做这些题目时遇到困难，应当针对困难所在，再次阅读课文和指导书中与之有关的部分，尽量做到能够独立完成．

读者要学好本门课程，必须完成下列各个学习环节：

1) 在集中面授期间，要听好课堂讲授与参加习题课．

2) 在分散自学期间，要根据教学大纲与指导书中提出的要求，仔细阅读与深入钻研教材内容和指导书中的“补充说明与例题”．

3) 在弄清教材内容的基础上，作教材中指定的习题．最后作指导书中的自我检查题．

4) 在自学过程中遇到的疑难问题，经过努力思考，仍然无法解决的，应及时函请有关函授教师作书面解答，尽可能地做到勿使疑难问题积累过多，以免影响后面的学习．

以下就如何阅读教材、作读书笔记、做习题等问题，提一些建议：

1) 阅读课文时，先将每节通读一遍，以了解本节的主要内容．然后逐段细读，集中精力吃透内容，并逐个解决疑难问题．对基本概念必须正确理解，对基本理论必须彻底弄清，对基本方法必须完全掌握．一般说来，在未达到上述要求以前，不宜学习新的内容．

但如果有个别不阻碍学习新内容的细节问题，一时还不能解决，那就暂时把它放下，不要因此而止步不前，可以继续往下阅读．往往在你学习下一节时，有些问题可能就会得到解决．

在自学过程中，既要动脑思考问题，也要动手演算问题．因此要随时准备一张纸、一支笔把课文中与指导书中的定理证明、公式推导、例题计算等再重演一遍，把书中简化了的或未写出的计算部分加以补足．这样，可以加深和巩固对定理、公式的印象，也有利于了解推理与计算中的关键所在，训练作题的能力．课文和指导书中的例题是经过挑选的．所以在重演的过程中还要注意解题的思想方法，解题的条理性和书写格式．如能坚持不懈，对解题能力的培养必将产生良好的效果．

每个定理是由条件与结论两部分构成的．定理的条件在证明结论的过程中是必须用到的．因此在学习时要注意在证明的那些地方用到了这些条件．应用定理解题时，必须要求定理中的条件得到满足．不顾条件，任意滥用定理，必然会导致错误的结果．教材中有的定理，在本课程范围内不可能严格证明的，我们就不加证明，有的在加强条件下给出证明．有些比较简单的证明，作为习题由读者自己来完成．但不论证或不证，对教材中所有定理的涵意都应理解透彻，并能灵活运用．

2）在仔细阅读和钻研教材的同时，建议做好学习笔记．可记下定义、定理、公式、方法、重要例题等的要点以及定理、公式证明的主要步骤与关键等．可记下学习的心得体会和阅读参考书的札记等．笔记要记得整洁而有次序．尽量做到层次清晰、条理清楚．必要时要重新加以整理．对于定义、定理、重要结论可在行下用波纹线标志，公式可用方框框起．看起来眉目分明，一目了然．一本好的笔记，既有利于复习也有助于记忆和查阅．

3）在做习题前，必须先理解教材内容，切勿认为会做题就理

解了教材内容．解题时，要做到心中步步有理由，即要能够说出用到的定理、公式、结论等．有些关键性或不易看清的地方则要把理由、所用公式等指明．书写要求清楚、整洁．写错了也不要随意乱涂，可整齐地划去．每题必须演算出最后结果．一题可以做多种解法，然后加以比较．解题切忌先看答案．要在得出结果后再对答案．如果与书上的答案不符，应再作检查，弄清是解法上有错误还是只是形式上的不同．课文中的习题(指定要做的)，如果时间紧可以适当少做几题．

关于一般学习方法的指导，在《高等数学》的指导书中已经介绍得比较详细．《工程数学》的学习方法并无原则差异．因此就不再多说了．

诚恳地希望读者指出本书的缺点与错误，并提出改进意见．

编者　陆庆乐

1982 年 8 月于西安交通大学

第一章　复数与复变函数

（一）引言

我们知道，加法的逆运算是减法，乘法的逆运算是除法，正整数次乘方的逆运算是开方.

任意两个正整数相加，结果仍然是正整数．这就是说，在自然数系内，通过加法运算，所得的结果不会越出自然数系之外．但是在自然数系内，施行加法的逆运算——减法，结果就会越出自然数系的范围．只有我们把负整数与零并入自然数系之后，那末在这个新数系中减法才能永远可以施行．如果我们要使乘法的逆运算——除法(除数不为零)可以永远施行，就要引入正负分数才能完成．我们知道，正负整数、正负分数与零总称为**有理数**．所以在有理数系内，任意两个数进行四则运算(相除时，除数不为零)，结果不会越出有理数系，即仍然是有理数．但在有理数系内施行乘方的逆运算——开方，结果就会越出有理数系的范围．即使在最简单的开平方的情形，就会产生象$\sqrt{2}$等无理数及$2\sqrt{-1}$等纯虚数．有理数与无理数合称**实数**，而纯虚数则是**复数**的特例.

由上面所述，我们知道，为了使数学运算能够顺利地施行，数的概念有逐步扩充的必要，这包括实数系扩充到复数系的情形在内，在历史上，早在十六世纪中叶，G. Cardano①在研究一元二次方程时就引进了复数．他在研究把 10 分为两部分，使其乘积等于 40

① Girolamo Cardano (1501—1576)意大利数学家，他发表了解三次方程的公式.

这个问题时，得到方程 $x(10-x)=40$. 他发现这个方程没有实数根，并把这方程的两个根形式地记为 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$. 当时，包括他自己在内，谁也弄不清楚这样表示有什么好处. 事实上，复数自从被 Cardano 引进以后，在很长的一段时期内不为人们所理睬，并被认为是没有意义的，是不能接受的“虚数”. 直到十七世纪与十八世纪，随着微积分学的发明与发展，情况才有了改变. 特别是由于 L. Euler① 的研究结果，复数终于起了重要的作用. 例如大家所熟知的 Euler 公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 揭露了复指数函数与三角函数之间的关系. 然而一直要到 C. Wessel 和R. Argand② 将复数用平面向量或点来表示，以及 K. F. Gauss③与 W. R. Hamilton④定义复数 $a+ib$ 为一对有序实数 (a, b) 之后⑤，才消除了人们对复数的真实性的长久疑虑.《复变函数》这一数学分支到此才顺利地得到建立和发展.

（二）本章的基本要求

（1）复数的运算要熟练，并能灵活运用.

（2）牢固掌握和灵活运用复数的各种表示法.

---

① Leonhard Euler (1707—1783)是有巨大创造力的瑞士数学家，他几乎对当时各个数学领域都有影响. 在他有关代数与微积分的重要著作中包含了很多他自己的研究成果.

② Jean Robert Argand(1768—1822)法国数学家. 他的有关复平面的论文发表于 1806 年，比挪威数学家 Caspar Wessel(1745—1818)的类似论文晚 9 年，但是他们的工作都没有及时受到公众注意.

③ Karl Friedrich Gauss (1777—1855) 德国大数学家，他的工作对代数、数论、微分方程、微分几何、非欧几何、复分析、数值分析与理论力学都极为重要. 他并为复数的运用铺平了道路.

④ William Rowan Hamilton (1805—1865)爱尔兰数学家.

⑤ 关于用有序实数对来定义复数，可参看李锐夫，程其襄编《复变函数论》，人民教育出版社，1979 第二版，或普里瓦洛夫著，闵嗣鹤等译，《复变函数引论》，人民教育出版社，1956第 1 版，1978 第 17 次印刷.

（3） 正确理解：区域、单连域、多连域、简单曲线等概念.

（4） 正确理解复变函数及与之有关的概念.

（三） 对自学的建议

先阅读课文第一章的§1“复数及其代数运算”、§2“复数的几何表示”、§3“复数的乘幂与方根”. 然后阅读“补充说明与例题”（1）—（6），其中小字部分可以不读. 做习题1—15，16—20可以不做.

再阅读课文的§4“区域”、§5“复变函数”、§6“复变函数的极限和连续性”. 然后阅读“补充说明与例题”（7）—（9）. 做习题21—27，28—30可以不做.

最后做自我检查题（一）.

（四）补充说明与例题

（1） 复数的概念、运算以及复数的代数表示法、几何表示法、三角表示法与指数表示法等，在今后的讨论中将不断地用到. 虽然这些内容在中学已经学过，但仍应在原有的基础上进行复习提高，温故知新. 要熟练掌握，并能灵活应用.

由于实数是复数的特例，我们在规定复数代数运算时的一个基本要求是复数的运算法则施行于实数时，能够与实数运算的结果相符合. 读者只要在课文1—2页(1.1.1)—(1.1.3)中令y_1，y_2为零，就可以验证，我们对于复数的代数运算的规定是符合这一要求的. 同时也要求复数的代数运算能够满足实数的代数运算的一些基本定律（加法的交换律、结合律、乘法的交换律、结合律与对加法的分配律），以使实数运算法则与复数运算法则和谐一致. 类似这样的要求，在把任何数学概念推广时，都是应该满足的.

但是要注意，实数可以比较大小，而复数则不能比较大小. 例

如，我们无法说 $10000+10000i$ 和 $1+i$ 哪个大，虽然前者的模 $10000\sqrt{2}$ 比后者的模 $\sqrt{2}$ 大得多(不要忘记复数的模是实数!)。

(2) 要牢记任一复数 $z=x+iy$ 与复平面上一点 $P(x, y)$、向量 $\overrightarrow{OP}$ 之间的一一对应关系；并能熟练利用由于这种对应而产生的，复数的各种运算的几何意义．为此要仔细研读课文§2的例4和本章"补充说明与例题"的例3与例6．

一个复数 $z\neq 0$ 的辐角

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$$

是以正实轴为始边、$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角，它是多值的．z 的辐角的主值 $\arg z$ 是其中满足条件

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

的那一个．如果 θ_1 是 z 的任意一个辐角，那末 z 的任何一个辐角与 θ_1 之差必定是 2π 的整数倍，因为它们有相同的终边．特别，可以取 $\theta_1=\arg z$，就得到

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \tag{1}$$

其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$．此式表明，$z$ 的任意一个辐角与其主值之差为 2π 的整数倍．

读者应当验证，$\mathrm{Arg}z$ 的主值 $\arg z$ 用 $\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$ 的主值 $\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ 来表示时有如下的关系：

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{当}\quad x>0\quad y\gtreqless 0\\ \pm\dfrac{\pi}{2} & \text{当}\quad x=0\quad y\gtrless 0\\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}\pm\pi & \text{当}\quad x<0\quad y\gtrless 0\\ \pi & \text{当}\quad x<0\quad y=0\end{cases} \tag{2}$$

其中$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$.

例 1　求复数$-1-i$与$-1+3i$的辐角及其主值.

[解]　根据公式(1)与(2),我们有

$$\operatorname{Arg}(-1-i)=\arg(-1-i)+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

与
$$\arg(-1-i)=\operatorname{arctg}\frac{-1}{-1}-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$$

在计算后一式时要注意到点$-1-i$是在第三象限的(图 1.1(a)).从而

$$\operatorname{Arg}(-1-i)=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

同样,

$$\operatorname{Arg}(-1+3i)=\arg(-1+3i)+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

由于　$-1+3i$　在第二象限(图 1.1(b)),所以

$$\arg(-1+3i)=\operatorname{arctg}\frac{3}{-1}+\pi=\operatorname{arctg}(-3)+\pi$$

从而

$$\operatorname{Arg}(-1+3i)=\operatorname{arctg}(-3)+(2k+1)\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

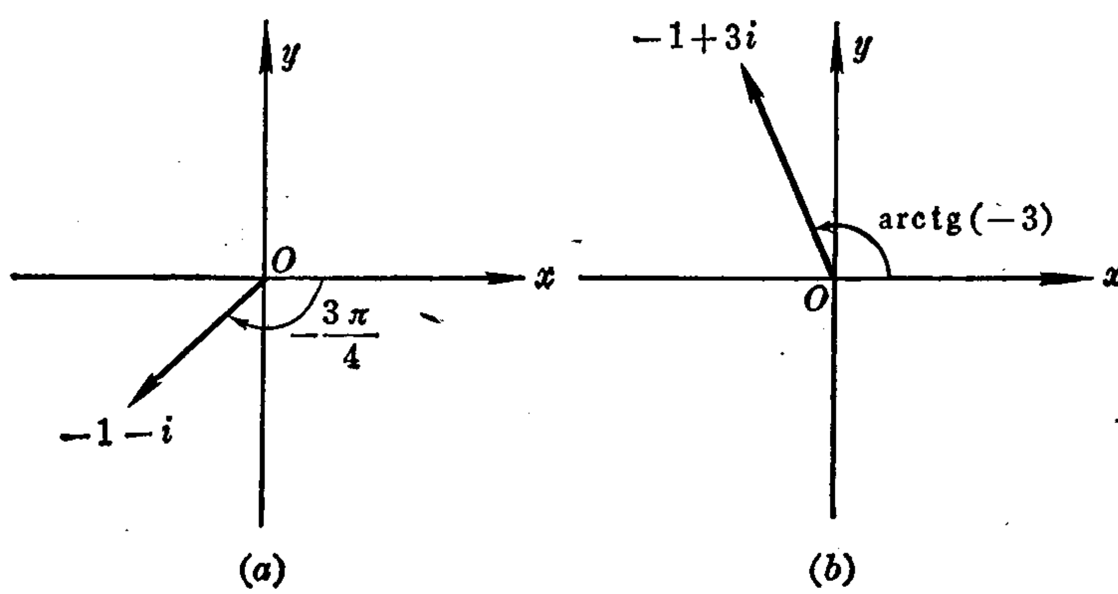

图 1.1

（3）要掌握复数 z 的各种不同表示式:

代数表示式: $z=x+iy$

三角表示式: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

指数表示式: $z=re^{i\theta}$

之间的相互转化. 应当指出，这里的 θ 不一定要取 $\mathrm{Arg}z$ 的主值 $\arg z$，任意取 $\mathrm{Arg}z$ 的一个值均可.

例 2　把复数 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha$, $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$ 化为三角表示式与指数表示式，并求 z 的辐角的主值.

［解］ $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha$

$$=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

因为 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$. 因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)<0$$

故

$$r=|z|=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

由于

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

从而得 z 的三角表示式:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

及指数表示式:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

注意，这里的辐角$\theta=\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$不是主值，因为

$$\frac{3\pi}{2}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{7}{4}\pi$$

但它只能与主值相差一个 2π 的整数倍，从上式容易看出，如果不等式的每项各加(-2π)，得

$$-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}$$

这个$-\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$就符合关于主值的要求了．因此 $\arg z=-\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$．如果 θ 取主值，那末 z 的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

（4）要正确理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式:

(3) $$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$$

(4) $$\operatorname{Arg}(z_1/z_2)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$$

这两个等式的意义都是：任意给定一个等式右端两个多值函数一对可能取的值，左端多值函数也必有一个值使这个等式成立．反过来说也对．

我们以(3)式为例说明其理由．设 θ_1、θ_2 是 $\operatorname{Arg}z_1$、$\operatorname{Arg}z_2$ 的预先给定的任意一对值．那末课文第 10 页的等式

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

总是成立的．因此 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$的任何值，比如说 θ，必须满足

$$\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2),\ \sin\theta=\sin(\theta_1+\theta_2)$$

由三角学知道，θ 与 $\theta_1+\theta_2$ 最多相差 2π 的某个整数倍，即 $\theta+2k\pi=\theta_1+\theta_2$（$k$ 是整数）. 但 $\theta+2k\pi$ 仍是 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的一个值. 反过来，设 θ 是 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的预先给定的任意一个值，θ_1、θ_2 是 $\mathrm{Arg}z_1$、$\mathrm{Arg}z_2$ 任意一对值. 那末仍旧有 $\theta+2k\pi=\theta_1+\theta_2$，即 $\theta=\theta_1+(\theta_2-2k\pi)$. 但是 θ_1、$(\theta_2-2k\pi)$ 也是 $\mathrm{Arg}z_1$、$\mathrm{Arg}z_2$ 的一对值.

简单地说："(3) 式[(4) 式也是一样]两端可能取的值的全体是相同的".

为了清楚起见，我们再以简单的具体例子来解释(3)的含义. 设 z_1 与 z_2 分别为 -1 与 $-i$，于是 $z_1z_2=i$. 根据公式(1)，有

$$\mathrm{Arg}z_1=\pi+2n\pi \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$\mathrm{Arg}z_2=-\frac{\pi}{2}+2m\pi \qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

把它们代入(3)，得到使(3)式成立的充分必要条件 $k=n+m$，可见这里的字母不是完全独立的. 但更值得注意的是：当其中两个（或一个）字母取得任意确定的值时，总可选择另一个（或两个）的值使 $k=n+m$ 成立. 例如任意取定 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 各一个值，比如说相应于 $n=0$ 与 $m=0$，那末

$$\mathrm{Arg}z_1=\pi, \qquad \mathrm{Arg}z_2=-\frac{\pi}{2}$$

于是

$$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

这时，我们只要取 $k=0$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\frac{\pi}{2}$，就能使(3)式成立（图 1.2 (*a*)）. 又如任意取定 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的一个值，比如取 $k=1$，那末

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\frac{\pi}{2}+2\pi$$

这时，我们既可取 $n=0$ 与 $m=1$，$\quad \operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2=\pi-\frac{\pi}{2}+2\pi$ $=\frac{\pi}{2}+2\pi$，从而(3)式成立(图 1.2(b))．而如果取 $n=1$ 与 $m=0$ 等等，(3)式也成立．

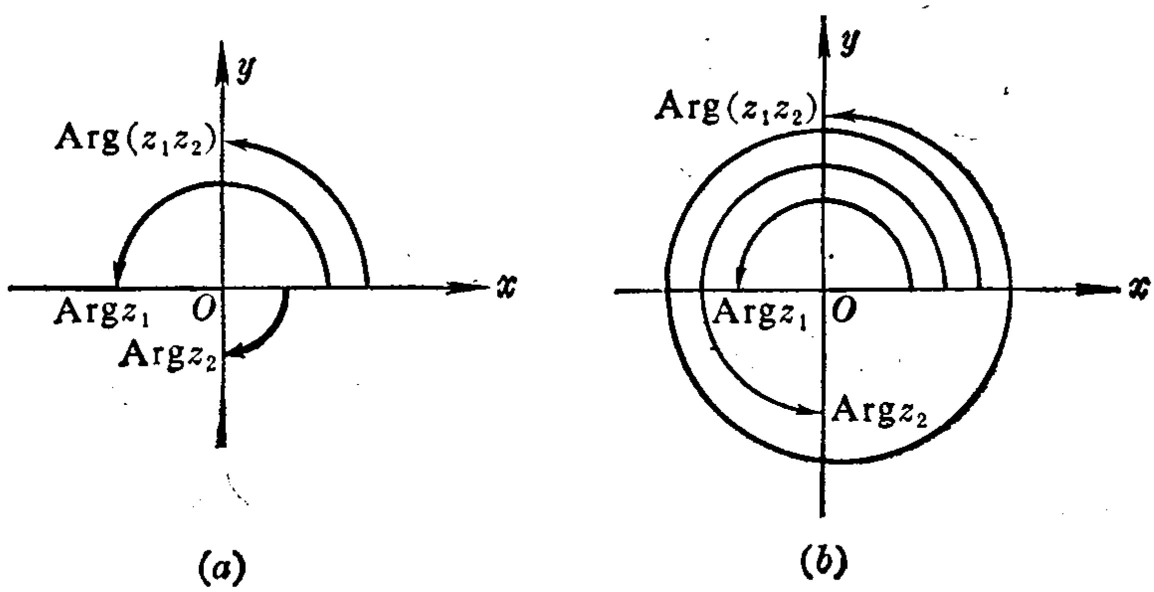

图 1.2

对(4)式可作类似的讨论．

另外，要牢记两个复数 z_1 与 z_2的乘积和商的模的公式：

(5) $$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$$

(6) $$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$$

利用公式(3)与(5)我们可以用几何方法作出两个复数 z_1 与 z_2 的乘积 z_1z_2 (图 1.3)．设对应于 z_1、z_2 与单位 1 的点分别为 P_1、P_2与U，OP_1与OP_2跟正 x 轴的交角 (自后者旋转到前者所转过的角，以逆时针方向为正) 分别为 θ_1 与 θ_2，那末 1 与$|z_1|$为$\triangle UOP_1$的夹 θ_1 角的两条邻边．由于 $z=z_1z_2$ 可写成 $1:z_1=z_2:z$，从而有

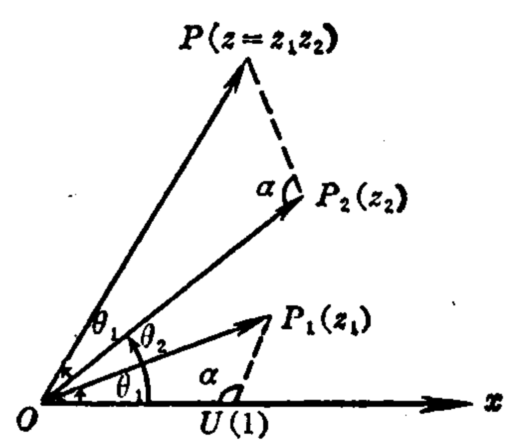

图1.3

$1:|z_1|=|z_2|:|z|$. 由此可见，如果作$\triangle UOP_1$的相似$\triangle P_2OP$，使$\angle P_2OP=\theta_1$，那末P点所对应的复数即为 $z=z_1z_2$. 因为根据相似三角形的对应角相等、对应边成比例的性质，我们有

(7) $$|z|=|z_1||z_2|$$

(8) $$\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

由(7)、(8)两式可知：复数 z_1 乘以复数 z_2，在几何上就相当于把 z_2 转过一个角度 $\arg z_1$，也可以是转 $\mathrm{Arg}z_1$ 的任意一个值(且以逆时针方向为正向)，并把 z_1 的长度伸长或压缩到$|z_2|$倍[从课文(11 页)中的公式 (1.3.3)：$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ 也容易看出此结果]. 这一结果在学习第六章保角映射时十分有用. 下面我们举一个应用这一结果的例子.

例3 设复数 a, b, c 对应于等边三角形的三个顶点，试证

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

[证] 由图 1.4 可知，向量 $\overrightarrow{ab}$转过$\frac{\pi}{3}$得到向量$\overrightarrow{ac}$，$\overrightarrow{bc}$转过$\frac{\pi}{3}$成为$\overrightarrow{ba}$. 并注意复数 $e^{i\frac{\pi}{3}}$的模为 1、辐角为$\frac{\pi}{3}$. 根据复数的乘法可见

$$c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

$$a-b=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)$$

由此得

$$(c-a)(c-b)$$
$$=(b-a)(a-b)$$

即 $$c^2-ac-bc+ab$$
$$=ab-a^2-b^2+ab$$

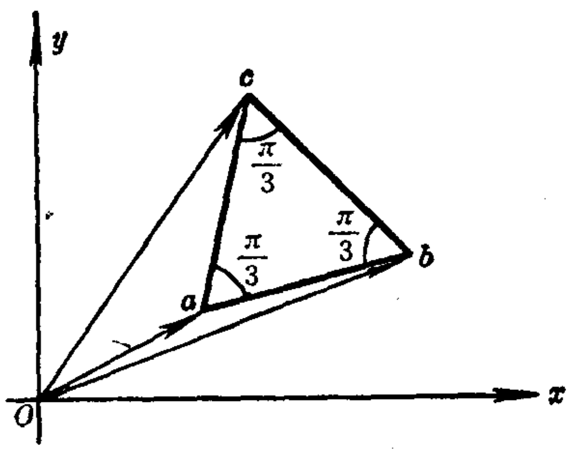

图1.4

故 $$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

注意：$\overrightarrow{ab}$表示 $b-a$，不是 $a-b$. $\overrightarrow{ab}$ 转过$\frac{\pi}{3}$得到 $\overrightarrow{ac}$，而$\overrightarrow{ac}$转过 $\frac{\pi}{3}$得到的不是 $\overrightarrow{ab}$，却是$\overrightarrow{bc}$(设想向量可以平行移动)，只有转过 $\frac{5\pi}{3}$