

工程师常用数学

● 方克敏 编著

● 陕西科学技术出版社

工程师常用数学

方立政

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 汉中地区印刷厂印刷

787×1092 开本 1/32 印张 15.23 字数 290,000

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数：1—4,050

统一书号：15202·08 定价：2.90元

序 言

数学作为一种工具，应用相当广泛，在工程技术方面亦不例外。譬如，为了解决某一工程技术问题，需要先将这一问题化作一个数学问题，叫做建立数学模型，从解决这个数学模型入手，使实际问题得到解决；或者数学模型已由别人建立起来，我们要按照此模型来作解答，从而使工程技术问题得到解决。当今，科学技术高速发展，更加需要复杂的数学工具解决工程技术中的实际问题。作为一个工程师，要自己的工作跟上时代的步伐，必须阅读大量的技术资料，了解世界技术的动向，这样就会碰到更多的数学问题，有时甚至是相当烦恼的数学问题。本书就是考虑到工程师所面临的这一现状，为他们进一步掌握数学基本理论和联系实际的方法提供一点帮助。

本书在写作上始终遵循如下原则：一是语言要通俗，力求把较深难的知识用通俗的语言描述出来。为了便于自学，列出了公式推导中的关键步骤；二是多介绍实例，从实例引出基本概念，进而介绍基本概念；三是在叙述基本概念的基础上，介绍解决实际问题的一些方法。能否真正掌握数学这一工具去解决实际问题，取决于对数学概念的透彻了解，取决于对所解问题的性质、条件有明确的认识和分析，这些绝非阅读一本书所能凑效的，应该多方面去学习，去实践。

本书在编写过程中，承蒙西安交通大学游兆永教授审阅

了初稿，并提出了宝贵意见，谨表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，错误和不妥之处可能不少，敬希读者批评指正。

编 者

于沙洲工学院

目 录

第一编 矢量分析及场论初步

引言

第一章 矢量代数

- § 1.1 矢量及其加法运算…………… (2)
- § 1.2 矢量的点乘积 (内积) …… (6)
- § 1.3 二矢量的矢量积…………… (7)
- § 1.4 三矢量的乘积…………… (9)

第二章 矢函数的微分与积分

- § 2.1 矢函数及矢端曲线…………… (14)
- § 2.2 矢函数的极限与连续…………… (17)
- § 2.3 矢函数的微分法…………… (22)
- § 2.4 导矢的简单力学意义…………… (29)
- § 2.5 矢函数积分…………… (33)

第三章 场论初步

- § 3.1 场的概念…………… (37)
- § 3.2 梯度…………… (41)
- § 3.3 矢量场的通量…………… (55)
- § 3.4 散度…………… (39)
- § 3.5 旋度…………… (76)
- § 3.6 梯度、散度、旋度的不变性…………… (38)

§ 3.7 梯度、散度、旋度在曲线坐标系中的表
达式……………(92)

§ 3.8 算子 ∇ 运算恒等式简表……………(100)

第四章 场论公式的初步应用

§ 4.1 几个典型的物理场……………(101)

§ 4.2 麦克斯韦方程组的微分形式……………(115)

§ 4.3 麦克斯韦方程组的一些应用……………(127)

第二编 复变函数

引言

第五章 复数

§ 5.1 复数的概念……………(125)

§ 5.2 复数的几何意义与表示方法……………(126)

§ 5.3 复数的运算……………(130)

§ 5.4 复数的方根……………(134)

§ 5.5 用复数表示电流、电压及阻抗……………(136)

第六章 复变函数

§ 6.1 区域……………(142)

§ 6.2 复变函数……………(150)

§ 6.3 复变数序列的极限……………(152)

§ 6.4 无穷远点、复数球面……………(154)

§ 6.5 函数的极限与连续……………(155)

§ 6.6 关于复变函数的应用问题……………(160)

第七章 解析函数(初论)

§ 7.1 复变函数导数的概念……………(160)

§ 7.2 函数在一个区域内解析的概念……………(163)

§ 7.3	函数解析的充分和必要条件	(165)
§ 7.4	解析函数的重要性质	(169)
§ 7.5	初等解析函数及其性质	(173)
§ 7.6	用解析函数处理平面场的初步方法	(188)
第八章 复变函数的积分		
§ 8.1	复变函数积分的定义及性质	(203)
§ 8.2	柯西定理	(212)
§ 8.3	复变函数的不定积分	(221)
§ 8.4	对数函数	(224)
§ 8.5	柯西公式	(226)
§ 8.6	解析函数的高阶导数	(230)
第九章 级数		
§ 9.1	复数项级数	(232)
§ 9.2	复变函数项级数	(235)
§ 9.3	幂级数、收敛半径及其求法	(241)
§ 9.4	解析函数的幂级数展开	(247)
§ 9.5	幂级数展开的唯一性问题	(254)
§ 9.6	幂级数展开的一些方法	(255)
§ 9.7	函数的罗朗展开	(263)
第十章 留数 (残数)		
§ 10.1	孤立奇点	(269)
§ 10.2	留数	(278)
§ 10.3	计算留数的一些方法	(280)
§ 10.4	留数在计算定积分中的应用	(283)
第十一章 保角变换		
11.1	保角变换的概念	(288)

11.2	保角变换的实际意义	(292)
11.3	初等函数的保角变换	(294)
11.4	儒可夫斯基函数	(323)
11.5	绕流问题	(328)
11.6	多角形映射	(344)
11.7	常用函数映射表	(363)

第三编 傅里叶变换与拉普拉斯变换

第十二章 傅里叶级数

§ 12.1	引言	(372)
§ 12.2	周期函数的傅里叶级数	(374)
§ 12.3	傅里叶级数的应用	(377)
§ 12.4	奇函数或偶函数的傅里叶展开	(386)
§ 12.5	在有限区间上有限函数的傅里叶级数	(389)
§ 12.6	傅里叶级数的指数形式	(392)

第十三章 傅里叶积分与傅里叶变换

§ 13.1	傅里叶积分	(397)
§ 13.2	几个简单函数的傅里叶变换及其频谱	(405)
§ 13.3	傅里叶变换的性质	(409)
§ 13.4	卷积(折积)	(415)
§ 13.5	常用函数傅里叶变换表	(422)

第十四章 拉普拉斯变换

§ 14.1	定义	(425)
§ 14.2	几个具体例子	(427)
§ 14.3	拉氏变换的基本性质	(428)
§ 14.4	某些间断函数的表示式及其拉氏变换	(437)

§ 14.5	拉氏变换用法练习	(441)
§ 14.6	拉氏变换的反演	(449)
§ 14.7	卷积	(455)
§ 14.8	拉氏变换应用举例	(459)
§ 14.9	常用连续函数拉氏变换表	(465)
§ 14.10	常用间断函数拉氏变换表	(469)

第一编 矢量分析及场论初步

引 言

场是矢量分析的基础。场，分为数量场与矢量场。从逻辑上来讲，数量场概念与数函数概念，在本质上没有什么区别。所谓数量场即对于空间的每一点 M ，对应某一函数值 $f(M)$ ，我们称 $f(M)$ 的总体为一个数量场。

矢量场的概念和矢函数的概念在本质上也是一样的。所谓矢量场即对于空间的每一点 P ，对应地确定某一矢量 $r(P)$ ，称 $r(P)$ 的全体为一个矢量场。

既然如此，为什么人们要用数量场、矢量场一词呢？人们沿用场这种术语，目的不是在于与函数相比，增添什么新的内容，而是强调这种概念自身的起源以及它的物理意义和几何意义。

比如，提到某一空间的温度场，人们立即考虑到在某一热源周围的温度分布；提到点电荷的静电场，人们立即便想象到点电荷周围分布的电力线，等位线，并且考虑到这两种曲线的直交图形；等等。现实中，具有这种具体物理意义的实例是很多的。

从数学表现的形式来看，它只不过是使用矢量形式对数值函数的导数或积分的一种重写。这样写的目的也只是为了在具体的物理现象上用起来更加方便罢了。

为了学习上的方便，本编先简略地复习矢量代数，然后给出矢函数的微分与积分的基本运算方法；再将数值积分的某些公式加以推广，用矢量形式表示出来，从而得到场论的基本公式；最后给出麦克斯韦方程的微分形式，并举出简单例子作为场论基本公式的一种应用。

第一章 矢量代数

§ 1.1 矢量及其加法运算

矢量：在力学、物理学以及其它一些学科中，我们常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，如速度，加速度，力，力矩等等，我们把这类量叫做矢量。

在数学上，我们用一个有向线段来表示从A到B的矢量，如图1—1，A为起点，B为终点，记作 \vec{AB} ，



图1—1

有时也用粗体字母A, B, a, i, ……来表示矢量。A, B, ……，读作矢量A, 矢量B等等。

自由矢量：与起点无关的矢量称为自由矢量。它可以在空间平行移动，数学上往往只研究这类矢量，因为自由矢量只就它的大小和方向来作运算，即可得到一般规律。

矢量的模：矢量的大小即有向线段的长度，叫做矢量的模。用符号 $|\vec{AB}|$ 或 $|\mathbf{A}|$ 来记。

二矢量相等：若 \vec{AB} 与 \vec{CD} 两矢量，大小相等，方向相同，我们称 \vec{AB} 等于 \vec{CD} ，记作 $\vec{AB} = \vec{CD}$ ，如图1—2。

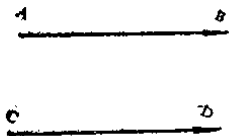


图 1-2

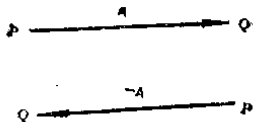


图 1-3

负矢量：设 $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$ 为一矢量， \overrightarrow{QP} 与 \vec{A} 的大小相等，但方向相反，则称 \overrightarrow{QP} 为 \vec{A} 的负矢量，记作 $-\vec{A}$ ，如图 1-3。

矢量的平行：若 \vec{A} ， \vec{B} 二矢量位于同一直线上或位于平行的二直线上，称 \vec{A} ， \vec{B} 为平行矢量。

单位矢量：长度为 1 的矢量称为单位矢量。

零矢量：起点与终点重合的矢量叫做零矢量，用 $\mathbf{0}$ 表示，零矢量的模为 0，方向任意。

矢量的加法：

设 \vec{A} ， \vec{B} ， \vec{C} 为矢量，并且在三维直角坐标系内，

$$\vec{A} = \{A_x, A_y, A_z\} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

$$\vec{B} = \{B_x, B_y, B_z\} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k},$$

$$\vec{C} = \{C_x, C_y, C_z\} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}.$$

其中 $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z, \dots$ 为 \vec{A}, \vec{B}, \dots 分别在 x, y, z 轴上的投影， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为 x, y, z 轴上的单位矢量。

设 m, n 为实数。我们定义矢量的加法运算如下：

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}, \quad (1 \cdot 1)$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} + (A_z - B_z)\mathbf{k}. \quad (1 \cdot 2)$$

$A \pm B$ 的几何意义如图 1—4 所示。

图中ABCD 为以矢量 A, B 为邻边的平行四边形，
 $\overrightarrow{AC} = A + B$ 为平行四边形的一条对角线。这种加法运算叫平行
 四边形法则，或者因为 $\overrightarrow{DC} = B$ ，所以 $A + B = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ，这
 叫三角形法则，如图 1—5。而 $A - B$ 是平行四边形的另一条
 对角线。

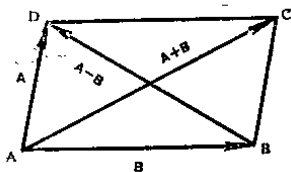


图 1—4

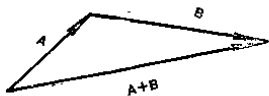


图 1—5

按照平行四边形法则或三角形法则，如果两个以上矢量
 相加，例如要求图 1—6 中的三矢量 A, B, C 之和 $A + B + C$ ，
 可先平移 B 矢量，使其起点与 A 的终点重合，再平移 C 矢
 量使其起点与 B 矢量的终点重合，然后联结 A 的起点 A 与 C 的终
 点 F ，得到矢量 \overrightarrow{AF} 即为所求之和矢量。照如上所说之方法，
 若有 n 个矢量相加，实际上最后得到的是一条联结第一矢量

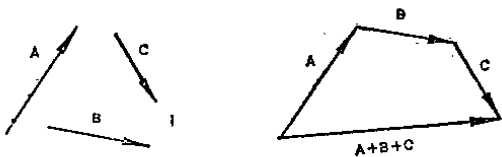


图 1—6

的起点与最末一矢量的终点的连线，这一条有向线段就是所求之和矢量。

加法运算符合下属法则

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad A \pm B &= B \pm A, \quad (\text{交换率}), \\ (2) \quad A \pm (B \pm C) &= (A \pm B) \pm C, \quad (\text{结合率}). \end{aligned} \right\} (1.3)$$

数量与矢量乘积及其法则：

一个实数 m 与一个矢量 A 相乘，得到矢量 mA ，叫做 A 的 m 倍，矢量 mA 的大小为

$$|mA| = |m| |A|,$$

即 A 的模增大或缩小 m 倍，它的方向为

$$mA \text{ 的方向: } \begin{cases} \text{与 } A \text{ 相同, 当 } m > 0 \text{ 时,} \\ \text{与 } A \text{ 相反, 当 } m < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

如图 1—7 所示。

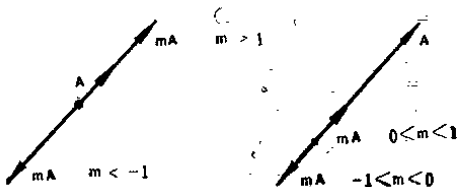


图 1—7

并且这种乘积满足

$$(1) \quad 1(A) = A,$$

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad m(n\mathbf{A}) &= (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A}), \\ (3) \quad (m+n)\mathbf{A} &= m\mathbf{A} + n\mathbf{A}, \\ (4) \quad m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= m\mathbf{A} + m\mathbf{B}. \end{aligned} \right\} (1.4)$$

矢量的模的计算公式:

若三维空间中矢量 \mathbf{A} 的坐标为 a_x, a_y, a_z , 则其模为

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.5)$$

从几何意义上来讲, 它即是以 a_x, a_y, a_z 为邻边 (长、宽、高) 的长方体的对角线的长, 如图 1-8。

若矢量 \mathbf{r} 的起点与坐标系的原点相重, 其投影为终点的坐标, 写成

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.6)$$

这时模为

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.7)$$

任一矢量 \mathbf{A} 可以表示成

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^\circ,$$

其中 \mathbf{A}° 叫 \mathbf{A} 的单位矢量, 从而

$$\mathbf{A}^\circ = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}. \quad (1.8)$$

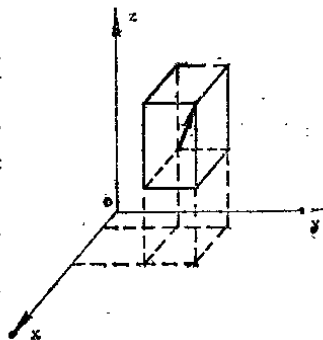


图 1-8

§ 1.2 矢量的点乘积 (内积)

两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的点乘积或内积, 记作 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}}), \quad (0 \leq \widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}} \leq \pi), \quad (1.9)$$

注意，点乘积结果为一数量，而不是矢量，故又叫数乘积，点乘积符合下列法则：

$$(1) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

$$(2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C},$$

$$(3) m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m,$$

$$(4) \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

$$(5) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

(6) 若

$$\mathbf{A} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{B} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

则

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

(7) 若 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ，其中 \mathbf{A} ， \mathbf{B} 均为非零矢量，则 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 互相垂直，反之亦然。

这就是说，二矢量 \mathbf{A} ， \mathbf{B} 垂直的必要充分条件是 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

§ 1.3 二矢量的矢量积

二矢量 \mathbf{A} ， \mathbf{B} 的矢量积为一个矢量 \mathbf{C} ，记作

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad (1.10)$$

矢量积定义的含意有三：

(1) 矢量 \mathbf{C} 垂直于 \mathbf{A} ， \mathbf{B} 所构成的平面，

(2) 按 \mathbf{A} ， \mathbf{B} ， \mathbf{C} 的顺序形成右手系 (图 1—9)，

(3) 其模 $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \sin(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}})$ ，

$$0 \leq \widehat{\mathbf{A}, \mathbf{B}} \leq \pi.$$

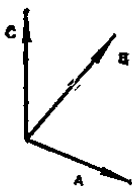


图 1—9

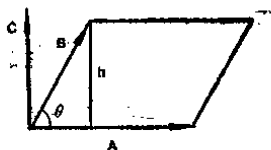


图 1—10

从几何意义来讲， C 的模表示以 A ， B 为邻边的平行四边形的面积，如图 1—10所示。而 C 的方向指向 A ， B 所在平面的正法线方向。

矢乘积具有下列性质：

(1) 若 $A \times B = 0$ ，且 A ， B 均非零矢量，则 A 与 B 平行，反之亦然，

$$(2) \quad A \times B = -B \times A,$$

$$(3) \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

$$(4) \quad m(A \times B) = (mA) \times B = A \times (mB) = (A \times B)m,$$

$$(5) \quad i \times i = j \times j = k \times k = 0,$$

$$(6) \quad i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j,$$

(7) 若

$$A = a_x i + a_y j + a_z k,$$

$$B = b_x i + b_y j + b_z k,$$

则

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$