工程师常用数学

方 [illegible] 政 编著

陕西科学技术出版社

工程师常用数学
方 立 政
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行 汉中地区印刷厂印刷
787×1092 开本1/32 印张15.25 字数290,000
1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷
印数：1—4,050
统一书号：15202·98 定价：2.90元

序　言

数学作为一种工具，应用相当广泛，在工程技术方面亦不例外。譬如，为了解决某一工程技术问题，需要先将这一问题化作一个数学问题，叫做建立数学模型，从解决这个数学模型入手，使实际问题得到解决；或者数学模型已由别人建立起来，我们要按照此模型来作解答，从而使工程技术问题得到解决。当今，科学技术高速发展，更加需要复杂的数学工具解决工程技术中的实际问题。作为一个工程师，要使自己的工作跟上时代的步伐，必须阅读大量的技术资料，了解世界技术的动向，这样就会碰到更多的数学问题，有时甚至是相当烦恼的数学问题。本书就是考虑到工程师所面临的这一现状，为他们进一步掌握数学基本理论和联系实际的方法提供一点帮助。

本书在写作上始终遵循如下原则：一是语言要通俗，力求把较深难的知识用通俗的语言描述出来。为了便于自学，列出了公式推导中的关键步骤；二是多介绍实例，从实例引出基本概念，进而介绍基本概念；三是在叙述基本概念的基础上，介绍解决实际问题的一些方法。能否真正掌握数学这一工具去解决实际问题，取决于对数学概念的透彻了解，取决于对所解问题的性质、条件有明确的认识和分析，这些绝非阅读一本书所能凑效的，应该多方面去学习，去实践。

本书在编写过程中，承蒙西安交通大学游兆永教授审阅

了初稿，并提出了宝贵意见，谨表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，错误和不妥之处可能不少，敬希读者批评指正。

编　者
于沙洲工学院

目　　录

第一编　矢量分析及场论初步

第二编 复变函数

第一编　矢量分析及场论初步

引　言

场是矢量分析的基础。场，分为数量场与矢量场。从逻辑上来讲，数量场概念与数函数概念，在本质上没有什么区别。所谓数量场即对于空间的每一点M，对应某一函数值f(M)，我们称f(M)的总体为一个数量场。

矢量场的概念和矢函数的概念在本质上也是一样的。所谓矢量场即对于空间的每一点P，对应地确定某一矢量r(P)，称r(P)的全体为一个矢量场。

既然如此，为什么人们要用数量场、矢量场一词呢？人们沿用场这种术语，目的不是在于与函数相比，增添什么新的内容，而是强调这种概念自身的起源以及它的物理意义和几何意义。

比如，提到某一空间的温度场，人们立即考虑到在某一热源周围的温度分布；提到点电荷的静电场，人们立即便想象到点电荷周围分布的电力线，等位线，并且考虑到这两种曲线的直交图形；等等。现实中，具有这种具体物理意义的实例是很多的。

从数学表现的形式来看，它只不过是用矢量形式对数值函数的导数或积分的一种重写。这样写的目的也只是为了在具体的物理现象上用起来更加方便罢了。

为了学习上的方便，本编先简略地复习矢量代数；然后给出矢函数的微分与积分的基本运算方法；再将数值积分的某些公式加以推广，用矢量形式表示出来，从而得到场论的基本公式；最后给出麦克斯韦方程的微分形式，并举出简单例子作为场论基本公式的一种应用。

第一章　矢量代数

§1.1　矢量及其加法运算

矢量：在力学、物理学以及其它一些学科中，我们常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，如速度，加速度，力，力矩等等，我们把这类量叫做矢量。

在数学上，我们用一个有向线段来表示从A到B的矢量，如图1—1，A为起点，B为终点，记作$\overrightarrow{AB}$，

图1—1

有时也用粗体字母$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{a}$，$\mathbf{i}$，……来表示矢量。$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，……，读作矢量$\mathbf{A}$，矢量$\mathbf{B}$等等。

自由矢量：与起点无关的矢量称为自由矢量。它可以在空间平行移动，数学上往往只研究这类矢量，因为自由矢量只就它的大小和方向来作运算，即可得到一般规律。

矢量的模：矢量的大小即有向线段的长度，叫做矢量的模。用符号$|\overrightarrow{AB}|$或$|\mathbf{A}|$来记。

二矢量相等：若$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$两矢量，大小相等，方向相同时，我们称$\overrightarrow{AB}$等于$\overrightarrow{CD}$，记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，如图1—2。

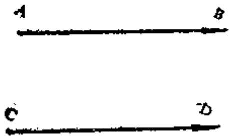

图 1—2

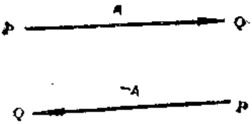

图 1—3

负矢量：设 $\mathbf{A}=\overrightarrow{PQ}$ 为一矢量，$\overrightarrow{QP}$ 与**A**的大小相等，但方向相反，则称$\overrightarrow{QP}$为**A**的负矢量，记作$-\mathbf{A}$，如图 1—3。

矢量的平行：若**A**，**B** 二矢量位于同一直线上或位于平行的二直线上，称**A**，**B**为平行矢量。

单位矢量：长度为 1 的矢量称为单位矢量。

零矢量：起点与终点重合的矢量叫做零矢量，用**0**表示，零矢量的模为0，方向任意。

矢量的加法：

设**A**,**B**,**C**为矢量，并且在三维直角坐标系内，

$\mathbf{A}=\{A_X, A_Y, A_Z\}=A_X\mathbf{i}+A_Y\mathbf{j}+A_Z\mathbf{k}$，

$\mathbf{B}=\{B_X, B_Y, B_Z\}=B_X\mathbf{i}+B_Y\mathbf{j}+B_Z\mathbf{k}$，

$\mathbf{C}=\{C_X, C_Y, C_Z\}=C_X\mathbf{i}+C_Y\mathbf{j}+C_Z\mathbf{k}$。

其中A_X，A_Y，A_Z，B_X，B_Y，B_Z……为**A**，**B**，……分别在x，y，z 轴上的投影，**i**，**j**，**k**分别为x，y，z轴上的单位矢量。

设 m，n为实数。我们定义矢量的加法运算如下：

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_X+B_X)\mathbf{i}+(A_Y+B_Y)\mathbf{j}+(A_Z+B_Z)\mathbf{k}, \quad (1\cdot 1)$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=(A_X-B_X)\mathbf{i}+(A_Y-B_Y)\mathbf{j}+(A_Z-B_Z)\mathbf{k}. \quad (1\cdot 2)$$

$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$的几何意义如图 1 — 4 所示。

图中ABCD 为以矢量$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$为邻边的平行四边形，$\overrightarrow{AC}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$为平行四边形的一条对角线。这种加法运算叫平行四边形法则，或者因为 $\overrightarrow{DC}=\mathbf{B}$，所以$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$,这叫三角形法则，如图 1 —5。而$\mathbf{A}-\mathbf{B}$是平行四边形的另一条对角线。

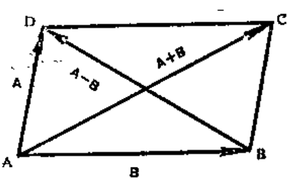

图 1 — 4

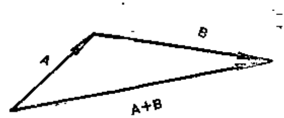

图 1 — 5

按照平行四边形法则或三角形法则，如果两个以上矢量相加，例如要求图 1 — 6 中的三矢量$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$之和$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$,可先平移$\mathbf{B}$矢量，使其起点与$\mathbf{A}$的终点重合，再平移$\mathbf{C}$矢量使其起点与$\mathbf{B}$矢量的终点重合，然后联结$\mathbf{A}$的起点A与$\mathbf{C}$的终点F，得到矢量$\overrightarrow{AF}$即为所求之和矢量。照如上所说之方法，若有n 个矢量相加，实际上最后得到的是一条联结第一矢量

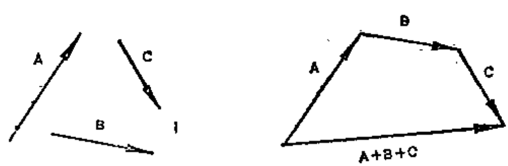

图 1 — 6

的起点与最末一矢量的终点的联线，这一条有向线段就是所求之和矢量。

加法运算符合下属法则

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ \mathbf{A}\pm\mathbf{B}=\mathbf{B}\pm\mathbf{A},\ \text{（交换率）},\\&(2)\ \mathbf{A}\pm(\mathbf{B}\pm\mathbf{C})=(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})\pm\mathbf{C},\ \text{（结合率）}.\end{aligned}\right\}(1\cdot3)$$

数量与矢量乘积及其法则：

一个实数m与一个矢量**A**相乘，得到矢量 m**A**，叫做**A**的m倍，矢量m**A**的大小为

$$|m\mathbf{A}|=|m||\mathbf{A}|,$$

即**A**的模增大或缩小m倍，它的方向为

$$m\mathbf{A}\text{的方向：}\begin{cases}\text{与}\mathbf{A}\text{相同，当}m>0\text{时，}\\\text{与}\mathbf{A}\text{相反，当}m<0\text{时，}\end{cases}$$

如图 1—7 所示。

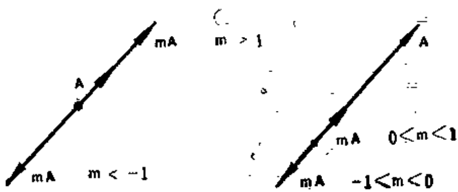

图1—7

并且这种乘积满足

(1) $1(\mathbf{A})=\mathbf{A}$,

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & m(nA)=(mn)A=n(mA), \\ (3) & (m+n)A=mA+nA, \\ (4) & m(A+B)=mA+mB. \end{array}\right\} \quad (1\cdot4)$$

矢量的模的计算公式：

若三维空间中矢量A的坐标为a_X，a_Y、a_Z，则其模为

$$|A|=\sqrt{a_X^2+a_Y^2+a_Z^2}. \quad (1\cdot5)$$

从几何意义上来看，它即是以a_X，a_Y，a_Z为邻边（长、宽、高）的长方体的对角线的长，如图1—8。

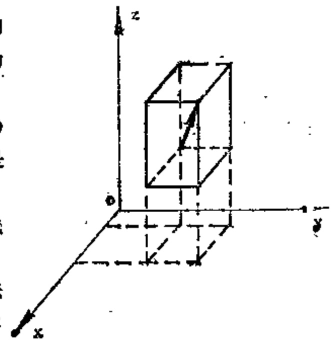

图1—8

若矢量r的起点与坐标系的原点相重，其投影为终点的坐标，写成

$$r=xi+yj+zk, \quad (1\cdot6)$$

这时模为

$$|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \quad (1\cdot7)$$

任一矢量A可以表示成

$$A=|A|A^\circ,$$

其中A°叫A的单位矢量，从而

$$A^\circ=\frac{A}{|A|}. \quad (1\cdot8)$$

§1.2 矢量的点乘积（内积）

两个矢量A和B的点乘积或内积，记作A·B定义为

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}),\quad (0\leqslant\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}\leqslant\pi)\,, \tag{1·9}$$

注意，点乘积结果为一数量，而不是矢量，故又叫数乘积，点乘积符合下列法则：

（1） $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$,

（2） $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$,

（3） $m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m$,

（4） $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$,

（5） $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$,

（6） 若

$$\mathbf{A}=a_X\mathbf{i}+a_Y\mathbf{j}+a_Z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{B}=b_X\mathbf{i}+b_Y\mathbf{j}+b_Z\mathbf{k},$$

则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=a_Y b_X+a_Y b_Y+a_Z b_Z,$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}^2=a_X^2+a_Y^2+a_Z^2,$$

（7） 若$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$，其中$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$均为非零矢量，则$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$互相垂直，反之亦然。

这就是说，二矢量$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$垂直的必要充分条件是$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$。

§1.3 二矢量的矢量积

二矢量$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$的矢量积为一个矢量$\mathbf{C}$，记作

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}. \tag{1·10}$$

矢量积定义的含意有三：

（1） 矢量$\mathbf{C}$垂直于$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$所构成的平面，

（2） 按$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$的顺序形成右手系（图1—9），

（3） 其模$|\mathbf{C}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\sin(\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}})$，

$$0\leqslant\widehat{\mathbf{A},\mathbf{B}}\leqslant\pi.$$

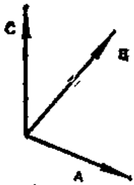

图 1 — 9

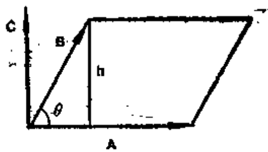

图 1 —10

从几何意义来讲，C的模表示以A，B为邻边的平行四边形的面积，如图 1 —10所示。而C的方向指向A，B所在平面的正法线方向。

矢乘积具有下列性质：

（1）若$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$，且A，B均非零矢量，则A与B平行，反之亦然，

（2）$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$，

（3）$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$。

（4）$m(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(m\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(m\mathbf{B})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})m$。

（5）$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$，

（6）$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$，$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$，$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$，

（7）若

$$\mathbf{A}=a_X\mathbf{i}+a_Y\mathbf{j}+a_Z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B}=b_X\mathbf{i}+b_Y\mathbf{j}+b_Z\mathbf{k},$$

则

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_X & a_Y & a_Z\\ b_X & b_Y & b_Z\end{vmatrix}.$$