

高等学校教材

# 高等数学

(基础部分)

上册

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

高等学校教材



高等数学

(基础部分)

上册

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

本书是以西安交通大学高等数学教研室于1959年编写的高等数学讲义为基础,根据1962年5月审訂的高等工业学校本科五年制各类专业适用的“高等数学(基础部分)教学大纲(試行草案)”改編的。

全书分上、下两册出版。上册内容为:平面解析几何(包括行列式)、一元函数的微积分学。

参加本书编写和定稿工作的有陆庆乐(主編)、赵孟养、邵济煦、馬知恩等同志。本书由侯希忠、王元吉同志初审后,又經高等工业学校高等数学課程教材編审委员会复审。

本书可作为高等工业学校“高等数学”課程試用教科书。

## 高等数学

(基础部分)

上册

---

西安交通大学高等数学教研室編

北京市书刊出版业营业許可證出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

---

統一书号五13010·1135 开本 850×1168  $\frac{1}{32}$  印张 11  $\frac{13}{16}$

字数 303,000 印数 0,001—16,000 定价(5) ¥1.10

1964年8月第1版 1964年8月北京第1次印刷

# 上册目录

## 第一篇 平面解析几何

第一章 坐标法、曲线与方程	1
1-1 实数与它的绝对值	1
1-2 有向线段	4
1-3 数轴	6
1-4 投影定理	7
1-5 平面直角坐标系	9
1-6 两点之间的距离	10
1-7 定比分点	11
1-8 曲线的方程	13
1-9 方程的图形	16
1-10 两曲线的交点	19
第二章 直线	21
2-1 直线方程的斜截式	21
2-2 直线方程的一般式	23
2-3 直线方程的其他形式	24
2-4 二直线的交角	27
2-5 二直线平行与垂直的条件	29
2-6 点与直线之间的距离	34
2-7 必要与充分条件	36
第三章 行列式	38
3-1 二元线性方程组与二阶行列式	38
3-2 三元线性方程组与三阶行列式	40
3-3 三阶行列式的主要性质	46
3-4 四阶行列式	50
3-5 齐次线性方程组	52
第四章 圆锥曲线	56
4-1 圆	56
4-2 椭圆	58
4-3 双曲线	63
4-4 抛物线	68

4-5	圆锥曲线	71
4-6	坐标变换	74
4-7	一般二元二次方程	78
<b>第五章</b>	<b>极坐标、参数方程</b>	<b>83</b>
5-1	平面极坐标系	83
5-2	极坐标方程的建立与讨论	84
5-3	极坐标与直角坐标的关系	89
5-4	曲线的参数方程	93
5-5	参数方程的建立	95
<b>第二篇 一元函数的微积分学</b>		
<b>第六章</b>	<b>函数概念</b>	<b>101</b>
6-1	一元函数的定义	101
6-2	函数的表示法	105
6-3	显函数与隐函数	108
6-4	函数的简单性态	109
6-5	反函数及其图形	112
6-6	复合函数概念	115
6-7	基本初等函数与初等函数	116
6-8	一些简便的函数作图法	119
<b>第七章</b>	<b>极限概念、连续函数</b>	<b>122</b>
7-1	数列与它的简单性态	122
7-2	数列的极限	125
7-3	收敛数列的有界性	129
7-4	数列没有极限的情况	130
7-5	数列极限的一条存在准则	131
7-6	数列极限的有理运算	134
7-7	自变量无限趋大时的函数极限	136
7-8	自变量趋近有限值时的函数极限	139
7-9	函数极限的运算法则及存在准则	143
7-10	无穷大量与无穷小量	148
7-11	无穷小的比较	152
7-12	函数的连续性	154
7-13	间断点	157
7-14	连续函数的性质	159
7-15	初等函数的连续性	163
<b>第八章</b>	<b>导数与微分</b>	<b>165</b>

8-1	物理学中的一些概念	165
8-2	导数的定义	168
8-3	导数的几何意义	173
8-4	平面曲线的切线与法线	175
8-5	函数的可导性与连续性	177
8-6	函数的和、差、积、商的导数	179
8-7	复合函数的导数	182
8-8	反函数的导数	185
8-9	双曲及反双曲函数	188
8-10	初等函数的求导问题	192
8-11	隐函数的求导, 对数求导法	193
8-12	微分概念	195
8-13	微分公式, 微分形式不变性	198
8-14	微分在近似计算中的应用	200
8-15	高阶导数	203
8-16	参数方程的求导问题	206
8-17	极坐标方程的求导问题	208
第九章	导数的应用	210
9-1	微分学中值定理	210
9-2	函数增减的判定, 函数的极值	214
9-3	关于最大、最小值的应用问题	220
9-4	函数图形凹向的判定, 拐点	225
9-5	渐近线	230
9-6	函数作图问题	232
9-7	不定式问题	234
9-8	泰勒公式	242
9-9	一些基本初等函数的泰勒公式	246
9-10	方程近似解问题	249
9-11	曲线的弧长	255
9-12	曲率概念	257
9-13	曲率圆	261
第十章	定积分与不定积分	266
10-1	两个有关定积分的问题	266
10-2	定积分的定义与存在定理	270
10-3	定积分的一些性质	274
10-4	积分学中值定理	278
10-5	原函数与不定积分	281

10-6 牛頓-萊布尼茲公式	284
第十一章 积分法, 旁义积分	288
11-1 积分法要旨	288
11-2 換元积分法	291
11-3 分部积分法	300
11-4 不能用初等函数表达的积分	306
11-5 有理函数的积分	307
11-6 三角函数的有理式的积分	315
11-7 一些简单无理函数的积分	317
11-8 积分表的使用	319
11-9 近似积分法	322
11-10 两种旁义积分	327
11-11 旁义积分存在的准则, $\Gamma$ 函数	332
第十二章 定积分的应用	339
12-1 平面图形的面积	339
12-2 已知平行截面的立体体积	343
12-3 平面曲线的长度	345
12-4 定积分应用大意	350
12-5 液体压力	353
12-6 功	355
12-7 引力	357
附 录	359
I 簡明积分表	359
II 一些常用的曲线	366

# 第一篇 平面解析几何

## 第一章 坐标法. 曲线与方程

在中学里,代数与几何是两門各自独立、很少联系的課程。紧密地把代数与几何结合起来,这就产生了解析几何。說得更明确一些,解析几何是要应用代数的方法,即所謂解析法,来进行几何的研究;而反过来,也就可以借助于几何的概念來說明代数的性质。

促成代数与几何的这样一种結合的,就是坐标法。我們知道,代数运算的基本对象是数,几何图形的最基本元素是点,通过坐标法,我們却使这两者发生了紧密的联系。

**1-1 实数与它的绝对值。** 在高等数学这門課程中,所牵涉到的数,主要都是实数。关于实数的概念在中学代数里已有闡述。我們知道,整数(包括正整数、負整数及零)与分数(包括正分数及負分数)总称有理数;任何有理数可以化为有限小数或无限循环小数。所謂无理数就是指无限不循环小数。如果按照一定法則(例如用开方法計算 $\sqrt{2}$ )能够求出一个无理数任何数位上的数字,这无理数即作为已知。有理数与无理数統称实数。

我們又知道,任意取两个实数,都可以比較它們的大小。在实数的集合中进行有理运算,即加、减、乘、除四种运算,結果仍是实数。但是我們不能用零作为除数,因为这样做是毫无意义的。

在中学代数里也讲过实数的绝对值:正数的绝对值就是它的本身,負数的绝对值是跟这个負数符号相反的正数,零的绝对值还是零。換句話說,設 $|a|$ 表示实数 $a$ 的绝对值,我們有



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0, \\ -a, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

由这一定义, 对任意实数  $a$  可以推得下面两个结果:

(I) 不等式

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

恒成立;

(II) 如果  $A \geq 0$ , 而  $-A \leq a \leq A$ , 那末  $|a| \leq A$ ; 反过来也对.

[证] (I) 当  $a \geq 0$  时, 由定义,  $a = |a|$ . 因此, 有

$$-|a| \leq a = |a|$$

成立. 当  $a < 0$  时, 由定义,  $a = -|a|$ . 因此, 有

$$-|a| = a < |a|$$

成立. 所以不等式  $-|a| \leq a \leq |a|$  恒成立.

(II) 当  $a \geq 0$  时, 由定义并根据所假定的不等式  $-A \leq a \leq A$ , 有  $|a| = a \leq A$ , 即  $|a| \leq A$ . 当  $a < 0$  时, 由定义并用  $-1$  乘所假定的不等式, 则有  $|a| = -a \leq A$ . 亦即  $|a| \leq A$ .

反过来, 从  $|a| \leq A$ , 得  $-A \leq -|a|$ . 再根据(I), 便有

$$-A \leq -|a| \leq a \leq |a| \leq A,$$

即

$$-A \leq a \leq A.$$

此外, 对  $a, b$  两个任意实数, 我们还有下列关于绝对值的几个主要性质:

1° 两个实数之和的绝对值不大于各数的绝对值之和, 即

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

[证] 根据(I), 我们有

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

把这两个不等式的两端分别相加,得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

由(II),即得欲证的结果:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

这个不等式不难推广到  $n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

例 1.  $|-3+2-5| = |-6| = 6 < |-3| + |2| + |-5| = 3+2+5=10.$

2° 两个实数之差的绝对值不小于各数的绝对值之差:

$$|a-b| \geq \begin{cases} |a| - |b|, \\ |b| - |a|. \end{cases}$$

[证] 由于  $a = (a-b) + b$ , 根据性质 1°, 得

$$|a| \leq |a-b| + |b|,$$

即

$$|a-b| \geq |a| - |b|;$$

而把  $a, b$  对调, 则得

$$|a-b| = |b-a| \geq |b| - |a|.$$

例 2.  $|-3-2| = |-5| = 5 > |-3| - |2| = 3-2=1.$

性质 1°, 2° 中的等号只有在各数同号时成立.

3° 两个实数之积的绝对值等于各数的绝对值之积:

$$|ab| = |a||b|.$$

这个关系式也不难推广到  $n$  个实数.

4° 两个实数之商的绝对值等于各数的绝对值之商:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

最后这两个性质从乘法与除法的符号规则便可以直接推出.

**1-2 有向线段.** 在一条直线  $L$  上任取两点  $A$  与  $B$ . 我们从中学几何知道这样在  $L$  上介于  $A$  与  $B$  之间的部分(图 1.1)就叫做线段.



图 1.1

在中学几何里, 对线段只考虑它的长度, 因此把线段  $AB$  与  $BA$  当作是相同的. 但在有些几何问题与力学问题中,

线段方向的规定对问题的研究也是重要的. 例如我们把  $AB$  看作是一个质点从起点  $A$  运动到终点  $B$  的位移,  $BA$  从起点  $B$  运动到终点  $A$  的位移, 那末  $AB$  与  $BA$  就具有不同的意义, 它们的方向是相反的.

规定了方向的线段称为有向线段. 为便于与无向线段区别起见, 我们暂且用字母上加一道横线来表示有向线段. 我们把方向是由  $A$  指向  $B$  的有向线段记作  $\overline{AB}$ , 于是  $\overline{BA}$  的方向是由  $B$  指向  $A$ , 适与  $\overline{AB}$  相反.  $\overline{AB}$  的起点是  $A$ , 终点是  $B$ ; 而  $\overline{BA}$  的起点是  $B$ , 终点是  $A$ . 我们把长度相同方向相反的两个有向线段  $\overline{AB}$  与  $\overline{BA}$  之间的关系, 记作

$$\overline{AB} = -\overline{BA}. \quad (1)$$

起点与终点重合的有向线段称为零线段<sup>①</sup>, 记作  $0$ , 即  $\overline{AA} = 0$ .

关于有向线段相加, 我们规定: 对于直线  $L$  上的任意三点  $A, B, C$ , 不论它们的位置如何, 所形成的有向线段  $\overline{AB}$  与  $\overline{BC}$  之和是有向线段  $\overline{AC}$  (图 1.2), 即

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \quad (2)$$

这个公式称为有向线段的结合法则.

当  $C$  重合于  $A$  时, 有

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \quad (3)$$

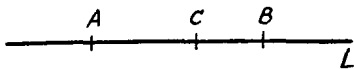


图 1.2

根据结合法则, 如果在直线  $L$  上有  $n$  个点  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ , 容易推得

① 零线段的方向不定.

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}. \quad (4)$$

現在讓我們把有向綫段与数联系起来。我們給任意直綫  $L$  以方向，在直綫的两个方向中取定一个作为直綫的正方向，用箭头指出，如图 1.3。这种有方向的直綫称为有向直綫。

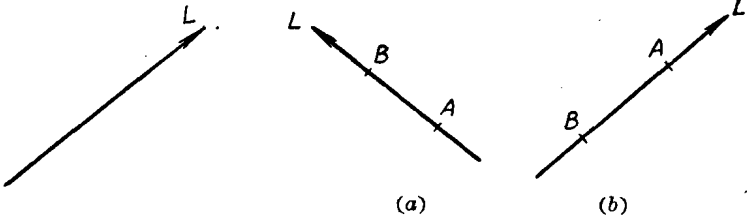


图 1.3

图 1.4

在有向直綫  $L$  上的一个有向綫段  $\overline{AB}$ ，如果它的方向与  $L$  的正方向相同（如图 1.4 (a)），我們說这有向綫段是正的；如果相反（如图 1.4 (b)），就說是負的。

我們用下述方法使有向直綫  $L$  上的每一个有向綫段  $\overline{AB}$  跟一个确定的实数发生联系。設正数  $s$  是綫段  $AB$  的长<sup>①</sup>，我們就按照  $\overline{AB}$  的正負分別以  $s$  或  $-s$  作为与  $\overline{AB}$  相应的数。換句話說，如果我們同时用  $\overline{AB}$  表示与綫段  $\overline{AB}$  相对应的实数，那末

$$\overline{AB} = \begin{cases} s, & \text{当 } \overline{AB} \text{ 为正綫段,} \\ 0, & \text{当 } \overline{AB} \text{ 为零綫段,} \\ -s, & \text{当 } \overline{AB} \text{ 为負綫段.} \end{cases}$$

这样，如果  $\overline{AB} = s$ ，那末  $\overline{BA} = -s$ ；如果  $\overline{AB} = -s$ ，那末  $\overline{BA} = s$ 。无論在哪一种情形中，都有

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \text{ 或 } \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

由此可见(1)与(3)既适用于有向綫段，也适用于与有向綫段相对应的

<sup>①</sup> 要計量长度，当然須先有长度的单位。在本书中，我們將假定所用的单位长度是始終不变、到处一样的。因此，以后就不再提到这个问题（但在图形中，为求清晰起見，所用单位长度，仍有伸縮）。

数。

我們也不难证明，把公式(2)与(4)中的有向綫段理解为与它們相对应的实数，两式仍然正确。这里我們只证公式(2)。直綫 $L$ 上的任意三点 $A, B, C$ ，它們的相互位置共有六种不同的情形。現在我們仅就图1.5中的情况对(2)式加以证明，其余的情形可以同样证明。

設 $CA$ 与 $AB$ 的长度分别为正数 $r$ 与 $s$ ，因而 $CB$ 的长度应为 $r+s$ 。于是根据上述規定，

$$\overline{AB} = s, \quad \overline{BC} = -(r+s), \quad \overline{AC} = -r,$$

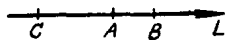


图 1.5

从而有

$$\overline{AB} + \overline{BC} = s - (r+s) = -r = \overline{AC}.$$

我們規定：在同一条有向直綫上或分別在两条平行而且正向相同的有向直綫上，如果有长度相等、方向相同的两个有向綫段，就說它們是相等的。显然，相等的两个有向綫段所对应的数也是相等的。

**1-3 数軸。** 明白了有向綫段与实数的联系以后，現在讓我們來說明怎样把直綫上的点跟实数联系起来。在一条有向直綫上先取定一点，称为原点，与一长度单位，并設 $M$ 是这直綫上的任意一点(图1.6)，这就确定了一个有向綫段 $\overline{OM}$ ①，从而有与它对应的一个实数 $x$ 。所以对应于直綫上的每一点，必有一个确定的实数。



图 1.6

反之，已知一个实数 $x$ ，我們可以在这有向直綫上截取一个有向綫段 $\overline{OM} = x$ ，因而得到对应于实数 $x$ 的点 $M$ 。所以对应于每一个实数，必有直綫上的一个确定的点。

这样，实数的集合与取定了原点与长度单位的有向直綫上的点的集合就构成一一对应的关系。

① 这綫段在 $M$ 与原点重合时是零綫段。

既然在一条取定原点与长度单位的有向直线上可以用点来表达实数，这样的有向直线因此有**数轴**之称<sup>①</sup>。我们又往往把数轴叫做**坐标轴**，把与 $M$ 点相对应的实数 $x$ 称为 $M$ 点的**坐标**。

如果 $M$ 点的坐标是 $x$ ，那末它的绝对值 $|x|$ 就等于 $M$ 点与原点之间的距离，也就是线段 $OM$ 的长度。因此，我们往往把介于 $A$ 与 $B$ 之间的线段 $AB$ 的长度记作 $|AB|$ 。

设数轴上任意两点 $M_1$ 与 $M_2$ 分别有坐标 $x_1$ 与 $x_2$ ，于是与有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 相对应的数就可以由端点的坐标表出。根据公式(1)与(2)，我们有

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_1O} + \overline{OM_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1},$$

即

$$\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1, \quad (5)$$

从而可知 $|x_2 - x_1|$ 或 $|x_1 - x_2|$ 就等于线段 $M_1M_2$ 的长度 $|M_1M_2|$ ，也就是等于 $M_1$ 与 $M_2$ 两点之间的距离。

此后为简便起见，我们将省去字母上所加的横线，而把任何有向线段 $\overline{AB}$ ，或其相对应的实数 $\overline{AB}$ ，一律记作 $AB$ <sup>②</sup>。

**1-4 投影定理。** 以上仅就有向线段在它所在的有向直线上来考虑。现在让我们进一步来讨论它与同一平面内别的有向直线的关系。

设在同一平面内有有向线段 $AB$ 及另一条有向直线 $L$ 。由 $AB$ 的两端分别引 $L$ 的垂线，与 $L$ 相交于 $A'$ 及 $B'$ （图 1.7）。我们把与有向线段 $A'B'$ 相对应的实数称为 $AB$ 在 $L$ 上的**投影**。

关于投影，我们有两条重要的定理。

**定理一** 有向线段 $AB$ 在 $L$ 上的投影是

① 读者应当记得，在中学代数里就早已讲过数轴及一一对应的概念。

② 这样用同一个符号来表示有向线段及其相对应的数，正可以强调几何与代数之间的密切联系，并无混淆不清之弊。同样，在数轴上具有坐标 $x$ 的点往往就简称为 $x$ 点。

$$A'B' = AB \cos \gamma, \quad (6)$$

其中  $\gamma$  是  $AB$  所在的直线的正向与  $L$  的正向之间的夹角<sup>①</sup>.

[证] 过  $A$  作与  $L$  平行且同向的有向直线, 跟  $B'B$  相交于  $B''$  (图 1.7). 于是根据中学三角, 不论  $\gamma$  是任何大小的角度, 总有

$$AB'' = AB \cos \gamma.$$

但根据有向线段相等的定义 (1-2 节),  $AB'' = A'B'$ . 因此, 即得 (6) 式.

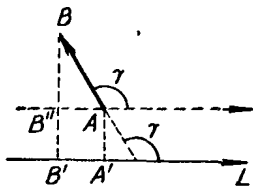


图 1.7

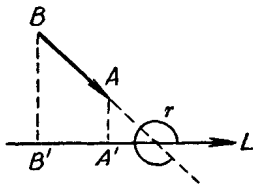


图 1.8

如果  $AB$  是负线段 (图 1.8), 那末  $BA$  是正线段. 根据刚才所证明的结果,

$$B'A' = BA \cos \gamma.$$

但由公式 (1),  $B'A' = -A'B'$ ,  $BA = -AB$ . 因此,

$$-A'B' = -AB \cos \gamma.$$

两端各去负号, 仍得公式 (6).

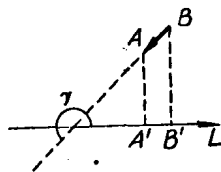


图 1.9

例. 设  $AB = -1$ ,  $\gamma = \frac{5\pi}{4}$  (图 1.9). 于是  $AB$  在  $L$  上的投影是

$$A'B' = (-1) \cos \frac{5\pi}{4} = (-1) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

现在让我们来考虑平面内任意折线  $AA_1A_2 \cdots A_{n-1}B$ . 设想有一个动点沿着这折线从  $A$  移动至  $B$  (图 1.10). 于是在这折线上的每一线段都变成了有向线段. 这种具有方向的折线称为有向折线.

<sup>①</sup> 这里我们并未规定角的始边或终边 因此,  $\gamma$  可正可负, 也可以取  $2\pi \pm \gamma$  来替代  $\gamma$ .

設在同一平面內另有一有向直線  $L$ . 有向折線的各綫段在  $L$  上的投影之和称为这有向折綫在  $L$  上的投影.

**定理二** 有向折綫  $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$  在  $L$  上的投影就等于有向綫段  $AB$  在  $L$  上的投影.

[证] 折綫在  $L$  上的投影 (图 1.10) 是  $A'A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}B'$ . 但根据公式(4),

$$\begin{aligned} & A'A_1 + A_1A_2 + \cdots \\ & \quad + A_{n-1}B' = A'B', \end{aligned}$$

而  $A'B'$  正是  $AB$  在  $L$  上的投影.

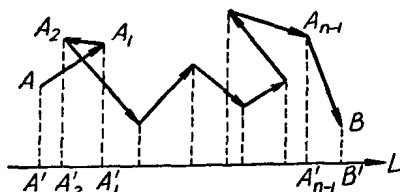


图 1.10

从定理二立即可以推知, 如果有向折綫是閉合的, 那末它在任何有向直綫上的投影等于零.

**1-5 平面直角坐标系.** 現在我們可以进一步來說明, 怎样把一个平面內的点跟实数联系起来. 在平面內作两条互相垂直的数軸  $OX$  与  $OY$  (图 1.11).  $OX$  叫做橫軸或  $x$  軸, 通常取自左至右的方向作为正向;  $OY$  叫做縱軸或  $y$  軸, 通常取自下至上的方向作为正向. 橫軸与縱軸統称为坐标軸, 它們的交点  $O$  称为原点. 这两个軸把平面分为四部分, 称为象限.

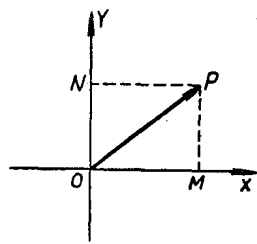


图 1.11

設  $P$  是平面內的任意一点. 讓我們来考虑有向綫段  $OP$  (图 1.11). 它在两軸上的投影分别为  $OM$  及  $ON$ , 称为  $P$  点的坐标, 分別記作实数  $x$  与  $y$ :

$$x = OM, \quad y = ON,$$

并且合写在一个括号里, 如  $(x, y)$ . 第一个数  $x$  叫做  $P$  点的橫坐标或  $x$  坐标; 第二个数  $y$  叫做  $P$  点的縱坐标或  $y$  坐标. 所以对应于平面內的每一点  $P$ , 必有一对确定的坐标  $(x, y)$ .



反之, 已知一对实数  $x$  与  $y$ , 我們可以在  $x$  轴上作  $OM=x$ , 在  $y$  轴上作  $ON=y$ , 然后过  $M$  与  $N$  分别作  $x$  轴与  $y$  轴的垂线. 这两条垂线的交点  $P$  便是具有坐标  $(x, y)$  的点 (图 1.11). 所以对应于一对实数  $(x, y)$ , 必有平面内的一个确定的点  $P$ .

这样, 平面内的点的集合就与成对而且有序的实数 (简称为实数偶) 的集构成一一对应的关系. 这就是使平面内的点与实数相结合的一种坐标法. 使用这种坐标法时所取定的两条互相垂直的坐标轴就构成一个平面直角笛卡儿<sup>①</sup>坐标系或简称平面直角坐标系<sup>②</sup>.

**1-6 两点之间的距离.** 利用坐标, 我們立即可以运用代数方法来解一些简单的几何问题. 設已知  $P_1(x_1, y_1)$  与  $P_2(x_2, y_2)$  两点, 这两点之间的距离  $s$  便不难从两点的坐标计算出来.

过  $P_1$  及  $P_2$  分别作与  $x$  轴及  $y$  轴平行的直线, 相交于  $Q$  (图 1.12). 于是根据商高定理,

$$s^2 = |P_1Q|^2 + |QP_2|^2.$$

但

$$|P_1Q| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|QP_2| = |N_1N_2| = |y_2 - y_1|.$$

因此,

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

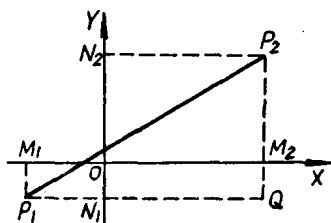


图 1.12

即

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (7)$$

**例 1.**  $A(-2, 3)$  与  $B(1, -1)$  两点之间的距离 (图 1.13):

$$|AB| = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

**例 2.**  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(3, -2)$  三点是一个等腰三角形的顶

<sup>①</sup> 笛卡儿 (R. Descartes, 1596—1650), 著名法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家。

<sup>②</sup> 讀者应当記得在中学代数与三角里早就用过这种坐标系。