高等学校教材

高等数学

（基础部分）

上 册

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

高等学校教材

高等数学

（基础部分）

上册

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

本书是以西安交通大学高等数学教研室于1959年編写的高等数学讲义为基础，根据1962年5月审訂的高等工业学校本科五年制各类专业适用的“高等数学（基础部分）教学大綱（試行草案）”改編的。

全书分上、下两册出版。上册內容为：平面解析几何（包括行列式）、一元函数的微积分学。

参加本书編写和定稿工作的有陆庆乐（主編）、赵孟养、邵济煦、馬知恩等同志。本书由侯希忠、王元吉同志初审后，又經高等工业学校高等数学課程教材編审委員会复审。

本书可作为高等工业学校“高等数学”課程試用教科书。

高 等 数 学

（基础部分）

上　册

西安交通大学高等数学教研室編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K13010·1135　开本 850×1168 1/32　印张 11 12/16

字数 303,000　印数 0,001—16,000　定价（5）¥1.10

1964年8月第1版　1964年8月北京第1次印刷

上册目录

第一篇　平面解析几何

第二篇 一元函数的微积分学

第一篇 平面解析几何

第一章 坐标法. 曲綫与方程

在中学里，代数与几何是两門各自独立、很少联系的課程. 紧密地把代数与几何結合起来，这就产生了解析几何. 說得更明确一些，解析几何是要应用代数的方法，即所謂解析法，来进行几何的研究；而反过来，也就可以借助于几何的概念来說明代数的性质.

促成代数与几何的这样一种結合的，就是**坐标法**. 我們知道，代数运算的基本对象是数，几何图形的最基本元素是点，通过坐标法，我們却使这两者发生了紧密的联系.

1-1 实数与它的絕对值. 在高等数学这門課程中，所牵涉到的数，主要都是实数. 关于实数的概念在中学代数里已有闡述. 我們知道，整数(包括正整数、負整数及零)与分数(包括正分数及負分数)总称**有理数**；任何有理数可以化为有限小数或无限循环小数. 所謂**无理数**就是指无限不循环小数. 如果按照一定法則(例如用开方法計算 $\sqrt{2}$) 能够求出一个无理数任何数位上的数字，这无理数即作为已知. 有理数与无理数統称**实数**.

我們又知道，任意取两个实数，都可以比較它們的大小. 在实数的集合中进行有理运算，即加、减、乘、除四种运算，結果仍是实数. 但是我們不能用零作为除数，因为这样做是毫无意义的.

在中学代数里也讲过实数的絕对值：正数的絕对值就是它的本身，負数的絕对值是跟这个負数符号相反的正数，零的絕对值还是零. 換句話說，設 $|a|$ 表示实数 a 的絕对值，我們有

$$\boxed{|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{当 } a<0.\end{cases}}$$

由这一定义，对任意实数 a 可以推得下面两个結果:

(I) 不等式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

恒成立;

(II) 如果 $A\geqslant 0$，而 $-A\leqslant a\leqslant A$，那末 $|a|\leqslant A$；反过来也对.

［证］ (I)当 $a\geqslant 0$ 时，由定义，$a=|a|$. 因此，有

$$-|a|\leqslant a=|a|$$

成立．当 $a<0$ 时，由定义，$a=-|a|$. 因此，有

$$-|a|=a<|a|$$

成立．所以不等式 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$ 恒成立.

(II) 当 $a\geqslant 0$ 时，由定义并根据所假定的不等式 $-A\leqslant a\leqslant A$，有 $|a|=a\leqslant A$，即 $|a|\leqslant A$. 当 $a<0$ 时，由定义并用 -1 乘所假定的不等式，则有 $|a|=-a\leqslant A$. 亦即 $|a|\leqslant A$.

反过来，从 $|a|\leqslant A$，得 $-A\leqslant -|a|$. 再根据(I)，便有

$$-A\leqslant -|a|\leqslant a\leqslant |a|\leqslant A,$$

即

$$-A\leqslant a\leqslant A.$$

此外，对 a、b 两个任意实数，我們还有下列关于絕对值的几个主要性质:

1° 两个实数之和的絕对值不大于各数的絕对值之和，即

$$\boxed{|a+b|\leqslant |a|+|b|.}$$

［证］ 根据(I)，我們有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

把这两个不等式的两端分别相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

由(Ⅱ)，即得欲证的結果:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

这个不等式不难推广到 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$:

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

例 1. $|-3+2-5|=|-6|=6<|-3|+|2|+|-5|=$

$$=3+2+5=10.$$

2° 两个实数之差的絕对值不小于各数的絕对值之差:

$$|a-b|\geqslant\begin{cases}|a|-|b|,\\|b|-|a|.\end{cases}$$

［证］ 由于 $a=(a-b)+b$，根据性质 1°，得

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|,$$

即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|;$$

而把 a、b 对調，則得

$$|a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|.$$

例 2. $|-3-2|=|-5|=5>|-3|-|2|=3-2=1.$

性质 1°、2° 中的等号只有在各数同号时成立.

3° 两个实数之积的絕对值等于各数的絕对值之积:

$$|ab|=|a|\,|b|.$$

这个关系式也不难推广到 n 个实数.

4° 两个实数之商的絕对值等于各数的絕对值之商:

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\qquad(b\neq 0).$$

最后这两个性质从乘法与除法的符号規則便可以直接推出.

1-2 有向綫段． 在一条直綫 L 上任取两点 A 与 B．我們从中学几何知道这样在 L 上介于 A 与 B 之間的部分(图 1.1)就叫做**綫段**．

图 1.1

在中学几何里，对綫段只考虑它的长度，因此把綫段 AB 与 BA 当作是相同的．但在有些几何問題与力学問題中，綫段方向的規定对問題的研究也是重要的．例如我們把 AB 看作是一个质点从起点 A 运动到終点 B 的位移，BA 从起点 B 运动到終点 A 的位移，那末 AB 与 BA 就具有不同的意义，它們的方向是相反的．

規定了方向的綫段称为**有向綫段**．为便于与无向綫段区别起見，我們暂且用字母上加一道横綫来表示有向綫段．我們把方向是由 A 指向 B 的有向綫段記作 $\overline{AB}$，于是 $\overline{BA}$ 的方向是由 B 指向 A，适与 $\overline{AB}$ 相反．$\overline{AB}$ 的起点是 A，終点是 B；而 $\overline{BA}$ 的起点是 B，終点是 A．我們把长度相同方向相反的两个有向綫段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 之間的关系，記作

$$\overline{AB}=-\overline{BA}. \tag{1}$$

起点与終点重合的有向綫段称为**零綫段**[①]，記作 0，即 $\overline{AA}=0$．

关于有向綫段相加，我們規定：对于直綫 L 上的任意三点 A、B、C，不論它們的位置如何，所形成的有向綫段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 之和是有向綫段 $\overline{AC}$(图 1.2)，即

$$\boxed{\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.} \tag{2}$$

这个公式称为有向綫段的**結合法則**．

当 C 重合于 A 时，有

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0 \tag{3}$$

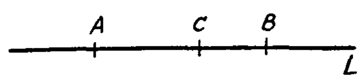


图 1.2

根据結合法則，如果在直綫 L 上有 n 个点 A_1、A_2、…、A_{n-1}、A_n，容易推得

① 零綫段的方向不定．

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n}. \tag{4}$$

現在让我們把有向綫段与数联系起来. 我們給任意直綫 L 以方向，在直綫的两个方向中取定一个作为直綫的正方向，用箭头指出，如图 1.3. 这种有方向的直綫称为**有向直綫**.

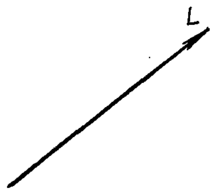
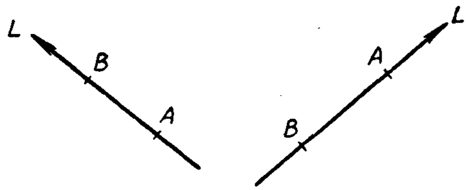


图 1.3



(a) (b)

图 1.4

在有向直綫 L 上的一个有向綫段 $\overline{AB}$，如果它的方向与 L 的正方向相同（如图 1.4 (a)），我們說这有向綫段是**正的**；如果相反（如图 1.4 (b)），就說是**負的**.

我們用下述方法使有向直綫 L 上的每一个有向綫段 $\overline{AB}$ 跟一个确定的实数发生联系. 設正数 s 是綫段 AB 的长①，我們就按照 $\overline{AB}$ 的正負分别以 s 或 $-s$ 作为与 $\overline{AB}$ 相应的数. 换句話說，如果我們同时用 $\overline{AB}$ 表示与綫段 $\overline{AB}$ 相对应的实数，那末

$$\overline{AB}=\begin{cases} s, & \text{当 } \overline{AB} \text{ 为正綫段,}\\ 0, & \text{当 } \overline{AB} \text{ 为零綫段,}\\ -s, & \text{当 } \overline{AB} \text{ 为負綫段.}\end{cases}$$

这样，如果 $\overline{AB}=s$，那末 $\overline{BA}=-s$；如果 $\overline{AB}=-s$，那末 $\overline{BA}=s$. 无論在哪一种情形中，都有

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0 \text{ 或 } \overline{AB}=-\overline{BA}.$$

由此可見(1)与(3)既适用于有向綫段，也适用于与有向綫段相对应的

① 要計量长度，当然須先有长度的单位. 在本书中，我們将假定所用的单位长度是始終不变、到处一样的. 因此，以后就不再提到这个問題（但在图形中，为求清晰起見，所用单位长度，仍有伸縮）.

数．

我們也不难证明，把公式(2)与(4)中的有向綫段理解为与它們相对应的实数，两式仍然正确．这里我們只证公式(2)．直綫 L 上的任意三点 A、B、C，它們的相互位置共有六种不同的情形．現在我們仅就图 1.5 中的情况对(2)式加以证明，其余的情形可以同样证明．

設 CA 与 AB 的长度分别为正数 r 与 s，因而 CB 的长度应为 $r+s$．于是根据上述規定，

$\overline{AB}=s,\quad \overline{BC}=-(r+s),\quad \overline{AC}=-r,$

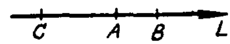


图 1.5

从而有

$$\overline{AB}+\overline{BC}=s-(r+s)=-r=\overline{AC}.$$

我們規定：在同一条有向直綫上或分别在两条平行而且正向相同的有向直綫上，如果有长度相等、方向相同的两个有向綫段，就說它們是**相等的**．显然，相等的两个有向綫段所对应的数也是相等的．

1-3 数軸． 明白了有向綫段与实数的联系以后，現在让我們来說明怎样把直綫上的点跟实数联系起来．在一条有向直綫上先取定一点，称为**原点**，与一长度单位，并設 M 是这直綫上的任意一点(图 1.6)，这就确定了一个有向綫段 $\overline{OM}$①，从而有与它对应的一个实数 x．所以对应于直綫上的每一点，必有一个确定的实数．

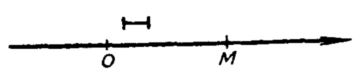


图 1.6

反之，已知一个实数 x，我們可以在这有向直綫上截取一个有向綫段 $\overline{OM}=x$，因而得到对应于实数 x 的点 M．所以对应于每一个实数，必有直綫上的一个确定的点．

这样，实数的集合与取定了原点与长度单位的有向直綫上的点的集合就构成一一对应的关系．

① 这綫段在 M 与原点重合时是零綫段．

既然在一条取定原点与长度单位的有向直綫上可以用点来表达实数，这样的有向直綫因此有**数軸**之称①. 我們又往往把数軸叫做**坐标軸**，把与M点相对应的实数x称为M点的**坐标**.

如果M点的坐标是x，那末它的絕对值$|x|$就等于M点与原点之間的距离，也就是綫段OM的长度. 因此，我們往往把介于A与B之間的綫段AB的长度記作$|AB|$.

設数軸上任意两点M_1与M_2分别有坐标x_1与x_2，于是与有向綫段$\overline{M_1M_2}$相对应的数就可以由端点的坐标表出. 根据公式(1)与(2)，我們有

$$\overline{M_1M_2}=\overline{M_1O}+\overline{OM_2}=\overline{OM}_2-\overline{OM}_1,$$

即
$$\boxed{\overline{M_1M_2}=x_2-x_1,} \tag{5}$$

从而可知$|x_2-x_1|$或$|x_1-x_2|$就等于綫段M_1M_2的长度$|M_1M_2|$，也就是等于M_1与M_2两点之間的距离.

此后为簡便起見，我們将省去字母上所加的横綫，而把任何有向綫段$\overline{AB}$，或其相对应的实数$\overline{AB}$，一律記作AB②.

1-4 投影定理. 以上仅就有向綫段在它所在的有向直綫上来考虑. 現在让我們进一步来討論它与同一平面內别的有向直綫的关系.

設在同一平面內有有向綫段AB及另一条有向直綫L. 由AB的两端分别引L的垂綫，与L相交于A'及B'(图1.7). 我們把与有向綫段$A'B'$相对应的实数称为AB在L上的**投影**.

关于投影，我們有两条重要的定理.

定理一 有向綫段AB在L上的投影是

① 讀者应当記得，在中学代数里就早已讲过数軸及一一对应的概念.

② 这样用同一个符号来表示有向綫段及其相对应的数，正可以强調几何与代数之間的密切联系，并无混淆不清之弊. 同样，在数軸上具有坐标x的点往往就簡称为x点.

$$\boxed{A'B' = AB\cos\gamma,} \tag{6}$$

其中γ是AB所在的直綫的正向与L的正向之間的夹角[1].

［证］ 过A作与L平行且同向的有向直綫，跟$B'B$相交于B''(图1.7). 于是根据中学三角，不論γ是任何大小的角度，总有

$$AB'' = AB\cos\gamma.$$

但根据有向綫段相等的定义(1-2节)，$AB''=A'B'$. 因此，即得(6)式.

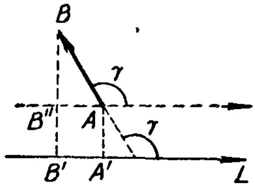


图 1.7

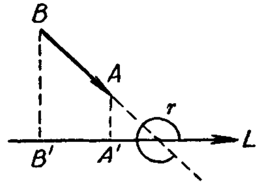


图 1.8

如果AB是負綫段(图1.8)，那末BA是正綫段. 根据剛才所证明的結果，

$$B'A' = BA\cos\gamma.$$

但由公式(1)，$B'A'=-A'B'$，$BA=-AB$. 因此，

$$-A'B' = -AB\cos\gamma.$$

两端各去負号，仍得公式(6).

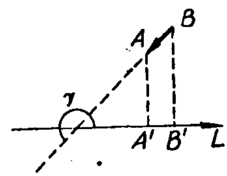


图 1.9

例. 設$AB=-1$，$\gamma=\frac{5\pi}{4}$(图1.9). 于是AB在L上的投影是

$$A'B' = (-1)\cos\frac{5\pi}{4} = (-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

現在让我們来考虑平面內任意折綫$AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$. 設想有一个动点沿着这折綫从A移动至B(图1.10). 于是在这折綫上的每一綫段都变成了有向綫段. 这种具有方向的折綫称为**有向折綫**.

---

[1] 这里我們并未規定角的始边或終边. 因此，γ可正可負，也可以取$2\pi\pm\gamma$来替代γ.

設在同一平面內另有一有向直綫 L. 有向折綫的各綫段在 L 上的投影之和称为这**有向折綫在 L 上的投影**.

定理二 有向折綫 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$ 在 L 上的投影就等于有向綫段 AB 在 L 上的投影.

［证］ 折綫在 L 上的投影(图 1.10) 是 $A'A_1'+A_1'A_2'+\cdots+A_{n-1}'B'$. 但根据公式(4),

$$A'A_1'+A_1'A_2'+\cdots+A_{n-1}'B'=A'B',$$

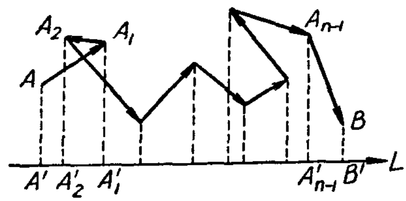


图 1.10

而 $A'B'$ 正是 AB 在 L 上的投影.

从定理二立即可以推知, 如果有向折綫是閉合的, 那末它在任何有向直綫上的投影等于零.

1-5 平面直角坐标系. 現在我們可以进一步来說明, 怎样把一个平面內的点跟实数联系起来. 在平面內作两条互相垂直的数軸 OX 与 OY(图 1.11). OX 叫做**横軸**或 **x 軸**, 通常取自左至右的方向作为正向; OY 叫做**纵軸**或 **y 軸**, 通常取自下至上的方向作为正向. 横軸与纵軸統称为**坐标軸**, 它們的交点 O 称为**原点**. 这两个軸把平面分为四部分, 称为**象限**.

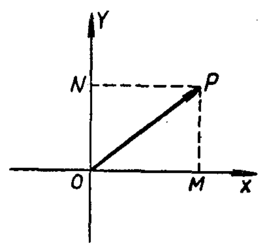


图 1.11

設 P 是平面內的任意一点. 让我們来考慮有向綫段 OP(图1.11). 它在两軸上的投影分别为 OM 及 ON, 称为 P 点的**坐标**, 分别記作实数 x 与 y:

$$x=OM,\quad y=ON,$$

并且合写在一个括号里, 如(x, y). 第一个数 x 叫做 P 点的**横坐标**或 **x 坐标**; 第二个数 y 叫做 P 点的**纵坐标**或 **y 坐标**. 所以对应于平面內的每一点 P, 必有一对确定的坐标(x, y).

反之，已知一对实数 x 与 y，我們可以在 x 軸上作 $OM=x$，在 y 軸上作 $ON=y$，然后过 M 与 N 分別作 x 軸与 y 軸的垂綫．这两条垂綫的交点 P 便是具有坐标 (x, y) 的点（图 1.11）．所以对应于一对实数 (x, y)，必有平面內的一个确定的点 P．

这样，平面內的点的集合就与成对而且有序的实数（簡称为**实数偶**）的集合构成一一对应的关系．这就是使平面內的点与实数相結合的一种坐标法．使用这种坐标法时所取定的两条互相垂直的坐标軸就构成一个**平面直角笛卡儿**[①]**坐标系**或簡称**平面直角坐标系**[②]．

1-6　两点之間的距离．　利用坐标，我們立即可以运用代数方法来解决一些簡单的几何問題．設已知 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 两点，这两点之間的距离 s 便不难从两点的坐标計算出来．

过 P_1 及 P_2 分別作与 x 軸及 y 軸平行的直綫，相交于 Q（图 1.12）．于是根据商高定理，

$$s^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

但

$$|P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|.$$

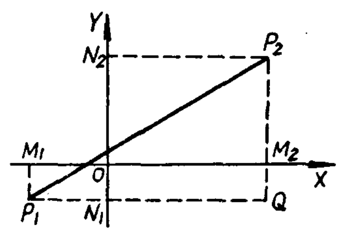


图　1.12

因此，

$$s^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

即

$$\boxed{s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.} \tag{7}$$

例 1.　$A(-2,3)$ 与 $B(1,-1)$ 两点之間的距离（图 1.13）：

$$|AB|=\sqrt{[1-(-2)]^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

例 2.　$A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(3,-2)$ 三点是一个等腰三角形的頂

① 笛卡儿（R. Descartes, 1596—1650），著名法国哲学家、物理学家、数学家和生理学家．

② 讀者应当記得在中学代数与三角里早就用过这种坐标系．