中国教育电视台CETV-1黄金时间配套讲解

新世纪同步学典

TBXD

CHAO YUE KETANG

总策划／刘　强（美澳国际学校校长）

总主编／王后雄（湖北黄冈特级教师）

高二 数学 上

超越课堂

点例练三环紧扣　课堂学习大超越

- 领悟学习的真谛
- 感受成功的快乐
- 激发学习的热情
- 超越平凡的课堂

[illegible]

新世纪同步学典 TBXD

CHAOYUE KETANG

总策划／刘　强（美澳国际学校校长）
总主编／王后雄（湖北黄冈特级教师）

高二
数学
（上）

超越课堂

本册主编：冯学鹏
本册编者：李幼民　曾祥友
胡国书　凌全兵
程志鸿　田祥高

北京教育出版社　九州出版社

图书在版编目(CIP)数据

新世纪同步学典:高二数学/冯学鹏主编. -北京:北京教育出版社,1999.7

ISBN 7-5303-1830-6

Ⅰ.新… Ⅱ.冯… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 29662 号

新世纪同步学典·超越课堂

高二数学(上)

冯学鹏 主编

*

北京教育出版社出版
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码:100011
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
山东省高唐印刷有限责任公司印刷

*

880×1230 32 开本 8 印张 240000 字
1999 年 8 月第 1 版 2002 年 7 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 7-5303-1830-6
G·1804 定价:10.00 元

地址:北京市西三环北路 27 号北科大厦北楼四层 邮编:100089
北京美澳学苑教育考试研究中心 电话:010-68434992

超越课堂

前言

同步新教材
3+X高考

点例练三环紧扣
课堂学习大超越

人类已经进入到21世纪，如何培养新世纪的优秀人才，如何全面依据实验教材的内容，充分融汇试验教材的改革思想和精神，如何使丛书体例符合学生课堂学习的接受心理和认知规律、形式上便于学生阅读、理解和迁移，这是摆在广大教师和学生家长面前的一个重大课题。《超越课堂》丛书即是顺应这个素质备考时代的产物。

本丛书以人教社最新教材（高中必修加选修）为蓝本，依据最新《考试说明》及高考考向编写，旨在透彻整理学考要点及解题依据、实例点拨应考技巧，轻松提高应考技能，使学生花费最少的时间和精力轻松学习、从容应考。本丛书系一套真正让学生易学、好懂、会用的梦寐以求的新概念教辅书。

丛书特点

1、按节或课同步展开，围绕学习、考试中易出现的种种问题编写，应考立竿见影。
2、能立即了解教科书的要点，考点指要突出每节（课）的知识点，注重学习方法，培养创新能力，帮助学生掌握解题依据或答题要点。
3、讲、例、练三案合一，相互对照，套餐式学习新概念。

考点指要	点击名题	拓展迁移
归纳、整理知识点，讲解方法、注重能力，形成解题依据和答案要点。	思路点拨与考点摘要——对应，一讲一例，点例对应，清晰明了。	同类题同步训练，题目新、活，体现能力与素质，题目少而精。
对预习、考试最有用，最需掌握的得分指要。	解题依据切中考点指要，随文解题，强化理解，提高学习效率。	与讲例对照，训练配合学习，有助于解题，提高应考能力。

4、 全方位备考，章（单元）末附一套能力检测题，基本题、提高题、发展题按6∶3∶1的比例编排，优等生通过努力可得满分，中等人可得70～80分，后进生可得50～70分。试卷整体难度控制合理，题目新颖，富有时代特色（与时事、生产、生活、科技、环境等相联系）。

名师典范

参与本丛书编写的作者均系黄冈、武汉教学第一线上有声望、有丰富教学经验的教师。他们有湖北省特级教师、湖北省状元教师，有国家级骨干教师，有享受国务院政府津贴的专家等，从而保证本丛书为真正名师严谨缔造的品牌图书。

效果卓著

本丛书由一批名师编著，体例突破以往教辅书讲、例、练三案脱离的模式，教、学、练、测相互点击，形成功能齐备的学考体系。这一切无疑确保了本丛书的权威性、实用性和高效性。

学考选《超越》，梦想志必得！

《超越课堂》编委会

2002年7月

第六章　不等式

第一节　不等式的性质

学考三维目标　本节重点·难点·考点

预读摘要

- ◆ 熟练掌握实数大小比较的依据、系统掌握不等式的性质.
- ◆ 能综合运用不等式性质解决问题.

轻松学考 ⇨ 知识&方法·名题伴读·轻松做题

❶实数运算性质与大小顺序之间的关系

设 a,b 是两个实数,则 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$;$a=b\Leftrightarrow a-b<0$;$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

考点指要	点击名题	拓展迁移 ➡ 5、6、9、10

考例 $ab>0$ 且 $a\neq b$,比较 $(a+b)(a^3+b^3)$ 与 (a^2+b^2) 的大小.

点拨 $(a+b)(a^3+b^3)-(a^2+b^2)^2=a^3b+ab^3-2a^2b^2=(a^3b-a^2b^2)+(ab^3-a^2b^2)=a^2b(a-b)+ab^2(b-a)=ab(a-b)^2$.

由 $a\neq b$,得 $(a-b)^2>0$,而 $ab>0$,

$\therefore (a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$.

说明:实数运算性质与大小顺序的关系,是证明不等式性质、证明不等式和解不等式的主要依据.利用它可以比较两个实数大小,即比差法.比差法的步骤是:作差、变形、判断符号.

❷不等式性质

❶反对称性:$a>b\Leftrightarrow b<a$

❷传递性:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$

❶可加性:$a>b\Rightarrow a+c>b+c$

❹可积性：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

❺加法法则：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

❻乘法法则：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

❼乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in \mathbf{N})$

❽开方法则：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in \mathbf{N})$

考点指要	点击名题	拓展迁移 ➡ 1、2、3、4

考例 以下四个结论：①$1\leqslant 2$；②若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$；③若 $a>b,n=2k+1,k\in \mathbf{N}^*$，则 $a^n>b^n$；④若 $a<b<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$不正确的是(　　)

点拨 ①$1\leqslant 2$ 即 $1<2$ 或 $1=2$，故正确　②取 $a=2,b=-1,c=0,d=-2$，则 $ac<bd$，故不正确　③当 $a>b>0$ 时，显然有 $a^n>b^n$；当 $a>0>b$ 时，$a^n>0,b^n<0,a^n>b^n$ 也正确；当 $0>a>b$ 时，则 $0<-a<-b\Rightarrow(-b)^{2k+1}>(-a)^{2k+1}\Rightarrow -a^{2k+1}<-b^{2k+1}\Rightarrow a^{2k+1}>b^{2k+1}\Rightarrow a^n>b^n$，故正确．④$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{-a}<\frac{1}{-b}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$故正确．∴不正确的是②

运用不等式性质解决问题

运用不等式的性质解题的关键是弄清性质成立的前提条件．

考点指要	点击名题	拓展迁移 ➡ 7、8、11

考例 (1)设 $2<a<3,-4<b<-3$，求 $a+b,a-b,\frac{a}{b},ab,\frac{b^2}{a}$的取值范围．

(2)已知 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2,2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$的取值范围．

点拨 (1)∵ $-4<b<-3$，∴ $-2<a+b<0$　由 $-4<b<-3$ 得 $3<-b<4$，∴ $5<a-b<7$．

由 $3<-b<4$ 得$\frac{1}{4}<\frac{1}{b}<\frac{1}{3}$，而 $2<a<3$，∴ $\frac{1}{2}<\frac{a}{-b}<1$，即 $-1<\frac{a}{b}<-\frac{1}{2}$．

由 $3<-b<4$ 及 $2<a<3$ 得 $6<-ab<12$，∴ $-12<ab<-6$．

由 $3<-b<4$ 得 $9<b^2=(-b)^2<16$，又$\frac{1}{3}<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，∴ $\frac{1}{3}<\frac{b^2}{a}<8$．

(2)∵ $f(-1)=a-b,f(1)=a+b$．

令 $f(-2)=4a-2b=mf(-1)+nf(1)=(m+n)a+(n-m)b$．

$\therefore \begin{cases} m+n=4, \\ m-n=-2 \end{cases} \therefore \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$,即 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

而 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2, 2\leqslant f(1)\leqslant 4, \therefore 3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$,

$\therefore 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$,即 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

注意:在(2)中,若先由 $f(-1)$ 及 $f(1)$ 的范围求出 a、b 范围,即

$\begin{cases} 1\leqslant a-b\leqslant 2 \\ 2\leqslant a+b\leqslant 4 \end{cases}$,得 $\begin{cases} 1.5\leqslant a\leqslant 3, \\ 0\leqslant b\leqslant 1.5 \end{cases}$,从而得到错误的答案:$3\leqslant f(-2)=4a-2b\leqslant$ 12.其原因在于:这种方法扩大了 a、b 的取值区域,即 a,b 是否能同时取得最大和最小的值呢?例如 $a=1.5, b=0$,则 $f(1)=a+b=1.5<2$,不适合 $2\leqslant f(1)\leqslant 4$.

应用与创新拓展训练题 ⟹ 答案见本书第 194 页

1. 判断题:对于实数 a,b,c

(1)若 $a>b$,则 $ac<bc$ (　　)

(2)若 $a>b$, $ac^2>bc^2$ (　　)

(3)若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$ (　　)

(4)若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$ (　　)

(5)若 $a<b<0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ (　　)

(6)若 $a<b<0$,则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$ (　　)

(7)若 $a<b<0$,则 $|a|>|b|$ (　　)

(8)若 $a<b<0$,则 $\frac{b}{a}<1$ (　　)

(9)若 $c>a>b>0$,则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$ (　　)

(10)若 $a>b$, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a>0, b<0$ (　　)

2. 下列推导,不正确的是(　　)

(A) $c-a<c-b\Rightarrow a>b$　　(B) $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}, c>0\Rightarrow a>b$

(C) $a>b>0, c>d>0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$　　(D) $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}(n\in \mathbf{N})\Rightarrow a<b$

3. 若 $a>b, c>d$,且 $a<0, d<0$,则 ac ______ bd.

4. 设 $x>1, -1<y<0$,试将 $x, y, -y, -xy$,按从小到大的顺序排列得______.

5. 若 $a>1, x=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}, y=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$,则用不等号连接 x ______ y.

6. 已知 $0<a<1$ 且 $A=\sqrt{2a}, B=1+a, C=\frac{1}{1-a}$,则 A,B,C 中的最大者为 ______.

7. 已知 $-1\leqslant\alpha\leqslant 3, -5\leqslant\beta\leqslant 6$,分别求 $\alpha+3, 2\beta-5, \alpha+\beta, \alpha-2\beta$ 的范围.

8. 已知 $f(x)=ax^2-c$ 且 $-4\leqslant f(-1)\leqslant -1,-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,求 $f(3)$ 的取值范围.

9. 若 $a>b>0,m>0,n>0$,试比较 $\frac{b}{a},\frac{a}{b},\frac{b+m}{a+m},\frac{a+n}{b+n}$ 的大小关系.

10. 设实数 a,b,c 满足 $b+c=6-4a+3a^2,c-b=4-4a+a^2$.试确定 a,b,c 间的大小关系.

11. 甲、乙两人沿着同一条路同时从 A 地出发走向 B 地,甲用速度 v_1 与 $v_2(v_1\neq v_2)$ 各走路程的一半,乙用速度 v_1 与 v_2 各走全程所需时间的一半.试判断甲、乙两人谁先到达 B 地,并证明你的结论.

第二节 算术平均数与几何平均数

学考三维目标 本节重点·难点·考点

预读摘要

◆ 理解并掌握两个正数的算术平均数与几何平均数的关系定理.

◆ 了解均值定理的推广.

◆ 能利用均值定理求函数的最值以及证明不等式.

轻松学考 知识&方法·名题伴读·轻松做题

1 基本不等式

❶如果 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

❶如果 a,b 为正数,则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

说明:①$\frac{a+b}{2}$ 表示两个正数 a,b 的算术平均数;$\sqrt{ab}$ 表示它们的几何平均数,因而定理(2)即可表述为:两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.②符号取得的条件有两层意义:一是当 $a=b$ 时,取"="号;二是取"="号时,必有 $a=b$.

考点指要	点击名题	拓展迁移 ➡ 1,5

考例 已知 $a+b\neq 0$,求证:$\left|\frac{1}{a+b}+a+b\right|\geqslant 2$

点拨 由 $a+b\neq 0$ 得 $a+b>0$ 或 $a+b<0$.

①当 $a+b>0$,则$\frac{1}{a+b}>0$.

$\therefore |\frac{1}{a+b}+a+b|=|\frac{1}{a+b}+(a+b)|\geqslant|2\sqrt{\frac{1}{a+b}\cdot(a+b)}|=2$.

②当 $a+b<0$ 时,则$\frac{1}{a+b}<0$,那么$-(a+b)>0$,$\frac{1}{-(a+b)}>0$.

$\therefore |\frac{1}{a+b}+a+b|=|-\{\frac{1}{-(a+b)}+[-(a+b)]\}|$

$=|\frac{1}{-(a+b)}+[-(a+b)]|\geqslant|2\sqrt{\frac{1}{-(a+b)}\cdot[-(a+b)]}|=2$,

综上得$|\frac{1}{a+b}+a+b|\geqslant 2$.

2 均值定理的变形公式

在应用定理进行不等式的证明或有关计算时,常用到定理中基本公式的变形公式,常用的有(以下除特指外,$a,b\in\mathbf{R}^+$):

①$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$,(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

②$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$,(当且仅当 $a=1$ 时取等号).

$a+\frac{1}{a}\leqslant -2$,($a\in\mathbf{R}^-$,当且仅当 $a=-1$ 时取等号).

③$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$,($a,b$ 同号,当且仅当 $a=b$ 时取等号).

④$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).(特别需注意变形$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$(或 $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$)及 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2\leqslant(\frac{a^2+b^2}{2})$.

在应用中往往需根据所给定的条件或用定理或直接应用其变形公式得到结论.

考点指要	点击名题	拓展迁移 ➡ 2、3

考例 已知 $n>2$,试比较 $\log_n(n+1)$与 $\log_{(n-1)}n$ 的大小.

点拨 由于 $n>2$,$\therefore n-1>0$,$\therefore \log_n(n+1)>0$,$\log_{(n-1)}n>0$.

$$\therefore \frac{\log_n(n+1)}{\log_{(n-1)}n}=\log_n(n+1)\cdot\log_n(n-1)<[\frac{\log_n(n+1)+\log_n(n-1)}{2}]^2$$

$$=[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}]^2<[\frac{\log_n n^2}{2}]^2=1$$

$\therefore \log_n(n+1)<\log_{(n-1)}n$.

3 均值定理的推广公式

①如果 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅且 $a=b=c$ 时等号成

立).

②如果 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,那么$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

③一般地,对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots a_n(n\geqslant2)$,都有:

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号).

④$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc(a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $a=b=c$ 时等号成立).

考点指要	点击名题	拓展迁移 4、5、6

考例 $a>0,b>0,c>0$,求证:$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant9$

点拨 $\because a,b,c>0,\therefore a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc},\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$.

$\therefore(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant3\sqrt[3]{abc}\cdot3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

利用均值定理求函数的最大值和最小值

❶两个正数的和为定值时,它们的积有最大值,即若 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b=M$,M 为定值,则 $ab\leqslant\frac{M^2}{4}$,等号当且仅当 $a=b$ 成立.

❷两个正数的积为定值时,它们的和有最小值,即若 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $ab=P$,P 为定值,则 $a+b\geqslant2\sqrt{P}$,等号当且仅当 $a=b$ 成立.

注意:①这两个数(三个)都必须是正数,例如:当 $xy=4$ 时,如果没有 x,y 都为正数的条件,就不能说 $x+y$ 有最小值 4,因为若都是负数且满足 $xy=4$,$x+y$ 也是负数,此时 $x+y$ 可以取比 4 小的值.

②这两个(三个)数必须满足"和为定值"或"积为定值",如果找不出"定值"的条件,就不能用这个定理.例如,求当 $x>0$ 时,$y=x^2+\frac{1}{x}$ 的最小值,若写成 $y=x^2+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{x}$,就说"最小值为 $2\sqrt{x}$"是错误的,因为 $x^2\cdot\frac{1}{x}$不是定值,而 $2\sqrt{x}$仍为随 x 变化而变化的值,正确的解法是:由于 $x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}$为定值,故 $x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geqslant3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{2x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$,即 y 的最小值为$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

③要保证等号确能成立,如果等号不能成立,那么求出的值仍不是最值.

考点指要	点击名题	拓展迁移 7、8、10、11、14

考例 (1)当 $x>3$ 时,求 $y=\frac{2x^2}{x-3}$的最小值.

(2)求函数 $f(x)=x(5-2x)^2(0<x<\frac{5}{2})$的最大值.

点拨 利用均值定理求最大值和最小值,常用“拆”、“凑”的方法.

(1)$\because x>3,\therefore x-3>0$.

$$\therefore y=\frac{2x^2}{x-3}=\frac{2(x-3)^2+12(x-3)+18}{x-3}$$

$$=2(x-3)+\frac{18}{x-3}+12\geqslant 2\sqrt{2(x-3)\cdot\frac{18}{x-3}}+12=24.$$

所以当且仅当 $2(x-3)=\frac{18}{x-3}$时,即 $x=6$ 或 $x=0$ 时,$y_{最小值}=24$.

(2)$f(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x\cdot(5-2x)\cdot(5-2x)\leqslant\frac{1}{4}(\frac{4x+5-2x+5-2x}{3})^3=\frac{250}{27}$.

当且仅当 $4x=5-2x$,即 $x=\frac{5}{6}$时取等号.

$\therefore$当 $x=\frac{5}{6}$时,函数 $f(x)=x(5-2x)^2(0<x<\frac{5}{2})$有最大值$\frac{250}{27}$.

5 利用基本不等式解决实际问题

在应用均值不等式解决实际问题时要注意:

①先理解题意,设变量.设变量时一般把要求最大值或最小值的变量定为函数;

②建立相应的函数关系式,把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题;

③在定义域内,求出函数的最大值或最小值;

④写出正确答案.

考点指要	点击名题	拓展迁移 ➡ 12、13、15、16

考例 甲、乙两地相距 S 千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c 千米/时,已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成;可变部分与速度 v(千米/时)的平方成正比,且比例系数为 b,固定部分为 a 元.

(1)把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/时)的函数,并指出这个函数的定义域;

(2)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大的速度行驶?

点拨 (1)依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为$\frac{S}{v}$,全程运输成本为:$y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}=S(\frac{a}{v}+bv)$.

因 $v>0$ 且不得超过 c 千米/时,故所求函数的定义域为 $0<v\leqslant c$.函数为 $y=S(\frac{a}{v}+bv)(0<v\leqslant c)$.

(2)依题意知 S,a,b,v 都为正数,故有:$S(\frac{a}{v}+bv)\geqslant 2S\sqrt{ab}$,

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$,即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立.

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$,则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时,全程运输成本 y 最小.

若 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$ 时,有:$S(\frac{a}{v}+bv)-S(\frac{a}{c}+bc)=S[(\frac{a}{v}-\frac{a}{c})+(bv-bc)]=\frac{S}{vc}(c-v)(a-bcv)$.

因为 $c-v\geqslant 0$ 且 $a>bc^2$,故有 $a-bcv\geqslant a-bc^2>0$.

所以 $S(\frac{a}{v}+bv)\geqslant S(\frac{a}{c}+bc)$.当且仅当 $v=c$ 时取等号,即当 $v=c$ 时,全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小,当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时行驶速度应为 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$;当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时,行驶速度应为 $v=c$.

应用与创新拓展训练题 答案见本书第 195 页

1. "$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$"是"$a\in\mathbf{R}^+,b\in\mathbf{R}^+$"的(　　)

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

2. 设 $b>a>0$,且 $a+b=1$,则此四个数 $\frac{1}{2}$,$2ab$,a^2+b^2,b 中最大的是(　　)

(A)b　　(B)a^2+b^2　　(C)$2ab$　　(D)$\frac{1}{2}$

3. 若 $a>b>0$,则下面不等式正确的是(　　)

(A)$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$　　(B)$\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

(C)$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　(D)$\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

4. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,若 $M=(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)$,则必有(　　)

(A)$0\leqslant M<\frac{1}{8}$　　(B)$\frac{1}{8}\leqslant M<1$　　(C)$1\leqslant M<8$　　(D)$M\geqslant 8$

5. 下列不等式中恒成立的是(　　)

(A)$\cot\theta+\tan\theta\geqslant 2$　　(B)$x+\frac{2}{\sqrt{x}}-1\geqslant 2$

(C)$\frac{\sin^2\theta+3}{\sqrt{\sin^2\theta+2}}\geqslant 2$　　(D)$xyz\leqslant\frac{1}{27}$(已知 $x+y+z=1$)

6. 当 $x\in\mathbf{R}^+$ 时,可得到不等式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2, x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant 3$,由此可推广为 $x+\frac{P}{x^n}\geqslant n+1$,其中 P 等于(　　)

(A)n^n　　(B)$(n-1)^n$　　(C)n^{n-1}　　(D)x^n

7. 函数 $y=3x^2+\frac{6}{x^2+1}$ 的最小值是(　　)

(A)$3\sqrt{2}-3$　　(B)-3　　(C)$6\sqrt{2}$　　(D)$6\sqrt{2}-3$

8. 下列函数最小值为 2 的是(　　)

(A)$y=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$　　(B)$y=\sin x+\cos x\quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

(C)$y=x+\frac{2}{\sqrt{x}}-1$　　(D)$y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$

9. 设 $y=\sin x+\frac{5}{\sin x}\quad x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,则 y(　　)

(A)最小值为 $2\sqrt{5}$　　(B)最小值为 6

(C)没有最小值　　(D)以上都不对

10. 已知 x,y,z 均大于 1,那么 $\log_x y+\log_y z+\log_z x$ 的最小值为________.

11. 设 $x>1, y>1, \log_3 x\cdot\log_3 y=1$,则 xy 的最小值为________.

12. 斜边为 8 的直角三角形面积最大值为________.

13. 建造一个容积为 8m^3,深为 2m 的长方体无盖水池,如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,那么水池的最低总造价为________元.

14. (1)求函数 $y=4x^2+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最小值.

(2)设 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,求 $m=\sin\theta\cos^2\theta$ 的最大值.

15. 从边长为 $2a$ 的正方形纸片的四角各剪去一小块边长为 x $(0<x<a)$ 的正方形后再折成一个无盖的盒子,则 x 为何值时,盒子容积最大? 求容积的最大值.

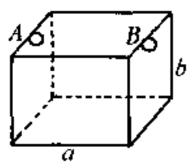

图 6-2-1

16. 如图 6-2-1,为处理含有某种杂质的污水,要制造一底边宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱,污水从 A 孔流入,经沉淀后从 B 孔流出,设箱体长度为 a 米,高度为 b 米,已知流出水中该杂质的质量分数与 a,b 的乘积 ab 成反比,现有制箱材料 60 平方米,问当 a,b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小(A、B 孔的面积忽略不计).

第三节　不等式的证明

学考三维目标　本节重点·难点·考点

THINK

预读摘要

◆ 掌握证明不等式的基本方法(比较法,综合法,分析法).

◆ 了解证明不等式的其他方法(换元法、放缩法、反证法、判别式法等),并能用它们证明一些简单的问题.

轻松学考　知识&方法·名题伴读·轻松做题

1 比较法

❶比差法:要证明 $a>b$,只需证明 $a-b>0$.

❷比商法:在 $a>0,b>0$ 的前提下,要证明 $a>b$,只需证明 $\frac{a}{b}>1$.

考点指要	点击名题	拓展迁移 2、3、5、6、7

考例　若 $a>0,b>0$,求证 $a^ab^b\geq b^aa^b$.

点拨　当 a,b 位置互换后,不等式没有改变,我们把这样的不等式叫做对称轮换不等式,对于对称轮换不等式在证明时可以不妨设 $a\geq b$,这样以避免分类讨论.

不妨设 $a\geq b>0$,则 $a-b\geq 0,\frac{a}{b}\geq 1,\therefore(\frac{a}{b})^{a-b}\geq 1$.

$\therefore\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=(\frac{a}{b})^a(\frac{b}{a})^b=(\frac{a}{b})^{a-b}\geq 1$,即 $a^ab^b\geq a^bb^a$.

2 综合法

利用某些已经证明过的不等式和不等式的性质,推导出所要证明的不等式成立的证明方法叫做综合法.

❶综合法的思维特点是“由因导果”,即从“已知条件”出发逐步推向“结论”.

❶用综合法证明不等式的逻辑关系是:(已知)$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_n\Rightarrow B$(结论)

❸运用不等式的性质和已证明过的不等式时,要注意它们各自成立的条件,这样才能使推理正确,结论无误.