保险精算丛书

精算数学

N. L. 鲍尔斯等 著 余跃年 郑韫瑜 译

上海科学技术出版社

内 容 简 介

本书介绍了生命表，人寿保险及生存年金的趸缴保费与期缴保费计算，责任准备金及现金价值（解约金）的计算。此外，还介绍了多重生命理论，人口理论，退休金计划及养老金累积理论。各章还配有大量习题，书后附有参考文献，可供进一步学习研究之用。本书可供保险业精算人员、高校师生及其他对保险精算有兴趣的读者阅读和参考。

N. L. Bowers
Actuarial Mathematics
Society of Actuaries
1986

《保险精算丛书》
精 算 数 学
N.L.鲍尔斯 等著
余跃年 郑韫瑜 译
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号）
常熟市印刷八厂印刷
开本850×1168 1/32 印张17.5 字数443 000
1996年6月第1版 1998年11月第2次印刷
印数1 801－3 800
ISBN 7－5323－4048－1/O·205
定价：40.80元
如遇印装质量问题，可直接向承印厂调换
地址：常熟市梅李镇通江路21号 邮编:215511

《保险精算丛书》前言

保险，作为商品社会中处理风险的一种有效方法，已被全世界所普遍采纳。在现代保险业蓬勃发展的进程中，科学的理论和方法，特别是精确的定量计算，起着十分重要的作用。保险业运营中的一些重要环节，如新险种的设计、保险费率和责任准备金的计算、分保额的确定、养老金等社会保障计划的制定等等，都需要由精算师 (Actuary) 依据精算学 (Actuarial Science) 原理来分析和处理。有鉴于此，许多发达国家都以法律形式规定，保险公司的营业报告必须由精算师签字方为有效。这也是国家对保险业进行调控管理的一种手段。

所谓精算学，实际上是将数学方法应用于金融保险所形成的一套理论体系。它的基础包括精算数学、利息理论、风险理论、人口数学、修匀数学、生存模型和生命表构造等等，还包括一些更专门的内容。这一套理论的重要性和正确性，已经得到国际社会的公认。

在我国，虽然早在 1949 年就由中央人民政府批准成立了中国人民保险公司，但是，由于种种历史原因，在相当长一段时间内我国的保险业发展缓慢，人才培养远不能适应实际需要。特别是精算学的研究和精算人才的培养，未得到应有的重视。在保险业的实际运作中，也很少严格按照精算学的原理办事。这一切都影响了我国保险业的进一步发展及与国际接轨。这种情况已引起保险界、教育界和学术界的注意，正在采取积极措施改变现状。刚刚颁布的《保险法》更明确规定："经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。"在此情况下，迫切需要引进国际上先进的精算学

理论，并结合我国的实际加以应用，本丛书就是在这样的背景下翻译出版的。

《保险精算丛书》（第一辑）是由复旦大学数学系、中国人民保险公司上海市分公司（以下简称人保上海分公司）合作翻译的，由上海科学技术出版社出版。全国政协副主席、中科院院士苏步青为丛书题写书名；复旦大学研究生院院长、中科院院士李大潜担任丛书主编；中国人民保险公司上海市分公司总经理何静芝、副总经理钱建中，上海市新闻出版局局长徐福生担任丛书总顾问。上海是我国保险业的发源地之一，历来是保险业的中心。成立于1950年的人保上海分公司，经过45年艰难曲折的发展，业务有了很大开拓，1994年已实现业务收入30亿元人民币，占上海保险市场的80%。根据市场的需要，公司已开办了财产、人身、责任、信用四大类约200多个险种。特别是作为公司主要业务之一的国内人身保险业务，1994年的业务收入已近12亿元。公司所开设的人身险种类也从1982年时的一种，扩展到各种形态的医疗保险、定期和终身保险及责任不同的各种人身意外伤害保险等多个品种，并逐步形成系列化。上海保险市场虽然在不断扩大，但竞争也日趋激烈。特别是一些实力雄厚的国际著名大保险公司的进入，促使国内各保险公司采取有力措施不断提高从业人员的业务素质，包括学习精算知识和培养精算人才。正是由于这样的需要，人保上海分公司决定与复旦大学数学系联手，在上海科学技术出版社的积极支持下，翻译了这套《保险精算丛书》。

复旦大学数学系不仅在数学的基础理论研究方面成就卓著，而且历来重视数学在国民经济中的应用，并取得多项重大研究成果。近年来，他们为了拓宽数学应用的领域，又开辟了精算学研究的新方向，并进行了大量的实际工作。他们在数学系研究生和本科生中开设了有关精算的课程和专题讨论，努力培养精算人才；他们还与各大保险公司合作，从事保险精算实际课题的研究，招收应用数学（保险）大专班，举办面向社会的保险精算培训班，培

训了一批人员参加 A.S.A (北美精算师学会准会员) 资格考试 (该项考试的上海考点就设在复旦大学内), 并于第一期考试中取得通过率超过 90% 的优异成绩。与人保上海分公司合作翻译这套《保险精算丛书》，不仅是复旦数学系理论和实践相结合的一项新的举措，也是他们面向社会培养国家急需的精算人才的重要措施。

“保险精算丛书” (第一辑) 共六本，分别为：

《利息理论》, S.G. 凯利森著, 尚汉冀译;

《风险理论》, N.L. 鲍尔斯著, 郑韫瑜、余跃年译;

《精算数学》, N.L. 鲍尔斯著, 余跃年、郑韫瑜译;

《人口数学》, R.L. 布朗著, 郑培明译;

《修匀数学》, D. 伦敦著, 徐诚浩译;

《生存模型》, D. 伦敦著, 陈子毅译。

所依据的原书均是北美精算师学会 (Society of Actuaries) 为其准会员 (A.S.A) 资格考试所指定的教材和参考书，具有一定的权威性。阅读这套丛书，不论对读者了解和掌握精算学基本原理并应用于保险业实践，还是对读者准备参加 A.S.A 资格考试 (该项考试在中国的北京、上海、天津、长沙等地已设有考点), 均会有很大帮助。

保险精算在我国是一项刚刚起步的新事物，这套丛书是高等院校、保险公司和出版社三方共同合作，编写翻译出版学术水平较高、填补国家缺门的专业书籍的一种有益的探索。我们热诚希望广大读者提出宝贵意见，以利于我们改进工作，做好这套丛书的出版工作，促进保险精算事业在中国的发展。

编者谨识

1995 年 11 月于上海

目 录

第一章 生存分布与生命表 ....(1)
§1.1 引言 ....(1)
§1.2 与死亡年龄有关的概率 ....(1)
§1.3 生命表 ....(9)
§1.4 决定性生存组 ....(18)
§1.5 其它生命表函数 ....(19)
§1.6 关于分数年龄的假设 ....(24)
§1.7 某些关于死亡的解析规律 ....(27)
§1.8 选择与终极生命表 ....(28)
习题 ....(32)
第二章 人寿保险 ....(38)
§2.1 引言 ....(38)
§2.2 死亡即刻赔付保险 ....(38)
§2.3 死亡年末赔付保险 ....(54)
§2.4 死亡即刻赔付与年末赔付关系 ....(61)
§2.5 递归方程 ....(66)
§2.6 计算基数 ....(71)
习题 ....(74)
第三章 生存年金 ....(79)
§3.1 引言 ....(79)
§3.2 与生存相联的一次性支付 ....(80)
§3.3 连续生存年金 ....(83)
§3.4 离散生存年金 ....(91)
§3.5 年 m 次支付生存年金 ....(98)

§3.6 等额年金计算基数公式 ……(103)
§3.7 变额年金 ……(106)
§3.8 递归方程 ……(109)
§3.9 完全期末年金与比例期初年金 ……(110)
习题 ……(115)
第四章　净保费 ……(126)
§4.1 引言 ……(126)
§4.2 完全连续保费 ……(128)
§4.3 完全离散保费 ……(133)
§4.4 真正年缴 m 次保费 ……(142)
§4.5 比例保费 ……(145)
§4.6 计算基数 ……(148)
§4.7 累积增额受益 ……(149)
习题 ……(153)
第五章　净保费责任准备金 ……(159)
§5.1 引言 ……(159)
§5.2 完全连续净保费责任准备金 ……(161)
§5.3 完全连续责任准备金其它公式 ……(165)
§5.4 完全离散净保费责任准备金 ……(168)
§5.5 半连续保费及真正 m 次保费责任准备金 ……(175)
§5.6 比例责任准备金 ……(178)
§5.7 完全离散责任准备金的递归公式 ……(180)
§5.8 分数期责任准备金 ……(183)
§5.9 亏损按各保险年度分摊 ……(186)
§5.10 完全连续责任准备金微分方程 ……(193)
§5.11 用计算基数表示的责任准备金公式 ……(195)
习题 ……(197)
第六章　多重生命函数 ……(206)
§6.1 引言 ……(206)

§6.2 连生状况 ……(207)
§6.3 最后生存状况 ……(209)
§6.4 概率与期望值 ……(212)
§6.5 人寿保险与生存年金 ……(214)
§6.6 在特殊死亡律下的求值 ……(221)
§6.7 每年死亡均匀分布假设下求值 ……(222)
§6.8 单重次顺位函数 ……(225)
§6.9 单重次顺位函数的求值 ……(229)
习题 ……(232)
第七章　多重损失模型 ……(238)
§7.1 引言 ……(238)
§7.2 两个随机变量 ……(239)
§7.3 随机残存组 ……(247)
§7.4 决定性残存组 ……(249)
§7.5 相应的单重损失表 ……(251)
§7.6 多重损失表的构造 ……(256)
§7.7 净趸缴保费及其数值计算 ……(262)
习题 ……(266)
第八章　退休金计划估价理论 ……(273)
§8.1 引言 ……(273)
§8.2 基本函数 ……(273)
§8.3 醵出金 ……(275)
§8.4 适龄退休受益 ……(277)
§8.5 残疾受益 ……(287)
§8.6 离职受益 ……(288)
§8.7 计算基数 ……(290)
习题 ……(295)
第九章　包括费用的保险模型 ……(299)
§9.1 引言 ……(299)

§9.2 一般费用 ……………………………………(299)
§9.3 费用类型 ……………………………………(305)
§9.4 单位保单的费用 ……………………………(308)
§9.5 会计计算基础 ………………………………(312)
§9.6 修正责任准备金方法 ………………………(316)
§9.7 完全初年定期制 ……………………………(320)
§9.8 美国保险监督官标准 ………………………(323)
§9.9 加拿大修正制 ………………………………(327)
习题 ……………………………………………(329)
第十章　不没收受益与分红 ……………………(336)
§10.1 引言 ……………………………………(336)
§10.2 解约金 …………………………………(339)
§10.3 保险选择权 ……………………………(345)
§10.4 资产份额 ………………………………(349)
§10.5 经验调整 ………………………………(353)
§10.6 不同假设下的责任准备金 ……………(355)
习题 ……………………………………………(362)
第十一章　特殊年金与保险 ……………………(366)
§11.1 引言 ……………………………………(366)
§11.2 特殊形式年金受益 ……………………(366)
§11.3 家庭收入保险 …………………………(369)
§11.4 退休收入保单 …………………………(371)
§11.5 变额保险产品 …………………………(373)
§11.6 可变计划产品 …………………………(377)
§11.7 个人寿险中的残疾受益 ………………(382)
习题 ……………………………………………(386)
第十二章　多重生命续论 ………………………(391)
§12.1 引言 ……………………………………(391)
§12.2 更一般状况 ……………………………(391)

§12.3 复合状况 ……………………………(399)
§12.4 顺位概率与保险 ……………………(403)
§12.5 复合顺位函数 ……………………(404)
§12.6 继承年金 ……………………………(409)
§12.7 净保费与责任准备金 ………………(413)
习题 ……………………………………(416)
第十三章　人口理论 ……………………………(423)
§13.1 引言 ……………………………………(423)
§13.2 Lexis 图 ……………………………(423)
§13.3 连续模型 ……………………………(425)
§13.4 静止人口与稳定人口 ………………(431)
§13.5 精算应用 ……………………………(435)
§13.6 人口动力学 …………………………(438)
习题 ……………………………………(442)
第十四章　退休基金累积理论 ……………………(446)
§14.1 引言 ……………………………………(446)
§14.2 模型 ……………………………………(447)
§14.3 期末基金 ……………………………(448)
§14.4 精算债务的积存 ……………………(450)
§14.5 有关在职成员的基本函数 …………(452)
§14.6 个体精算成本方法 …………………(459)
§14.7 总体成本方法 ………………………(462)
§14.8 有关退休成员的基本函数 …………(465)
§14.9 有关在职与退休成员的基本函数 ……(469)
习题 ……………………………………(471)
附录 ……………………………………………(475)
附录 1　正态分布表 ……………………(475)
附录 2　示例表 …………………………(476)
附录 3　符号索引 ………………………(490)

附录 4 精算函数符号的一般规则 ……………… (498)
习题答案 …………………………………… (502)
参考文献 …………………………………… (523)
汉英名词对照 ……………………………… (535)
译者的话 …………………………………… (543)

第一章　生存分布与生命表

§1.1　引　言

在风险理论中，我们阐明了保险如何能增进面临随机损失的个体的期望效用，并建立了若干保险的简单模型。这些模型的基础是 Bernoulli 随机变量。在某些场合，还出现另一个有关损失额的随机变量。在精算数学里，将要建立的模型主要涉及与个人生存多久相联系的随机损失，其中，*剩余寿命*(time-until- death) 随机变量 $T(x)$ 是基本的营造材料。这一章先建立若干描述并使用剩余寿命分布及相应的*死亡年龄*(age-at -death) 分布的概念。

在精算学的很多模型中，*生命表*(life table) 是不可分割的组成部分。用生命表可得出死亡年龄的分布。除保险领域以外，生命表在人口学、生物医学统计乃至可靠性研究中都有应用。

某些学者将精算学的起源定在 1693 年，那一年 Edmund Halley(译注：哈雷彗星以其姓氏命名) 发表"根据 Breslau 城出生与下葬统计表对人类死亡程度的估计"，包含在这篇论文里被称为 Breslau 表的生命表因其令人惊异的现代记号与观念而引起人们注意。

§1.2　与死亡年龄有关的概率

一、生存函数

对于新生儿，其死亡年龄 X 是一个连续型随机变量。用 $F(x)$ 记 X 的分布函数，

$$F(x) = Pr(X \le x) \qquad x \ge 0, \tag{1.2.1}$$

并置

$$s(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x) \qquad x \geq 0. \tag{1.2.2}$$

对任何正数 x, 值 $F(x)$ 等于新生儿在 x 岁或之前死亡的概率，而 $s(x)$ 等于新生儿活到 x 岁 (即 x 岁以后死亡) 的概率。因 $X \geq 0$, 故 $F(0) = 0$, 从而 $s(0) = 1$ 。函数 $s(x)$ 称为生存函数(survival function) 。在精算学及人口学中，生存函数是传统上的出发点，相当于概率统计学中分布函数所起的作用。由两者的关系 $s(x) = 1 - F(x)$, 无论使用哪一个都是等价的，例如从分布函数所具有的性质就可得出生存函数的相应性质。

与死亡年龄有关的概率，既可用生存函数也可用分布函数来表述，例如，新生儿在年龄 x 与 z $(x < z)$ 之间死亡的概率为

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z) &= F(z) - F(x) \\ &= s(x) - s(z). \end{aligned}$$

二、x 岁人的剩余寿命

新生儿在生存到 x 岁的条件下于年龄 x 与 z 之间死亡的条件概率为

$$\begin{aligned} Pr(x < X \leq z | X > x) &= \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

以后将用 (x) 来表示年龄 x 的生命(life-aged-x), (x) 的剩余寿命记为 $T(x)$ 。

在精算学中，常常需要作出有关 $T(x)$ 的概率陈述。为促进研究交流， 1898 年的国际精算大会采用了作为国际精算符号规则一部分的一组符号，确立了通用精算函数符号以及采用新符号的原则。此后，该体系由国际精算学会的常设符号规则委员会根据需要修订扩充。本书将尽可能遵从这些符号的约定。

精算学中的符号与概率论中使用的有所不同，读者也许还不太熟悉。譬如，概率论中单变量函数写成 $q(x)$, 而在精算符号体系中则写成 q_x 。类似地，多变量函数在精算符号中用上标、下标或其它标号的混合来表示。附录 4 给出了精算函数符号的一般规则，读者在继续阅读之前最好浏览一下这些符号的形式。

我们有符号

$$ {}_tq_x = Pr[T(x) \le t] \qquad t \ge 0, \tag{1.2.4} $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = Pr[T(x) > t] \qquad t \ge 0. \tag{1.2.5} $$

符号 ${}_tq_x$ 可解释为 (x) 将在 t 年内死去的概率，即 ${}_tq_x$ 关于变量 t 是 $T(x)$ 的分布函数。另一方面， ${}_tp_x$ 可解释为 (x) 将活到 * $x+t$ 岁的概率，即 ${}_tp_x$ 是 (x) 的生存函数。在年龄 $x=0$ 的特别情形下， $T(0) = X$ 且

$$ {}_xp_0 = s(x) \qquad x \ge 0. \tag{1.2.6} $$

如果 $t = 1$, 约定允许省略 (1.2.4) 及 (1.2.5) 所定义符号中的前缀，即有

$$ q_x = Pr[(x)\text{将在 1 年内死去}], $$

$$ p_x = Pr[(x)\text{将至少活到}x+1\text{岁}]. $$

对于 (x) 将生存 t 年并在其后的 u 年内死去这一更为一般的事件，即 (x) 将在 $x+t$ 岁与 $x+t+u$ 岁之间死去这个事件，有一个特殊的符号

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= Pr[t < T(x) \le t+u] \\ &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x. \end{aligned} \tag{1.2.7} $$

* 这里及以后凡涉及“活到某某岁”是指至少活到某某岁，不是恰好活到某某岁就死去。

与前面一样，当 $u=1$ 时，${}_{t|u}q_x$ 中的 u 可省略而成为 ${}_{t|}q_x$。

至此，(x) 将在年龄 x 与 $x+u$ 之间死去的概率好象有两种表达式，式 (1.2.7) 在 $t=0$ 时为其一，(1.2.3) 在 $z=x+u$ 为其二。这两个概率是否不同？式 (1.2.3) 可解释为一个新生儿在年龄 x 与 $z=x+u$ 之间死去的条件概率。有关这个现龄 x 的新生儿的仅有信息是其活到这个年龄，所以概率陈述是建立在新生儿生存的条件分布上的。

另一方面，当 $t=0$ 时 (1. 2. 7) 则给定了现龄 x 的 被观察生命 (life observed) 在 x 与 $x+u$ 岁之间死去的概率。对现龄 x 的生命进行观察，可能获得比新生儿单纯活到 x 岁更多的信息，譬如刚通过保险体检或刚开始对疾病进行治疗等。与此有关的生命表将在 §1.8 讨论。

这一节对以上两种情形不加区别，认为现龄 x 人的生存与新生儿在活到年龄 x 条件下的条件生存分布相同，即

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)}, \tag{1.2.8} $$

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}. \tag{1.2.9} $$

按这种方式，(1.2.7) 及其许多特殊情形可表示成

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)}\frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x+t)} \\ &= {}_tp_x\,{}_uq_{x+t}. \end{aligned} \tag{1.2.10} $$

三、整值剩余寿命

在某些精算模型中，使用一个离散型的剩余寿命随机变量，定义为

$$ K(x)=k \quad \text{当}k \le T(x) < k+1\text{时} $$
$$ k=0,1,2,\cdots $$

显然，$K(x)$ 是 $T(x)$ 的整数部分。由于 $T(x)$ 是连续型随机变量，$Pr[T(x)=k]=Pr[T(x)=k+1]=0$, 从而 $K(x)$ 的概率函数为

$$\begin{aligned} Pr[K(x) &= k]=Pr[k\le T(x)<k+1] \\ &= {}_{k+1}q_x-{}_kq_x={}_kp_x-{}_{k+1}p_x \\ &= {}_kp_xq_{x+k}={}_{k|}q_x \qquad k=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

随机变量 $K(x)$ 可解释成 (x) 未来存活的完整年数，称为 (x) 的*整值剩余寿命*(curtate-future-lifetime)。

在根据上下文可以明确为 (x) 的整值剩余寿命时，$K(x)$ 有时可简写成 K。同样，(完全) 剩余寿命 $T(x)$ 也时常简写成 T。

四、死亡效力

式 (1.2.3) 分别以分布函数与生存函数表示 (0) 在活到 x 岁条件下于年龄 x 与 z 之间死亡的条件概率。令其中 $z=x+\Delta x$, 则该条件概率等于现龄 x 的生命在今后 Δx 年内死亡的概率

$$\begin{aligned} {}_{\Delta x}q_x &= Pr[x<X\le x+\Delta x|X>x] \\ &= \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{1-F(x)}\cong\frac{f(x)\Delta x}{1-F(x)}, \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

其中 $f(x)=F'(x)$ 是死亡年龄 (连续型随机变量) 的概率密度函数。式 (1.2.12) 中的量

$$\frac{f(x)}{1-F(x)}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{Pr[x<X\le x+\Delta x|X>x]}{\Delta x}$$

称为*死亡效力*(force of mortality) 或瞬时死亡率，记作 μ_x, 即

$$\mu_x=\frac{F'(x)}{1-F(x)}=-\frac{s'(x)}{s(x)}. \tag{1.2.13}$$