广义逆的理论和应用

GENERALIZED INVERSES THEORY AND APPLICATIONS

刘轩黄 彭守权 译

Adi Ben-Israel Thomas N. E. Greville

华中理工大学出版社

GENERALIZED INVERSES, THEORY AND APPLICATIONS

广义逆的理论和应用

Adi Ben-Israel Thomas N. E. Greville著

刘轩黄 彭守权 译

责任编辑 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印制

*

开本：850×1168 1/32 印张：9.875 字数：231 000

1988年11月 第1版. 1988年11月 第1次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7—5609—0184—0/O·25

定价：1.98元

序　言

本书企图从统一的观点提供广义逆的一个概貌，并在多方面说明其理论和应用。它含有多于450个难度不同的习题，其中许多已经作了详细解答。这一特点使之既适合于自学参考又适合于作教本。它有利于只具有线性代数基本知识的研究生或高年级大学生使用。

本书由引言和八章组成，其中七章论述有限矩阵的广义逆，而第八章则介绍了 Hilbert 空间中算子的广义逆。第七章和第八章5节中考虑了数值方法。

在处理广义逆方面，作者曾与许多同事进行讨论并求教而获益不少。我们应该特别感谢 A. Charnes, R. E. Cline, P. J. Erdelsky, I. Erdelyi, J. B. Hawkins, A. S. Householder, A. Lent, C. C. MacDuffee, M. Z. Nashed, P. L. Odell, D. W. Showalter 和 S. Zlobec. 然而，任何可能出现的错误全由作者负责。

当作者在写本书时，得到全国科学基金会和 Wisconsin 大学数学研究中心的大力支持，我们特别感谢基金会的 B. R. Agins 和研究中心的 J. B. Rosser.

我们还要感谢 Julia Berlet 和 Wilma Wall, 在打印和原稿的准备方面，他们给予了巨大的帮助。

最后，作者深深地感谢编辑 Beatrice Shube, 在长时间完成手抄任务时所给我们的鼓励和耐心的帮助。

A. Ben-Israel

T. N. E. Greville.

1973. 9.

内 容 提 要

本书从统一的观点，提供广义逆的一个概貌，并在多方面说明其理论和应用．其内容有：广义逆的存在与结构；线性方程组与广义逆的表示；广义逆的极小性质；谱广义逆；分块矩阵广义逆；长方形矩阵的谱理论；广义逆的计算；希尔伯特空间中线性算子的广义逆．全书含有多于450个难度不同的习题，其中许多已经作了详细的解答．

读者具有线性代数的基本知识，就可看懂全书．本书既可作为教材，又可作为自学参考．本书适合于大学高年级学生和研究生使用．

目　　录

引言

一　广义逆的存在与结构

二　线性方程组与广义逆的表征

三 广义逆的极小性质

四 谱广义逆

五 分块矩阵的广义逆

六 长方矩阵的谱理论

七 广义逆的计算

八 Hilbert 空间中线性算子的广义逆

引　言

1. 非异矩阵的逆

众所周知，每个非异矩阵A，都唯一存在逆矩阵，其通常记作A^{-1}，使得

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I, \tag{1}$$

其中I为单位矩阵．逆矩阵的许多性质我们仅介绍一些，即

$$(A^{-1})^{-1}=A;\quad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T;$$

$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*;\quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$$

其中A^T和A^*分别表示A的转置和共轭转置．我们回顾一下，实数或复数λ称为方阵A的特征值，而非零向量x称为A相应于λ的特征向量，如果

$$Ax=\lambda x.$$

则逆矩阵A^{-1}的另一个性质是其特征值为A的特征值的倒数．

2. 矩阵的广义逆

只有方阵，而且只有非异方阵才有逆矩阵．换句话说，只有它的列（或行）线性无关才有逆矩阵．在应用数学的许多范围中，最近已经意识到有必要对奇异矩阵乃至对长方矩阵求出某种类型的逆，所谓一给定矩阵A的广义逆，将意味着以某种方式与A联系着的矩阵X，它：(i)，对大于非异矩阵类的矩阵类存在；(ii)具有通常逆矩阵的某些性质；(iii)当A非异时，化为通常逆．也有些作者使用术语“伪逆”而不用“广义逆”一词．

作者对广义逆的描述部分，(iii)的说明是若干作者所给的定义，大意是说，A的广义逆是满足

$$AXA=A \tag{2}$$

的任意矩阵，如果A非异，以A^{-1}左右乘之立刻得出

$$X = A^{-1}$$

3. 说明：线性方程组的可解性

通常矩阵用于解联立线性方程组，设

$$Ax = b \tag{3}$$

是这种方程组。其中 b 是给定向量而 x 是未知向量。如果 A 是非异的，便有由

$$x = A^{-1}b$$

所给的唯一解 x。一般说来，A 可以是奇异的或长方的，方程有时无解或多解。

满足(3)的向量 x 的存在性等价于 b 是 A 的列的某种线性组合。于是便有某向量 h 存在，使得

$$b = Ah$$

若 X 是满足(2)的某矩阵且取

$$x = Xb,$$

则有

$$Ax = AXb = AXAh = Ah = b,$$

从而 x 满足(3)。

如果 A 是 $m \times n$ 阵矩且秩小于 m，便不是这种情况。

然而一般情况，当(3)有多解时，我们想要的不仅是某一解，而是所有解的性质。若 X 是满足 $AXA = A$ 的任何矩阵，则 $Ax = b$ 有解，当且仅当

$$AXb = b,$$

此时一般解为

$$x = Xb + (I - XA)y, \tag{4}$$

其中 y 是任意的。

我们稍后将知道，对于每个矩阵 A，存在一个或多个矩阵 X 满足(2)。

习题

1. 如果A非异且有一特征值λ，而x为其相应的特征向量，证明λ^{-1}是A^{-1}的特征值而且它相应于同一特征向量x。

2. 对任何方阵A，设"广义逆"定义为满足$A^{k+1}X=A^k$的任意矩阵X，其中k为某正整数，若A是非异的，则$X=A^{-1}$。

3. 若X满足$AXA=A$，则$Ax=b$有解，当且仅当$AXb=b$。

4. 证明(4)是$Ax=b$的一般解[提示：首先证明(4)是它的一个解，然后证明每一个解均可表成这种形式。设x是任意解，然后写$x=XAx+(I-XA)x$]。

5. 设A为$m\times n$零矩阵，满足$AXA=A$的矩阵类是什么？

6. 设A为$m\times n$矩阵，除(i,j)位置上的元素是1以外，其它元素都为零。满足(2)的矩阵类是什么？

7. 设A为已知，且设A具有这种性质。即$x=Xb$是$AX=b$的解，且对于一切b使得解存在。证明X满足$AXA=A$。

4. 广义逆的相异性

由习题3,4和7，读者将发现，对于给定的矩阵A，矩阵方程$AXA=A$仅仅表示那些用于分析线性方程组的解的广义逆X。为了其它目的，另外一些关系式起着主要的作用。于是，假如我们涉及最小二乘方性质，(2)便不足于应用而需再进一步补充关系式，所得结果将是受到更多限制的广义逆类。

如果我们对谱性质有兴趣（即关于特征值和特征向量的性质），则考虑方阵是必要的，因只有这种矩阵才有特征值和特征向量。关于此，我们将见到关系(2)仅对矩阵A的有限类起作用，而在一般情况下，需要用其它关系式来代替。

于是与非异情形不同，那里为了任何目的都只有一个逆，而对于奇异矩阵，为了不同的目的，便有不同的广义逆。为了某种

目的，例如在解线性方程组中，不是有唯一的逆，但只要该类中的任何一个矩阵便足够了。

本书不欲详尽无遗，但企图顺次地提出并讨论更有趣而又有用的广义逆类及其性质、最大部分的讨论限于有限矩阵的广义逆。推广到无限维空间和微分与积分算子的情形，这只在第八章里作了简短介绍。关于一般环和半群的伪逆未予讨论。

关于广义逆的文献已经如此浩瀚，以至不可能妥当地安排在大小适度的书中，尤其是广义逆在统计学中的应用，在此未加讨论。我们已经勉强地作了一个细目的挑选。当然，不是每人都赞成我们的作法，为此，我们向那些工作精细的作者致歉。

5. 要求读者所作的准备

读者需要有按本书目录顺序要求的完整的线性代数知识，特别是向量空间。除第八章所研究的 Hilbert 空间外，其他各章所用到的向量空间和线性变换（实的或复的）都是有限维的。

6. 历史注记

广义逆的概念似乎是Fredholm 首先在刊物中介绍的，他给出了积分算子的一个特殊广义逆，他称为“伪逆”。所有伪逆类于 1912 年由 **Hurwitz** 所给出。他应用 **Fredholm** 算子的零空间的有限维数，给出这种逆的一个简单的代数结构（例如，见第八章，习题 19—20）微分算子的广义逆早已由 Hilbert 于 1904 年讨论广义函数时含蓄地提出，从而被许多作者，特别是 **Myller**(1906)，**Westfall**(1909)，**Bounitzky**(1909)，**Euiott**(1928)，**Reid**(1931) 所研究。关于这一课题的历史，见 **Reid** 的优秀综述。

微分和积分算子的广义逆的出现早于矩阵的广义逆。后者的存在性首先被 E. H. Moore 所注意。对于每个有限（方或长方）矩阵，他定义一个唯一的逆，并见称为一般倒式。虽然这一课题是他首次发表。但美国数学界于 1920 年问世的一个谈话纪要认为，

该课题已更早地获得结果．Lanczos 指出 Moore 的定义是 1906 年提出，详细情况的发表是在Moore去世后的 1935 年．Moore 的发现首次发表后的 30 年里．矩阵的广义逆由 Siegel 于 1937年提出．算子的广义逆由 Tseng，Murray 和 Von Neumann 于1936年，和其它作者一起提出．50 年代中期围绕着某些广义逆的最小二乘方的性质（不是由 Moore 介绍的）而开始恢复对这一问题的兴趣的．这些性质由 Bjerhammar 于 1951年所考虑到，他重新发现 Moore 逆，同时也注意到广义逆对线性方程解的关系．1955年，Penrose 加深并推广了 Bjerhammar 关于线性方程组的结果，并证明了给定矩阵的 Moore 逆，是满足下一章里所提到的 4 个方程(1)—(4)的唯一矩阵 X．后一发现是重要和有价值的，今天通称为 Moore-Penrose 逆的一个唯一逆．

1955 年，关于广义逆及其应用的各个方面发表了许多文章．我们不试图进一步追述此课题的历史．

7．关于记号的注释

第 i 章里的方程 j，在第 i 章里记作(i)，而在其它章里记作(i,j)．类似地，第 i 章的定理 j 在第 i 章称为定理 j 而在其他章里称为定理 i,j．类似的规定适用于推论、引理和习题．

一 广义逆的存在与结构

1. Penrose 方程

1955 年，Penrose 指出，对任何实元素或复元素的有限矩阵 A（方阵或长方阵），存在着唯一满足下述四个方程的矩阵 X：

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{3}$$

$$(XA)^* = XA, \tag{4}$$

其中 A^*表示A的共轭转置.由于在此之前，Moore 也曾研究过这种唯一的广义逆（尽管定义方式不同），所以通常就将此广义逆称为 Moore-Penrose 逆，并且记为 A^+.

如果A是非异的，则显然 $X = A^{-1}$ 能简单地满足上述四方程，因为 Moore-Penrose 逆是唯一的（稍后就将证明这一点），所以非异矩阵的 Moore-Penrose 逆与普通逆矩阵是一样的.

本书我们将始终研究满足 Penrose 方程中的一部分（而非全部）的广义逆. 由于我们希望研究这四个方程所组成的集合的若干不同子集所以对于满足某些特定方程的广义逆，我们要引进一种方便的记号，用 $C^{m\times n}$[$R^{m\times n}$]表示$m\times n$复[实]矩阵类.

定义 1 对于任何 $A\in C^{m\times n}$，我们用 $A\{i,j,\cdots,l\}$ 表示 $C^{n\times m}$ 中矩阵X的集合. 它满足方程(1)—(4)中的方程 $(i),(j)$，…，(l).矩阵 $X\in A\{i,j,\cdots,l\}$就称为A的一个$\{i,j,\cdots,l\}$-逆.并且也将它记作 $A^{(i,j,\cdots,l)}$.

在第四章里，我们将扩充这四个方程的方程组，使它包含另外几个方程，但这些方程只能应用于方阵，它们在具有谱性质的广义逆的研究中起着重要的作用，从而扩大了这一记号的范围.

习题

1. 如果 $A\{1,2,3,4\}$非空，那么它只含有一个元素

证明 设 $X,Y\in A\{1,2,3,4\}$。则

$$
\begin{aligned}
X &= X(AX)^* = XX^*A^* = X(AX)^*(AY)^*\\
&= XAY = (XA)^*(YA)^*Y = A^*Y^*Y\\
&= (YA)^*Y = Y.
\end{aligned}
$$

2. 举一（简单的）例子说明 $A\{2,3,4\}$非空。

2. {1}-逆的存在与结构

设 $C_r^{m\times n}[R_r^{m\times n}]$表示秩为 r 的 $m\times n$ 复(实)矩阵类。

定义 2 $C_r^{m\times n}$中的一个矩阵称为 Hermite 标准形（有时也称为行-梯形），如果：

(i) 前 r 行的每一行中至少含有一非零元素，而其余各行则只含有零元素；

(ii) 单位阵 I_m 的前 r 列出现在 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 列。

上一定义与 Marcus 和 Minc 的定义是有点不同的。

一个 Hermite 标准形的矩阵 $H\in C_r^{m\times n}$经过适当的列置换，可变换成分块形式

$$R=\begin{bmatrix} I_r & K\\ O & O\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中 O 表示零矩阵。H 的这种列置换可看作是用一适当的置换矩

*有些作者采用了描述性名称 表示各类广义逆. 可是不同的作者应用这些术语时显然缺乏统一性. 例如, $X\in A\{1\}$被称为广义逆, 假逆{逆$X\in A\{1,2\}$被称为半逆, 倒逆, 自反广义逆. $X\in\{1,2,3\}$被称为规范化广义逆. $X\in A\{1,2,4\}$被称为弱广义逆, $X\in A\{1,2,3,4\}$被称为一般倒式, 广义逆, 假逆, Moore-Penrose 逆. 鉴于这种命名的分歧, 我们在此所采用的无歧义的记号是可取的. 这种记号也强调了我们所考虑的许多广义逆缺乏唯一性.

阵左乘H，如果P_j表示P的第j列，e_j表示I_n的第j列，则有

$$P_j = e_K, \text{ 其中} K = c_j\ (j = 1, 2, \cdots, r).$$

P的其它列就是剩下的单位向量$\{e_K:\ K \neq c_j\ (j = 1, 2, \cdots, r)\}$的任一种排序。

在特殊情况下，分块形式(5)必须作适当的理解，如果$R \in C_r^{m \times n}$，则当$r = n$时，右边两个子阵是没有的；当$r = m$时，下面两个子阵是没有的。

我们可以很容易构造出(5)所给定的矩阵$R \in C^{m \times n}$的{1}-逆。对任意$L \in C^{(n-r) \times (m-r)}$，$n \times m$矩阵

$$S = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix}$$

就是(5)的一个{1}-逆。如果R为列（行）满秩则S中下面（右边）的两个子阵应理解为不存在。

对任一$A \in C^{m \times n}$，通过将A变换成 Hermite 标准形，就可简化A的{1}-逆的结构，现在我们就将看出这一点。

对矩阵A作一初等行变换，是指(i)以一非零元素乘一给定的行，或(ii)对某一行加上另一行的常数倍*.每种如此的变换都可看作是用一称为行初等矩阵的非异矩阵左乘A。行初等矩阵只有一行和同阶单位矩阵的相应行不同。任一矩阵都可通过一系列有限次初等行变换而成为其 Hermite 标准形。按照定义 2，一给定矩阵的Hermite 标准形不是唯一的。但按 Marcu 和 Minc 的定义则是唯一的。

因此对任何矩阵$A \in C_r^{m \times n}$，必有一$m \times m$非异矩阵E（即上述行初等矩阵的积）及一n阶置换矩阵P，使得

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

数值的例子可见后面的习题 6 和 7.

---

* 可表示为一系列(四)(i)型和(ii)型运算的两行的交换有时也称为((iii)型的)初等行运算.

下面的定理描述了 Hermite 标准形在构造秩 $r>0$ 的任一有限矩阵的{1}-逆中的作用.

定理 1 设 $A\in C_r^{m\times n}$, $E\in C_m^{m\times m}$ 和 $P\in C_n^{n\times n}$ 使得

$$EAP=\begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{6}$$

则对任何 $L\in C^{(n-r)\times(m-r)}$, $n\times m$ 阶矩阵

$$X=P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix}E \tag{7}$$

是 A 的一个{1}-逆. (6)和(7)中的分块矩阵在 $r=m$ 或 n 这种情形下应作适当理解.

证明 将(6)重写为

$$A=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}P^{-1}, \tag{8}$$

容易验证, 由(7)所给定的任何 X 均满足 $AXA=A$.

在 $r=0$ 这一简单情形时, A 为 $m\times n$ 零矩阵, 任何 $n\times m$ 矩阵都是一个{1}-逆.

我们注意到, 由于 P 和 E 都是非异的, 故 (7) 所给定的矩阵的秩就等于右边分块矩阵的秩, 并从后一矩阵的形式可以看出

$$\operatorname{rank}X=r+\operatorname{rank}L. \tag{9}$$

因为 L 是任意的, 所以 A 的{1}-逆存在并具有从 r 到 $\min\{m,n\}$ (二者包含在内) 的任一特定的秩.

定理 1 说明了每个复数域上的有限矩阵都有一个{1}-逆, 而且提出了构造此逆的方法.

习题

3. 非异矩阵 A 的 Hermite 标准形是什么? 这时, 矩阵 E 是什么? 它与 A 有什么关系? 置换矩阵 P 是什么? (7)中给出的矩阵 X 是什么?

4. 一个 $m\times n$ 矩阵除第 (i,j) 上的元素为 1 以外, 其它全为

0，它的 Hermite 标准形是怎样的？试说明E可以看作是一置换矩阵。E和P的最简单的选择是怎样的（“最简单”是指与其同阶单位阵的对应元素相异的元素最少。)？利用E和P的这些选择，当L为完全任意时，由(7)所确定的矩阵X具有什么形式？这样的X是A的最一般的{1}-逆吗？

5. 证明每一方阵都有一非异的{1}-逆。

3. {1}-逆的性质

引理 1 给出了{1}-逆的一些性质.对一给定的矩阵A，我们用$A^{(1)}$表示它的任一{1}-逆。注意，一般$A^{(1)}$并非唯一确定的矩阵（见后面习题9）。对任何纯量λ，我们定义λ^+为

$$\lambda^+=\begin{cases}\lambda^{-1} & (\lambda\neq 0);\\ 0 & (\lambda=0),\end{cases}$$

试回忆一方阵E，如果满足$E^2=E$，则称其为幂等的。幂等矩阵与广义逆紧密相关。我们将在第二章里较为详细地来研究它们的一些性质。

引理 1 设$A\in C^{m\times n}$，$\lambda\in C$. 则

(*a*) $(A^{(1)})^*\in A^*\{1\}$.

(*b*) 如果A非异，则$A^{(1)}=A^{-1}$是唯一的（也可见后面习题8）。

(*c*) $\lambda^+A^{(1)}\in(\lambda A)\{1\}$.

(*d*) $\mathrm{rank}A^{(1)}\geqslant\mathrm{rank}A$.

(*e*) 如果S和T为非异的，则$T^{-1}A^{(1)}S^{-1}\in SAT\{1\}$.

(*f*) $AA^{(1)}$和$A^{(1)}A$均为非异的。且与A同秩。

证明 这些结论都是定义关系式(1)的直接推论；(*d*)和(*f*)的后一部分依赖于矩阵积的秩不超过任一因子的秩这一事实。

如果$m\times n$矩阵A是列满秩的，则其{1}-逆就是它的左逆。如果A是行满秩的，则其{1}-逆就是它的右逆。

引理 2 设$A\in C_r^{m\times n}$，则

(*a*) $A^{(1)}A=I_n$当且仅当$r=n$,