



工程模拟实验

陈泽南 杨务滋 张晓光 译

中南工业大学出版社

内 容 简 介

模型的应用作为一种辅助的工程设计被公认是令人满意的。飞机航空器的模型在风洞内的试验和船舶模型在箱体船坞中的试验就为工程界所熟知,更多新的现代化模型在水力学、空气动力学和各种建筑结构学试验方面起着重要的实践作用。

本书提供了实验模型建立的一般原理,以及建立模型的有规律的方法。这种方法在理论及工艺实践中均得到证实,并能用于多种不同的技术领域。论文引用了许多土木的、力学的、工程上的实例来加以说明,并附有较多的插图。

书中作者还广泛地列举了模型试验的许多实际例子。如在箱体内和在风力负载的条件下,作支架梁的结构、水力冲击、金属成型、固体力学、热塑性;流体运动特性的模型试验等。

本书内容的阐述简单明瞭,在许多实验工作中很有价值。大学生、研究人员和工程师们阅读本书后将会确认这一点。

工 程 模 拟 实 验

陈泽南 杨务滋 张晓光 译

李 铁 钢 校

责任编辑:梅敦诗

插图责任编辑:刘楷英

*

中南工业大学出版社出版发行
中南工业大学服务公司印刷厂印刷
湖南省新华书店经销

*

开本:850×1168/32 印张:8.625 字数:208千字

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数:0001—1000

*

ISBN 7-81020-242-1/TB·002

定价:2.05 元

译 者 的 话

高楼、桥梁、大坝、码头、航天器、海洋舰船以及其它许多尖端技术的先进系统的研究设计和对港口河堤土壤的长年淤积浸蚀、海底石油溢出、大气层动态、环境污染、地震、原子核反应、辐射效应等较长过程的现象观测，能够借助于模拟实验的方法描述其动态过程，并能够在时间短、耗资少的条件下，获得可靠的科学依据，发现一些事先没有预料到的新问题，这是专业技术人员所期望的。

本书为模拟实验方法提供了理论基础。作者汇集世界各国著名学者在这一方面成功的论著，从工程或物体运动的量纲分析（简称DA）到无量纲计算，相似模型的设计和实验，结果分析等等，提供了一套全面的系统的模拟计算和设计的方法。

在计算机高度发达的今天，模拟设计、计算和实验过程，多数是可以通过计算机模拟进行的，这样就可以大大地缩短模拟实验的进程。

本书可供大学生、中专师生和从事这方面工作的有关工程专业技术人员参考。

本书由陈泽南（序言、第九章），杨务滋（第一、二、三、七、八章）和张晓光（第四、五、六、十、十一、十二、十三章）翻译，由李铁钢译校。译者学识粗疏，又短于推敲切磋，故错漏之处在所难免，敬请读者惠赐指正，不胜感激。

译 者

一九八八年十月

序

采用模拟实验来探索 and 了解物理系统的性质与性能已经有许多年的历史了。直到本世纪初，模拟实验过程大多按照特定的程序进行，虽然我们通过这些实验取得了满意的效果，然而，我们在实验前一般都主观地抱有专一的目的，因而所取得的实验结果有很大的局限性。

模型和模拟实验更加系统地得到发展的原因可以追溯到科学调查和对自然现象的探索，尤其是对于流场这一领域的研究。在这些所谓的“相似条件”下进行的模拟实验，很快被公认，并在许多工程领域中得到了广泛应用。从此，模拟实验的技术理论得到了更进一步的发展，并形成了物理学和工程学中一个完整的分支。

19世纪初期的傅里叶和大约50年后的雷利，首先正式建立了物理系统的相似原理，其相似条件可从今天众所周知的“无量纲分析”中推导出来。在此基础上，人们不断地试图从理论上进行改进，然而基于抽象的缘故，人们所做的这些努力，从实质上讲都未起到辅助的和补充的作用。但另一方面，无量纲分析和相似原理的基本理论的应用则越来越广泛，其应用以下述两种方式满足了工程上迅速发展的需要：首先，它们已被应用到实验技术中；其次，它们也被普遍地用来对物理现象进行分析研究。

科学发展史表明了相似基本定理的来源是现已众所周知的 π -定理。它最初是由法国人弗伦奇曼、A、韦思奇于1896年提出的。这一定理后来又被许多其他作者重新解释，但是直到1914年白金汉的方程式公布后，这一定理以及它的实用价值才

广泛地为人所知，并得到工程界的公认。此后，人们开始大量搜集这方面的文献资料，这些资料大部分涉及专家们的分析和工艺过程，以及一些理论公式。对于这些理论公式现在已形成两个概念，然而这两个概念的实用性可以说是十分有限的，他们是变量的方向特性（或向量特性）以及质量的二元法则。我们在本书中只简略地讨论这两个概念，并且运用一些实例来说明实验模型使用中严格的局限性。

本书采用概括的方法把模拟实验描述得有条有理，这有可能促进它在科学技术的各个领域中的应用。

虽然在这里仅仅提出一些基本概念和工艺过程，但可以通过广泛的应用实例充分地得到说明。通过精心地选择，一些实际的完善的模型例子（可以说是“传统的例子”）可以作为其他技术领域模拟的范例。在这些领域中，模拟技术相对来说还不很成熟，但很有潜力，例如，对各种地面运输车辆——土质系统的性能预测。

第一章到第四章将简单明瞭地讨论有关物理量的意义、维数及无量纲方程理论，第五章和第六章，我们将对在量纲分析过程中和在模拟设计初期阶段经常碰到的问题进行研究讨论。在第七章中将对物理系统的基本相似理论进行定义，并讨论这样一些基本概念：“标定因子”、“相应概念”和“特征变量”。这一章将不进一步讨论模拟过程中的一些指标，这些指标也包括了可能存在以输入函数的模拟，同时还研究了它们的一致性条件，而这些条件将确保在相似过程中的一些线性关系。另外还必须考虑到“变形”这一问题，而且在给模拟变形下定义和分析它的意义时必须特别谨慎小心，因为经常在运用这一概念时很不严格，并容易误用。本章中我们将详细地用实例来描述变形这一概念，还将以一篇关于常见的相似条件的论文作为本章的结尾，这些相似条件将为工程

实践中大多数模拟问题提供理论基础。

标定效应——由于物理作用的标定独立性或者对所研究的系统的现象不彻底了解而引起的对系统认识的误差和不明——是模拟理论最终的研究课题，第八章将详细讨论这方面的问题。

第九章我们将把从已往经验中获得的理论知识运用到一系列典型的涉及模拟实验的事例中去。这些在各自领域中具有广泛的使用价值的资料都是摘自最新出版的科技文献。读者将会碰到许多用来评价模拟状态的数据及相应的标定规则。一般情况下，这些结果与我们所预计的是相符的，而且我们可能指出其应用范围的局限性。从某种意义上讲，这些事例包括模拟过程和实验过程的实例，这也是从事工程和应用科学工作的广大技术人员颇感兴趣的问题。然而模拟技术的适用范围在很大程度上取决于实验者的能力、经验和想象力。我们希望本章所选的应用实例将会成为相应模拟实验工艺方面的指南，同时我们也期望它为探讨其它新问题起到启发作用。

第十章将提供更多的复杂程度不同的模拟问题的练习。这些练习涉及到广泛的技术领域和物理领域。

第十二章我们将更详细地讨论第七章中已讨论过的输入函数的模拟条件，同时还要讨论关于电磁系统中所用到的物理量和这些物理量的一些定义之间的基本关系。

第十三章给出第十章的习题解答，并且附有注释，可适当增强对这些事例的教学效果。

直至今日，虽然模拟实验这一技术的新应用还处在进步的研究和发展之中，但已获得工业设计的广泛承认。我们发表本篇基础理论论文的目的在于提供一系列关于模型和模拟实验的方法，有关这方面的参考书籍可以说是数百本之多，这方面的参考资料可以从易于理解的科技文献资料和许多专门的科技领

域的研究课题目录中查找到。在本书的结尾,作者列出了本书的参考书目及索引。关于期刊标题的简短目录是经过精选了的,它主要刊载有关模拟实验这类课题的文章,这些最近期号的期刊将成为寻求这方面最新出版物的非常有用的索引。

书中的角码给出了各个例子的参考书目,对于想更进一步研究有关问题的读者是很有裨益的。

这本书主要取材于莫那斯大学本科四年级的教学讲义《工程形态学》。在这本讲义中,建立的相似原理是作为对自然界和人工系统“外形”与“形式”进行广泛研究的基础,并作为动力对其向最优化发展起作用,而且其发展常常越过最优值的范围,直至到达演变周期的最后阶段:消失。在这些演变过程中编者受到了D·阿西·汤姆逊的古典著作“关于生长和造型”^{*}的启发,该著作今天读起来仍象1917年首次出版时那样新颖。由于该著作的缘故,使得一些讲义的内容变得更加深入,更加专门化。尤其对于物理系统和工程系统的研究更是如此。

编者想借此机会感激他们的合作者——约翰·D·C·克里斯浦教授、肯尼茨·H·罕特教授以及乔治·斯威德博士的鼓励和在最后撰写本书时所提出的很有价值的建议。本书的酝酿准备工作得到了莫那斯大学机械工程系的大力支持,编者在此也向他们表示衷心的感谢,同时还应感谢L·莱玲女士在打印手稿时的真诚合作。

本书不仅用于理工科大学的本科生和研究生,同时也适用于那些希望对于模拟实验技术理论和应用有一定程度了解的专业技术人员,而那些希望扩大这方面知识面的读者,则必须事先掌握工科大学第一年所开设的有关应用数学课程的理论知识和物理学或应用力学课程的实践知识。

^{*}剑桥大学出版社, 1966年。

目 录

第一章	绪论：以相似条件为基础的模拟·····	(1)
第二章	单位和量纲·····	(4)
2·1	基本分量与二次分量·····	(4)
2·2	数学算子的量纲·····	(9)
第三章	齐性和量纲的齐次方程·····	(12)
第四章	无量纲方程式·····	(18)
4·1	系统方程法·····	(18)
4·2	雷利方法·····	(20)
4·3	根据白金汉定理或 π 定理推得的方法·····	(23)
第五章	在量纲分析中的变量选择·····	(37)
5·1	地球引力场的作用·····	(38)
5·2	π 系数的减少·····	(40)
第六章	模型在实践中的用途·····	(49)
第七章	相似原理·····	(52)
7·1	全完相似·····	(53)
7·2	系数 λ 的标定·····	(56)
7·3	相应的概念·····	(58)
7·4	特征变量·····	(60)
7·5	模拟程序·····	(62)
7·6	一些常见的相似条件·····	(85)
第八章	标定效应·····	(128)
第九章	实验模型的模拟实例·····	(135)

9·1	负载状态下的结构特性·····	(135)
9·2	流体弹道学·····	(147)
9·3	爆炸金属成型·····	(164)
9·4	固体力学·····	(177)
9·5	热弹性力学·····	(188)
9·6	未装满液体的容器在运动中的晃动·····	(198)
9·7	风力对建筑物和周围环境的作用·····	(207)
第十章	模型设计和量纲分析中的问题·····	(227)
第十一章	参考文献·····	(238)
第十二章	附录·····	(241)
附录 1:	关于模拟中所采纳的函数关系式的注解	(241)
附录 2:	表7·8所定义的电量和磁量之间的关系式	(243)
第十三章	量纲分析模型设计和中的问题解答·····	(246)
索引	·····	(261)

第一章 绪论：以相似条件为基础的模拟

模拟技术可以应用于任何为解决特殊难题需要实验研究的物理系统。

一个物理系统可被理解为一种自然物质世界中工程元素及部件的组合，其以个别或整体的方式将物理输入转换成物理输出。一个“系统”的例子可以是一部整个区域工作的车辆，驾驶在大雪复盖着的土地上。车辆的性能可用给定驱动轴扭矩（输入）时对应的牵引杆拉力（输出）来测得。在这种情况下的输出就是车辆移动拖车或其它的净载重量穿越地带的能力的量度，也同样是车辆设计有效性的量度。此系统的特征可以用实验方法来检测，即使系统处在计划的测试环境中，并观察或测量系统的响应。对于那些大型的并且具有复杂的性质的系统来讲，这样的研究最好是在一个复制的、称为模型的系统中进行。为了经济，方便和节省时间，要求模型具有较小的尺寸。比如飞机，高大的桁架，海洋船只，大坝、码头和桥梁的设计与研制，以及其它许多技术上先进的系统，而对这些系统的性能状态必须有高置信度的预测。然而同样也可能有这样的例子，原系统、称原型系统，是非常小，此时则运用放大了的系统模型以便研究。物理尺子的可变性是模型最重要的特性之一，它的实际价值将在下面的章节里充分地探索。

以用实际尺寸来模拟时，可能提出一个时间的问题——在模型上的试验时间必须与原型所用的时间一样长吗？例如研究

港口逐渐淤塞或河堤逐渐浸蚀的实际过程可能要用许多年。那么实验人员必须花多少年来测量这个模型呢？回答是否定的，因为对于模拟过程来讲，模拟技术提供了时间刻度的‘望远镜’或‘放大镜’，类似于尺寸的缩放。如此，年可以缩短为小时或天，而且想要的数据能在比较短的和方便的时期里得到。

建立在那些模拟实验中的一个必须遵循的条件是模型系统和原型系统遵守相同的物理规律，此外所建立模型系统必须体现所有相关的特性和原型系统部件（如果认为原型系统中某些物理特性与研究的现象无关，则模型的设计和结构通常可以简化，而不致削弱模型的性能）。如果满足这些条件，我们可以指望得到一个唯一的即数值上单值的关系。这一关系存在于原型系统和模型系统的特性之间。因此，任何在模型系统中完成的试验结果可能直接与原型系统有关，于是提供了一个我们寻求的关于原型问题的解法。

原型和模型之间唯一的关系概括地称为相似性。两系统之间的相似条件可以用一个称为量纲分析，有时缩写成DA的程序来确定。正如以后将会看到，这个过程是以这样的事实为基础，即所有在物理和工程方面的通用的关系都可用相似方程表示。当对某一问题的普遍正确的解答方法或机会不是直接可能得到的时候，可以应用量纲分析这一有利条件，即可以利用量纲的同一性的这个特性，允许这一问题从外部着手。（即意味着一点一点地搜集信息但并不深入到物理现象的核心。因此，不一定需要揭示或说明物理过程的本质。）但是，如果要求对这一问题进行充分的研究或回答“为什么？”，这就只能通过解析处理和（或）实验研究来完成了。

总之，要用量纲分析作为一种工具来发现基本的物理（数值）定律是完全无效的。但是用上述量纲分析研究的方法解析处理，在许多情况下变得更为方便。特别在包含非线性的微分

方程的时候，并给定边界条件和初始条件，尤其是如果这种研究是在原型或在适当成比例的模型实验工作之前进行的。

涉及原型和模型的相互关系的技术被称为模拟。从狭义来说，模拟是一种实验技术，它的应用本质上是以量纲为基础。因此这种技术是利用出现在问题中的某些变量的量纲特性，而这些问题是以非量纲变量组合的。这个过程的优点是将揭示在试验设计里哪些是可能简化的；同样也便于简明地表示实验数据系统，也便于概括所限定的试验方案的结果。

而且，应该再次强调，模型试验的结果仅是实验的结果，它不揭示在力方面的物理规律。在第九章建模实例里将看见首先用图表示试验数据、然后绘出通过这些点的一条最好的吻合曲线，以此来归纳试验研究的结果，它是一种通常的作图方法。曲线代表了与问题变量有关的解析方程，要确定方程的常数值，可用一般的方法使一些选择出来的函数的误差减到最小值，或在曲线拟合的时候，使用好的判断办法。方程的选择完全是任意的；在大多数情况下，方程不表示一个普通的物理定律。

在分析或试验研究过程中，通过关于系统信息的应用、可以提高工程的效率，当找到这些有效的信息时，不但模型设计，而且以后的试验工作在一定程度上能被简化。在所有的工程中，这一工作变得十分需要，当然，我们也面临着某些局限性，例如材料的性质复杂而对此了解不够，实验室测试设备的短缺，在财政上和技术上的资源不足以及时间的仓促等等。但一个精心设计的模型和试验方案、通常能够克服这样的困难。本文的目的是在模拟实验的所有方面给读者一个详尽的介绍，以求能帮助达到经济上和技术上可能的解决办法。

第二章 单 位 和 量 纲

2·1 基本分量与二次分量

物理分量的测量是物理和工程的实验操作的一个必不可少的部分，这些分量遵守物理定律，因此在一定程度上相互有关。例如，牛顿第二运动定律与力，质量和加速度的分量有关，所以在牛顿力学中所有运动学方面的测量也与位移和时间有关。考虑加速度的基本定义，可以得出，剩余四个分量（力、质量、位移、时间）仅三个是相互独立的，在测量应用上可以对其中的任何单位自由选择3种。为了达到比较的目的，物理概念“单位”给上升到一种单位“标定”的概念。在事实上，所有物理的测量是根据定义，在两个分量之间比较。测量皮尺，水银温度计，时钟和任何数字计数器，都是用来测量物理分量大小的标定装置。

上述例子中，质量、位移和时间可以被选择作为三种基本独立的量，用来确定任何特定的力的大小。但是，在测量以前，必须采用一个确定质量，位移和时间单位的测量系统（或用加速度代替后面的二个量）。各单位的选择可以完全是任意的，但一般决定于能建立和保持稳定基准的实际物理量，这个物理量可以用来对所有的物理测试量作比较。一旦单位确定，任何组测量的位移，时间（或加速度）和质量的数值代入到运动的牛顿方程中去，就可以得到作用在质量上的力的大小的有用数值。然后利用选择的测试系统来定义力的单位。

这种测量力学中的物理量的大小的方法广泛地揭示了物理测量的单位。规定这样的测量系统的特性要求，在形式上它是目前的基础，该测量系统允许任何物理量的测定。有趣的是在历史上，发现笛斯卡特（1596—1650）曾研究过一个类似的方面，但其出自于一个更广泛的哲学的观点，他根据三个基本概念，即在他那个时期*已为人所知的以空间和时间作为形式和以物质作为真实世界的物质来定义精确的科学研究目标，即是用来描述所有偶然的事件。

当后来牛顿（1642—1727）提出以力学的基础作为一种基本理论的时候，他得到一个相似的结论，但只用于有限的力学领域。他断定在力学上只需要三种类型的测量单位确定任何力的分量的性质或量纲的大小，也就是说任何力的分量都能够由三个基本分量来完全确定。可以概括牛顿的特殊的结论（称为力学）去领会所有的物理现象，即一个物理分量的性质或量纲和基本物理量两者之间的关系可以由物理的定律或特殊的定义给出。

同样可以观察到，遍及物理和工程的这些定律和定义，有一个公共的特性，即他们都表示某一个物理分量的量纲，作为基本分量幂的乘积。举例，物理分量“速度”、“加速度”和“力”的性质定义如下：

$$\text{速度 } v = \text{位移} \times \text{时间}^{-1},$$

$$\text{加速度 } a = \text{速度} \times \text{时间}^{-1} = \text{位移} \times \text{时间}^{-2},$$

及牛顿第二定律给出了力的量纲：

$$\text{力 } F = \text{质量} \times \text{加速度} = \text{质量} \times \text{位移} \times \text{时间}^{-2}$$

这些表达式没有给出各自的物理分量的数值的大小，但单独给出了他们基础分量的关系式。后者也被称为基本分量(P, Q)。

*H. 怀尔(Weyl, H.)著《空间—时间—物质》，多佛尔出版物Inc 1922

'S)。为此，将使用符号 M （质量） L （位移）和 T （时间），重新写出上述表示，令他们

$$\text{速度的性质} = L \times T^{-1},$$

$$\text{加速度的性质} = L \times T^{-2},$$

$$\text{力的性质} = M \times L \times T^{-2}.$$

为了表示同上述一样的关系，只表示物理分量的性质或量纲，而不考虑它的数值。使用矩形括号符号上述关系可以表示如下：

$$[v] = [L \times T^{-1}],$$

$$[a] = [L \times T^{-2}],$$

$$[F] = [M \times L \times T^{-2}].$$

这些被读为速度的量纲是位移除以时间等，由此导出的分量称为二次分量。

1955年10月在重量和质量的国际常会上， $P \cdot Q \cdot 'S$ M ， L 和 T 被用来作为力学*的基本量纲。 M 、 L 和 T 的概念是互相独立的，因为就 M 的概念来说，任何与一个长度量纲结合的可能是 M 里。类似地 L 的概念与时间是独立的并与任何质量关系无关。

一个二次分量的量纲和以上提及的 $P \cdot Q \cdot 'S$ 之间关系在下面可以推导出来。

为此目的，可以利用所有物理和工程的方程在量纲上是同次的这一事实，因为他们表示了在一个具有相同的物理性质的分量之间的比较。假定现在有一个力学方面的物理分量为 x 则用 $P \cdot Q \cdot 'S$ 的关系可以由未知的函数 f （ ）表示如下：

$$x = f(x_M, x_L, x_T),$$

式中 x_M 、 x_L 、 x_T 是 $P \cdot Q \cdot 'S$ 、 M 、 L 和 T 各自的分量，在这里 $P \cdot Q \cdot 'S$ 、 M 以某种确定的方式包含在 x 中。维尔

*G. W. C. 凯伊和 T. H. 拉毕 (Kaye, G. W. C and La by. T. H)
——《物理与化学常量目录》，第13版，伦敦，龙格曼斯 1966年

斯*提出了一个在数学方面的近似定理, 即如果 $f(\quad)$ 在一定的范围里面是一个连续函数, 那么在那个范围里面对于任何精度等级则 $f(\quad)$ 能近似等于一个连续表达式

$$x = f(x_M, x_L, x_T) = c_1 \cdot x_M^{a_1} \cdot x_L^{b_1} \cdot x_T^{c_1} + c_2 \cdot x_M^{a_2} \cdot x_L^{b_2} \cdot x_T^{c_2} + \dots$$

在这里 C_i ($i=1, 2, \dots$) 是无量纲系数。由于方程在量纲上是同次的, 所以必然是

$$a_1 = a_2 = \dots = a; \quad b_1 = b_2 = \dots = b; \quad c_1 = c_2 = \dots = c$$

因此, 方程式可以简写成:

$$x = f(x_M, x_L, x_T) = C \cdot x_M^a \cdot x_L^b \cdot x_T^c.$$

因为 x_M , x_L 和 x_T 是包含在 x 里的 $P, Q, 'S$ 的各自的分量, 它由此得出的结论是:

$$[x_M^a] = [M^a]; \quad [x_L^b] = [L^b]; \quad [x_T^c] = [T^c].$$

于是

$$[x] = [M^a \cdot L^b \cdot T^c],$$

上式证明了上述说法, 一个物理分量的量纲能表示为基本分量 $P, Q, 'S$ 的幂的乘积。此结论对于任何物理量都成立, 并且基于所有物理方程在量纲上是齐次的, 在那些方程里 (无论一次或者二次分量) 的物理分量将简单地称为变量。正如已经证明的那样, 用不超过三个互相独立的分量以量纲来定义任何力学的分量是充分的。以往选择的 M, L 和 T 完全是任意的, 我们可以按照力学里的 $P, Q, 'S$ 作另外的选择, 例如 F, L 和 T 。

一次和二次分量都必须具备一个更进一步的特性: 他们必须是可测的。这一点当然包含在表达式“分量”里面, 但是在某些时候能够被忽略。例如, 温度是分子平均动能的计量单位。然而这种能量不能直接被测量, 因此温度不能用力学单位的量来表示。根据这个理由, 当涉及热量问题的时候热力学温度被用来作为一个独立的 $P, Q, .$ 对于电磁学方面的问题, 需要

*P. 弗兰克和 R. 密斯 (Frank · P and Mises · R) ——《力学与物理的微积分方程》, 第一卷, 第二版, 纽约, 多弗尔出版有限公司 1961 年 PP219-221

同样地开拓，在那里电流被用来作为一个独立的 $P.Q.$ ，在光学测量方面，已经明确地规定发光的强度用来作为一个独立的 $P.Q.$ ，国际上采用SI系统包括整个工程系统，明确地规定六种 $P.Q.$ ： S, M, L, T, θ （温度），电流和光的温度在它们各自的范围里面作为标准单位，并与此同时准确地叙述这些单位的大小是如何测量的。

泰尔曼*和其他的人已经表达了关于 $P.Q.$ 特性 的一个完全不同的观点，他们强调在“广泛的”和“密集的”量之间的差别，前者有一个确定了的辅带的性质。如质量，位移，体积等等（这意味着如果物体1数量为 A_1 ，物体2数量为 A_2 ，两个物体一起将有值 $A_1 + A_2$ ），相反密集量不具有这种特征，例如温度，压力、密度等等。泰尔曼介绍的 $P.Q.$ 将有广泛的特性，以便能“用简单的，适当的组合方法来计算所有的数量的基本种类。”因而上述的讨论表明以上的差别与 $P.Q.$ 是不相干的，只要“宏观的”所有的物理量的可测性条件被满足。

$P.Q.$ 必须符合的必要条件可以概括如下：

- (1) 它们必须是互相独立的。
- (2) 它们必须是可测的。
- (3) 选择的 $P.Q.$ 对于确定每一变量时所考虑的量纲在数量方面必须是充分的。

当然一次和二次分量在属于同一测试系统的测量单位所表示的一致性主要的。例如不管选择lb、ft、s或kg、m、s。值得注意的是在任何一种情况里确定一个变量大小，测量单位的数量仅只有相对的意义，这是由于它自然地取决于测试系统的型式选择；例如，一事件持久两小时有数字“2”与小时数量有关，然而如果选择秒作为测量单位，那么数字已变成“7200”。但是，如果对两事件的间隔进行比较，譬如一个保

* R.C.托尔曼 (Tolman, R.C.) ——《物理的可测分量》，物理评论第四卷1917年PP237-253