张钟俊教授

论文集

ZHANGZHONGJUN JIAOSHOU LUNWEN JI（第二卷）

张钟俊教授论文集

第　二　卷

上海交通大学出版社

内 容 简 介

《张钟俊教授论文集》第二卷收录了1977年以来在国内期刊或杂志上所发表的论文二十八篇。这些论文分别属于线性系统应用、系统测辨、建模方法、能源系统、经济控制论、大系统简化、广义系统、大系统多目标优化方法、非线性系统、机器人控制等十大类。这些论文是由张钟俊教授及其同行、同事和研究生们合著的，他们是张启人教授，杨翠莲、施颂椒、李静如、华兆麟、袁天鑫、黄午阳、陈陈、周斯富、王志中、吴修敬、葛自良、杨培庆、蔡自兴等十三位副教授，白尔维、黄怡平、姚勇、王跃云、杨剑波等五位博士及陈联淦、李东风、关业林、尹国辉等四位硕士。

张钟俊教授论文集

第二卷

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂排版印装

开本：787×1092毫米1/16　印张16.75　字数413,000

1988年2月第1版　　1988年5月第1次印刷

印数 1—2700 册

ISBN 7-313-00059-6/N 94　　科技书目159—311

定价 4.00 元

张钟俊教授小传

上海交通大学电子电工学院张钟俊教授是中国科学院技术科学部学部委员。他是我国自动化技术领域里杰出的带路人之一，也是最早把系统工程和微型电脑技术引进我国并大力提倡的科学家之一。他从事教育事业48年，桃李满天下，许多学生已成为著名教授、总工程师，有的学生已担负了国内几所大学校长的重任。

解放前，我国工科大学能培养硕士研究生的只有清华、交大两所学校。他所培养的电类硕士研究生要占一半以上。解放后，他以更大的精力培养硕士和博士研究生。仅粉碎“四人帮”后，就有25位硕士研究生和9位博士研究生毕业，其中有3位已提升为副教授。

张钟俊教授以毕生精力从事教育科研的同时，还热心参加和推动社会学术活动。曾担任中国自动化学会副理事长、中国系统工程学会副理事长。现在他还主持我国系统工程学会教学与普及的工作，担任上海市微型电脑应用学会理事长等职务。

张钟俊教授生于1915年9月，浙江省嘉善县人。他1930年考入交通大学电机学院。1934年二十岁时毕业，获电机工程学士，后获中美文化教育基金资助赴美国麻省理工学院电工系深造，获得电工硕士学位和科学博士学位。1938年，他在麻省理工学院所作的博士论文《单相电机的短路分析》，在国内、外获得很高的评价。这篇论文在1941年中国电机工程学会年会上被评为最优论文，获一等奖 .

40多年来，张钟俊教授为祖国的教育事业和科研事业倾注全部心血，成绩卓著。他所取得的丰硕的科技成果，连同他那崇高的理想、开拓的精神、严谨的学风和负责的方法等，都将作为世之珍宝永远留在人们心中。

(节录自《科技精华》“为祖国献身的科学家”，1987年)

目　录

第三部分　论　文（国内）

论 文

线 性 系 统

设计最低阶多线性函数观测器的新方法

提 要

本文讨论对连续线性时不变多输入、多输出系统设计多线性函数观测器的时域方法。用此法设计的观测器具有最低动态阶数，且极点可以任意配置。本文提供的算法不仅可用于设计多输入多输出系统的最低阶多线性函数观测器，而且也可用于设计多输入多输出系统(简称多变量系统)的降阶状态观测器。

一 引 言

在自动控制理论中，状态反馈得到广泛的应用。1964 年 Luenberger 提出的渐近状态观测器可以用来实现状态反馈。在极点配置、最佳化等问题中，需要进行状态向量的线性变换，因此，近年来人们致力于研究低阶和最低阶多线性函数观测器。1966 年 Luenberger 首先论述了多变量系统低阶单线性函数观测器的设计问题。1972 年 Fortmann 和Williamson 创立了单变量系统的最低阶多线性函数观测器的设计方法。1975 年Roman 和 Bullock 利用实现理论首先解决了多输入多输出系统的最低阶多线性函数观测器的设计问题。

本文采用比较简单的数学工具，建立为多变量系统设计具有任意极点的各种观测器(包括最低阶单线性和多线性函数观测器以及降阶状态观测器)的普遍适用的时域方法。

二 观测器的基本理论

设被观测的连续线性时不变多变量系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}. \tag{2.1b}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是 $n\times 1$ 状态向量，$\boldsymbol{u}$ 是 $q\times 1$ 输入向量，$\boldsymbol{y}$ 是 $p\times 1$ 输出向量，A, B, C 分别是阶数合适的矩阵。

观测器是用来近似地重建被观测系统的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 或它的线性变换 $K\boldsymbol{x}(t)$ 的，K 是常数阵。观测器的方程为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = F\boldsymbol{z} + G\boldsymbol{y} + H\boldsymbol{u}, \tag{2.2a}$$

$$\boldsymbol{w} = E\boldsymbol{z} + L\boldsymbol{y}. \tag{2.2b}$$

式中 $\boldsymbol{z}$ 是观测器的 $m\times 1$ 状态向量，$m<n$, m 待定。$\boldsymbol{w}$ 是观测器的输出向量。当观测器用于状态反馈时，$\boldsymbol{w}$ 与原系统的输入 $\boldsymbol{u}$ 有相同的维数。F, G, H, E, L 分别是阶数合适的矩

阵。

定理 2.1 设系统(2.1)完全可观，系统(2.2)的输出向量是 $K\boldsymbol{x}$ 的渐近估计值，当且仅当下列条件成立：

1) F 阵是稳定的； (2.3)

2) $H=TB$； (2.4)

3) $TA-FT=GC$； (2.5)

4) $ET+LC=K$. (2.6)

式中 T 是 $m\times n$ 常数阵。当 A 和 F 没有相同特征值时，T 的解唯一存在。

当条件(2.3)-(2.5)得到满足时，观察器的状态向量 $\boldsymbol{z}$ 渐近收敛于系统状态向量的线性变换 $T\boldsymbol{x}$，即

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{z}(t)-T\boldsymbol{x}(t)]=0. \tag{2.7}$$

三 最低阶多线性函数观测器

1. 多线性函数观测器的方程式

设多变量系统(2.1)是完全可观的，利用状态向量变换 $\boldsymbol{x}=Q\bar{\boldsymbol{x}}$，$Q$ 为非奇异矩阵，把给定的系统(A, B, C)变换为可观标准形$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$的等价系统：

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\bar{A}\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{B}\boldsymbol{u}, \tag{3.1a}$$

$$\boldsymbol{y}=\bar{C}\bar{\boldsymbol{x}}. \tag{3.1b}$$

式中

$$\bar{A}=Q^{-1}AQ=[\boldsymbol{n}_2\cdots\boldsymbol{n}_{\sigma_1}\boldsymbol{\alpha}_1 \vdots \boldsymbol{n}_{\sigma_1+2}\cdots\boldsymbol{n}_{\sigma_2}\boldsymbol{\alpha}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{n}_{\sigma_{p-1}+2}\cdots_{\sigma_p}\boldsymbol{\alpha}_p], \tag{3.2a}$$

$$\bar{C}=CQ=[0\cdots0\,\boldsymbol{c}_1 \vdots 0\cdots0\,\boldsymbol{c}_2 \vdots \cdots \vdots 0\cdots0\,\boldsymbol{c}_p], \tag{3.2b}$$

$$\bar{B}=Q^{-1}B. \tag{3.2c}$$

这里 $\boldsymbol{n}_i$ 是 n 阶单位阵的第 i 列向量，即

$$\boldsymbol{n}_i^T=[0\cdots0\,1\,0\cdots0], \tag{3.3}$$

其中第 i 列元素为 1，其余元素皆为零。

$$\sigma_i=\sum_{j=1}^{i}d_j,\ i=1, 2, \cdots, p,\ (\sigma_p=n). \tag{3.4}$$

正整数 $d_j(j=1, 2, \cdots, p)$是系统(2.1)的可观性指数组。

$\boldsymbol{\alpha}_i$ 和 $\boldsymbol{c}_i(i=1, 2, \cdots, p)$ 是非零的 $\boldsymbol{n}$ 维列向量。且 $\boldsymbol{c}_i$ 具有特定的形式：$\boldsymbol{c}_i^T=[0\cdots0\,1\,\times\cdots\times]$。这里第 i 列元素为 1，符号 $\times$ 表示可能的非零元素。

把系统(2.2)作为等价系统(3.1)的观测器，根据定理 2.1，得到下列关系式：

$$H=\bar{T}\bar{B}, \tag{3.5}$$

$$\bar{T}\bar{A}-F\bar{T}=G\bar{C}, \tag{3.6}$$

$$E\bar{T}+L\bar{C}=\bar{K}, \tag{3.7}$$

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{z}(t)-\bar{T}\bar{\boldsymbol{x}}(t)]=0. \tag{3.8}$$

观测器(2.2)的输出向量 $\boldsymbol{w}$ 是等价系统(3.1)的状态向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的线性函数 $\bar{K}\bar{\boldsymbol{x}}$ 的渐近估计值.

若令

$$\overline{K}=KQ, \tag{3.9}$$

K 是预先指定的常数阵，则 $\boldsymbol{w}$ 收敛于 $K\boldsymbol{x}$。这样，输出向量 $\boldsymbol{w}$ 可直接用于原系统(2.1)的状态反馈之中。

为了便于讨论，采用下列符号：

$$\overline{T}=[\boldsymbol{t}_1\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1}\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_2}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p}], \tag{3.10a}$$

$$\widetilde{T}=[\boldsymbol{t}_1\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1-1}\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_2-1}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{t}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p-1}], \tag{3.10b}$$

$$\check{T}=[\boldsymbol{t}_{\sigma_1}\boldsymbol{t}_{\sigma_2}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p}]; \tag{3.10c}$$

$$\overline{K}=[\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1}\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_2}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_p}], \tag{3.11a}$$

$$\widetilde{K}=[\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1-1}\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_1+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_2-1}\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{k}_{\sigma_{p-1}+1}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_p-1}], \tag{3.11b}$$

$$\check{K}=[\boldsymbol{k}_{\sigma_1}\boldsymbol{k}_{\sigma_2}\cdots\boldsymbol{k}_{\sigma_p}]; \tag{3.11c}$$

$$\check{A}=[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_p]; \tag{3.12a}$$

$$\check{C}=[\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\cdots\boldsymbol{c}_p]. \tag{3.12b}$$

这里 $\check{T}$, $\check{K}$, $\check{A}$, $\check{C}$ 分别是由矩阵 $\overline{T}$, $\overline{K}$, $\overline{A}$, $\overline{C}$ 的第 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_p 列向量构成的 p 列子阵；$\widetilde{T}$, $\widetilde{K}$ 分别是由矩阵 $\overline{T}$, $\overline{K}$ 划去第 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_p 列向量后构成的 $(n-p)$ 列子阵。$p\times p$ 子阵 $\check{C}$ 具有特定的形式：

$$\check{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \times & 1 & \cdots & 0\\ \times & \times & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \times & \times & \cdots & 1\end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

它是主对角线元素为1的下三角矩阵，故它的逆阵 $\check{C}^{-1}$ 总是存在的。

根据已知的 $\overline{A}$, $\overline{C}$ 和 $\overline{K}$ 确定 $\overline{T}$，是设计观测器的核心问题。把 $\overline{A}$, $\overline{C}$ 和 $\overline{T}$ 的表达式(3.2a)，(3.2b)和(3.10a)代入式(3.6)中，经展开并项后，比较等式两边相应的列向量，得到

$$\overline{T}\check{A}-F\check{T}=G\check{C}, \tag{3.14}$$

$$\check{T}=F[\boldsymbol{t}_{\sigma_1-1}\boldsymbol{t}_{\sigma_2-1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p-1}], \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{t}_{i+1}-F\boldsymbol{t}_i=0,\ i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ \sigma_1-2,\ \sigma_1+1,\ \cdots,\ \sigma_2-2,\ \sigma_2+1,\ \cdots,\ \sigma_p-2\}. \tag{3.16}$$

这里 i 是数集$\{1,\ \cdots,\ \sigma_p-2\}$中的$(n-2p)$个元素($i$ 值的确定方法见第四节)。式(3.16)是一个齐次方程组，它包含了 $\widetilde{T}$ 的全部列向量。不难看出，这个方程组的系数矩阵是满秩的，而且它只与矩阵F有关，而与矩阵 $\overline{A}$, $\overline{C}$ 和 $\overline{K}$ 无关。方程组(3.16)称为 $\widetilde{T}$ 的动态约束方程组。

设 n 维状态向量空间 R^n 的一组标准正交基是

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{n}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots\boldsymbol{n}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

令 $\overline{C}^T$ 是 $\overline{C}$ 的转置矩阵，则值域空间(range space) $R(\overline{C}^T)$ 和零空间 (null space) $N(\overline{C})$ 可表

示为

$$R(\overline{C}^T)=\mathrm{Span}(\boldsymbol{n}_{\sigma_1},\ \boldsymbol{n}_{\sigma_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{\sigma_p}),\tag{3.18}$$

$$N(\overline{C})=\mathrm{Span}(\boldsymbol{n}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{\sigma_1-1},\ \boldsymbol{u}_{\sigma_1+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{\sigma_2-1},\ \boldsymbol{n}_{\sigma_2+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_{\sigma_p-1}).\tag{3.19}$$

显然，$R(\overline{C}^T)$和 $N(\overline{C})$互为正交补。n 维状态向量空间 R^n 可以表示为两个互相正交的子空间 $R(\overline{C}^T)$和 $N(\overline{C})$的直和，即

$$R^n=R(\overline{C}^T)\oplus N(\overline{C}).\tag{3.20}$$

这里 $R(\overline{C}^T)$是 p 维子空间，$N(\overline{C})$是$(n-p)$维子空间。

把式(3.2b)，(3.11a)和(3.10a)代入式(3.7)中，得到

$$E\check{T}+L\check{C}=\check{K},\tag{3.21}$$

$$E\widetilde{T}=\widetilde{K}.\tag{3.22}$$

式(3.22)表明，矩阵 $\widetilde{K}$ 的 q 个行向量 $\widetilde{\boldsymbol{k}}_1',\ \widetilde{\boldsymbol{k}}_2',\ \cdots,\ \widetilde{\boldsymbol{k}}_q'$ 是矩阵 $\widetilde{T}$ 的m个行向量 $\widetilde{\boldsymbol{t}}_1',\ \widetilde{\boldsymbol{t}}_2',\cdots,\ \widetilde{\boldsymbol{t}}_m'$ 的线性组合。设$\widetilde{K}$ 的线性无关的行向量个数为 q_0，$q_0=\mathrm{rank}\ (\widetilde{K})$，则 q_0 维值域空间 $R\ (\widetilde{K}^T)$是m维值域空间 $R(\widetilde{T}^T)$的一个子空间，即

$$R(\widetilde{K}^T)\in R(\widetilde{T}^T).\tag{3.23}$$

这样，$\widetilde{T}$ 的m个行向量中必有 q_0 个行向量(为了讨论方便，假定 $\widetilde{T}$ 的前 q_0 个行向量)，是值域空间 $R(\widetilde{K}^T)$的一组基向量。把这组基向量作为行向量构成一个 $q_0\times(n-p)$矩阵 T_0，

$$T_0=\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{t}}_1'\\ \widetilde{\boldsymbol{t}}_2'\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{t}}_{q_0}'\end{bmatrix},\tag{3.24}$$

则

$$R(T_0^T)=R(\widetilde{K}^T).\tag{3.25}$$

式(3.25)表明，T_0 和$\widetilde{K}$的行向量组相互等价。

同样，把$(n-p)$维子空间 $N(\overline{C})$进一步表示为两个正交子空间的直和：

$$N(\overline{C})=R(\widetilde{K}^T)\oplus N(\widetilde{K}),\tag{3.26}$$

$$N(\overline{C})=R(T_0^T)\oplus N(T_0).\tag{3.27}$$

考虑到式(3.25)和子空间正交补的唯一性，故有

$$N(\widetilde{K})=N(T_0).\tag{3.28}$$

这里 $R(\widetilde{K}^T)$，$R(T_0^T)$是 q_0 维的，$N(\widetilde{K})$，$N(T_0)$是$(n-p-q_0)$维的。

设$(n-p)\times 1$ 列向量 $\boldsymbol{s}_k(k=1,2,\cdots,n-p-q_0)$是子空间$\widetilde{N}(K)$和$N(T_0)$的一组基向量，则

$$\widetilde{K}\boldsymbol{s}_k=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0,\tag{3.29}$$

$$T_0\boldsymbol{s}_k=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0.\tag{3.30}$$

可见，基向量组 $\boldsymbol{s}_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0)$是齐次方程组 (3.29) 的基础解系。它们可以根据给定的 $\widetilde{K}$ 阵求出。

把 T_0 的行向量表达式(3.24)代入式(3.30)中，得到

$$\widetilde{\boldsymbol{t}}_j'\boldsymbol{s}_k=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ q_0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0.\tag{3.31}$$

此齐次方程组的系数矩阵是由另一齐次方程组(3.29)的基础解系构成的，所以它是满秩的，

且只与指定的 $\overline{K}$ 阵有关，而与矩阵 $\overline{A}$，$\overline{C}$，F 无关。齐次方程组(3.31)是根据观测器的输出收敛于 $\overline{K}\boldsymbol{x}$ 的要求导出的，故称它为 $\widetilde{T}$ 的输出约束方程组。

联立求解 $\widetilde{T}$ 的动态约束方程组(3.15)和输出约束方程组(3.31)，可以求得 $\widetilde{T}$ 的 m 个行向量，令

$$\widetilde{T}=\begin{bmatrix} T_0 \\ \cdots \\ \widetilde{\boldsymbol{t}}'_{q_0+1} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{t}}'_m \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$E=[E_0 \vdots 0\cdots 0]。 \tag{3.33}$$

式中 E_0 是 $q_0\times q_0$ 子阵。把式(3.32)和(3.33)代入式(3.22)中，得到 $E_0T_0=\widetilde{K}$。因 T_0 是满秩的，逆阵 $(T_0T_0^T)^{-1}$ 存在，故有

$$E_0=\widetilde{K}T_0^T(T_0T_0^T)^{-1}。 \tag{3.34}$$

综上所述，计算多变量系统的多线性函数观测器全部参数的方程式和表达式为：

$$\widetilde{K}\boldsymbol{s}_k=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0。 \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{t}_{i+1}-F\boldsymbol{t}_i=0,\ i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ \sigma_1-2,\ \sigma_1+1,\ \cdots,\ \sigma_2-2,\ \sigma_2+1,\ \cdots,\ \sigma_p-2),\tag{3.36a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{t}}'_j\boldsymbol{s}_k=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ q_0。\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0,\tag{3.36b}$$

$$\check{T}=F[\boldsymbol{t}_{\sigma_1-1}\boldsymbol{t}_{\sigma_2-1}\cdots\boldsymbol{t}_{\sigma_p-1}],\tag{3.37}$$

$$E_0=\widetilde{K}T_0^T(T_0T_0^T)^{-1},\tag{3.38}$$

$$E=(E_0 \vdots 0\cdots 0],\tag{3.39}$$

$$G=(\overline{T}\check{A}-F\check{T})\check{C}^{-1},\tag{3.40}$$

$$L=(\check{K}-E\check{T})\check{C}^{-1},\tag{3.41}$$

$$H=\overline{T}\overline{B}。\tag{3.42}$$

2. 多线性函数观测器动态阶数的下限

观测器的动态阶数 m 就是其动态矩阵 F 的阶数，也等于 $\overline{T}$ 阵的行向量的个数。根据式(3.23)可得

$$m\geqslant q_0=\text{rank}(\widetilde{K})。\tag{3.43}$$

方程组(3.36)以 $\widetilde{T}$ 的全部元素作为未知数，其总数是 $m(n-p)$。当 $d_i\geqslant 2$，$i=1$，2，$\cdots$，p 时，动态约束方程组(3.36a)含有方程式 $m(n-2p)$ 个；输出约束方程组(3.36b)含有方程式 $q_0(n-p-q_0)$ 个。故 $\widetilde{T}$ 的方程组所包含方程式的总数是 $m(n-2p)+q_0(n-p-q_0)$。如上所述，式(3.36a)和(3.36b)的系数矩阵是满秩的。前者只与 F 阵有关，后者只与 $\widetilde{K}$ 阵有关。因此，在 F，$\widetilde{K}$ 为任意的情况下，方程组(3.36)的系数矩阵也是满秩的。这样，$\widetilde{T}$ 有非零解的必要条件是方程组(3.36)的未知数的总数大于方程式的总数。故得到

$$m>q_0(n-p-q_0)/p,\ 当\ d_i\geqslant 2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p。\tag{3.44}$$

同时考虑式(3.43)和(3.44)就得到观测器阶数的下限 $m_{\min}$ 的表达式

$$m_{\min}=\max(q_0,\ q_1)。\tag{3.45}$$

式中

$$q_1 = 1 + \mathrm{INT}[q_0(n-p-q_0)/p],\ d_i \geqslant 2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p. \tag{3.46}$$

这里 $\mathrm{INT}[\cdot]$ 表示不大于方括号内的数的最大整数。

当 q_0 或 $q_1 \geqslant n-p$ 时，应先建造 $(n-p)$ 阶的降阶状态观测器，然后再构成估计 $K\boldsymbol{x}$ 的多线性函数观测器。因此，观测器阶数的上限 $m_{\max}$ 是

$$m_{\max} = n-p. \tag{3.47}$$

综上所述，得到

定理 3.1 设系统 $(A,\ B,\ C)$ 完全可观，$\overline{T}$ 是联系它的等价系统 $(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C})$ 的状态向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和多线性函数观测器的状态向量 $\boldsymbol{z}$ 的 $m \times n$ 矩阵，则使 $\widetilde{T}$ 的齐次方程组 (3.36) 有非零解和 $\widetilde{T}$ 的子阵 T_0 满秩的 m 的最小值就是系统 $(A,\ B,\ C)$ 的 $K\boldsymbol{x}$ 的多线性函数观测器的最低动态阶数。m 值仅与预先指定的矩阵 $\overline{K}$ 的子阵 $\widetilde{K}$、选定的动态特性矩阵 F 以及系统的可观性指数组 $d_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 有关。

四 算法与举例

1. 最低阶多线性函数观测器的算法

1) 把待观测系统 $(A,\ B,\ C)$ 化为可观标准形的等价系统 $(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C})$，找出变换矩阵 Q 和可观性指数组 $d_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$。然后利用式 (3.2) 和 (3.9) 求得 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 和 $\overline{K}$。若 C 阵非满秩，应将其中线性相关的行向量划去，仅保留线性无关的行向量组。当出现 $d_i=1$，$i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$ 时，仅需考虑原系统中与 $d_i>1$，$i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$ 相联系的那些状态变量组成的子系统。

2) 由式 (3.43)，(3.45)，(3.46)，(3.47) 确定观测器动态阶数的上限和下限。

3) 确定观测器的动态特性矩阵 F。设 $m=m_{\min}$，选定 m 个特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m$，则特征多项式是

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m) = \lambda^m + f_1\lambda^{m-1} + \cdots + f_{m-1}\lambda + f_m.$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & f_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & f_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & f_1 \end{bmatrix}.$$

这里，F 和 A 不应有相同的特征值。

4) 找出零空间 $N(\widetilde{K})$ 的基向量组 $\boldsymbol{s}_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0)$。

齐次方程组 $\widetilde{K}\boldsymbol{s}_k=0(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-p-q_0)$ 的基础解系就是待求的基向量组。

5) 确定线性变换 $\overline{T}$，求解多线性函数观测器的齐次方程组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}_{i+1} - F\boldsymbol{t}_i = 0,\ i \text{ 在 } \{1,\ \cdots,\ \sigma_1-2,\ \sigma_1+1,\ \cdots,\ \sigma_2-2,\ \sigma_2+1,\ \cdots,\ \sigma_p-2\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{中选 } (n-2p) \text{ 个。} \\ \tilde{\boldsymbol{t}}_j'\boldsymbol{s}_k = 0, \qquad j \text{ 在 } \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \text{ 中任意选 } q_0 \text{ 个；} k=1,\ 2,\ \cdots, n-p-q_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

必须指出，i 的可能取值范围是下列 p 个子集：$\{1,\ 2, \cdots,\ \sigma_1-2\}$，$\{\sigma_1+1,\ \sigma_1+2, \cdots, \sigma_2-2\}$，$\cdots$，$\{\sigma_{p-1}+1,\ \sigma_{p-1}+2,\ \cdots,\ \sigma_p-2\}$。具体的算法是依次计算每个子集的首末两个元素。若末元素大于首元素，则补充中间元素使成为自然数集，它的每个元素都是 i 的取值；若首、末元素相等，则只有首元素是 i 的取值；若首元素大于末元素，则该子集不是 i 的取值。

如果无论如何选择 j 的值，上述齐次方程组均无非零解，则需要把 m 值增加 1，然后返回到第 3 步。

适当选定齐次方程组的自由未知数和下标 j 的值，使求出的子阵 T_0 的各行向量线性无关。下标 j 值的选择应使齐次方程组 (4.1) 的系数矩阵出现零列向量的个数为最少。

对于降阶状态观测器，$m=n-p$，$K=I_n$（n 阶单位阵）。因此，$\overline{K}=Q$，$q_0=\mathrm{rank}(\widetilde{K})=n-p$。这时零空间 $N(\widetilde{K})$，$N(T_0)$ 消失。$\widetilde{T}$ 和 T_0 都变成为 $(n-p)$ 阶方阵。考虑到 $(n-p)$ 阶单位阵 I_{n-p} 的行向量组是满秩子阵 $\widetilde{K}$ 的值域空间 $R(\widetilde{K}^T)$ 的一组基向量，所以，当计算降阶状态观测器时，可取 $\widetilde{T}=T_0=I_{n-p}$。

6）由式(3.37)—(3.42)确定矩阵 E，G，L 和 H。对于降阶状态观测器，$E=\widetilde{K}$。

2. 举例

例 1. 已知完全可观的多输入多输出系统

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),\quad \overline{B}=\left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right),\quad \overline{C}=\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

指定 $\overline{K}=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$，试设计具有预期特征值的最低阶多线性函数观测器。

1）给定的系统已是可观标准形。$n=5$，$p=2$，$q=2$，$d_1=3$，$d_2=2$。

2）$m_{\max}=n-p=5-2=3$，$q_0=\mathrm{rank}(\widetilde{K})=2$。$q_1=1+\mathrm{INT}\,[q_0(n-p-q_0)/p]=1+1=2$。所以，$m_{\min}=\max(q_0,\ q_1)=2$。

3）令 $m=2$，预期特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$（非 $\overline{A}$ 的特征值），则 $F=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$。

4）找基向量组 $s_k(k=1)$。$\widetilde{K}s_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}s_1=0$，$s_1=[-3\ 1\ 1]^T$。

5）求解 $\widetilde{T}$ 的齐次方程组。$i=1$；$j=1,\ 2$；$k=1$。

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}_2=F\boldsymbol{t}_1=0, \\ \widetilde{\boldsymbol{t}}_1'\boldsymbol{s}_1=0, \\ \widetilde{\boldsymbol{t}}_2'\boldsymbol{s}_1=0. \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{t}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，解之可得 $\boldsymbol{t}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$和 $\boldsymbol{t}_4=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$。

$$\widetilde{T}=\boldsymbol{T}_0=[\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2 \mid \boldsymbol{t}_4]=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

不难看出，$\widetilde{T}$ 的两个行向量线性无关。

$$\check{T}=[\boldsymbol{t}_3\boldsymbol{t}_5]=F[\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_4]=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{T}=[\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_3 \mid \boldsymbol{t}_4\boldsymbol{t}_5]=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

6) 计算矩阵 E, G, L 和 H。

$$E=E_0=\tilde{K}\tilde{T}^T(\tilde{T}\tilde{T}^T)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&4\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\3&-1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\3&-1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}.$$

$$G=(\bar{T}\check{A}-F\check{T})\check{C}^{-1}=\left\{\begin{bmatrix}1&0&-1&3&1\\0&1&-2&-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&6\\1&-1\\0&0\\1&2\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-2&5\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}18&17\\-2&6\end{bmatrix}.$$

$$L=(\check{K}-E\check{T})\check{C}^{-1}=\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-2&5\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}5&5\\-2&-6\end{bmatrix}.$$

$$H=\overline{TB}=\begin{bmatrix}1&0&-1&3&1\\0&1&-2&-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\\1&0\\-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&1\\-1&6\end{bmatrix}.$$

不难看出，矩阵 G, H, E, L 的解不是唯一的，但每一组解都构成一个最低阶多线性函数观测器。它的输出量等于原系统的状态估值向量 $\hat{x}$ 的线性变换 $K\hat{x}$。当 $K=I_n$ 时，得到降阶状态观测器。它的输出量就是原系统的状态估值向量 $\hat{x}$。可见，利用本方法设计降阶状态观测器不仅计算便捷，而且观测器的结构也简单。

五　结　论

本文发展了一种对连续线性时不变多输入多输出系统设计最低阶多线性函数观测器的时域方法。用此法设计出来的观测器具有最低的动态阶数，且它的极点可以任意配置。

本文提供的算法是直接从多变量系统得出的，推导过程中利用了多变量系统动力学方程的可观标准形，但不是利用它把多变量系统分解为若干个单输出的子系统。使用可观标准形的目的是利用它能把多变量系统的全部信息集中于系统矩阵 $\bar{A}$ 和 $\bar{C}$ 的某些特定列上的性质，从而把最低阶多线性函数观测器的不易求解的矩阵方程，变换为易于求解的齐次方程组和一些简单的矩阵运算。用这种算法求出的多变量系统观测器的参数矩阵不是唯一的，但它们都是最低阶的。

本文提供的算法，不仅适用于计算多输入多输出系统的最低阶多线性函数观测器，而且也可用于设计多输入多输出系统的单线性函数观测器和降阶状态观测器以及多变量单输出系统的各种观测器。在使用本方法时，实际上不必区分单输出和多输出系统、线性函数观测器和降阶状态观测器以及单线性函数和多线性函数观测器，因为本方法是一种设计观测器的普遍适用的方法。

（转录自《自动化学报》1983 年第 9 卷第 1 期　　合著者：陈联淦）

Rosenbrock 最小实现算法的改进与发展

提　要

在研究线性时不变多变量系统时，由已知的传递函数 $G(s)$ 求得其最小实现是线性系统理论的基本问题之一。60 年代以来已发表了一些论文。

本文的一个内容是改进 Rosenbrock 的最小实现算法，以降低运算时矩阵的阶数和减少运算工作量。又由于 Rosenbrock 的最小实现算法所得到的不是标准形，所以本文的另一个内容是对获得 Luenberger 标准形提出一种算法。

一　Rosenbrock 的最小实现算法及其改进

1. 系统矩阵与相似变换

状态变量经过满秩线性变换后，状态方程将变换为另一个等价的状态方程。若状态变量之间的变换矩阵为 T(非奇异阵)，则状态方程在零初始条件下的拉普拉斯变换方程

$$\begin{cases}(sI_n-A)\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{u},\end{cases}\tag{1}$$

将化为

$$\begin{cases}(sI_n-A_1)\boldsymbol{x}_1=B_1\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{x}_1+D_1\boldsymbol{u},\end{cases}\tag{2}$$

其中 $A_1=T^{-1}AT$, $B_1=T^{-1}B$, $C_1=CT$, $D_1=D$, $X=TX_1$, A 是 $n\times n$ 阵, B 是 $n\times l$ 阵, C 是 $r\times n$ 阵, D 是 $r\times l$ 阵, 而 T 是 $n\times n$ 阵。

方程(1)也可写成

$$\begin{bmatrix}sI_n-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ -\boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\boldsymbol{y}\end{bmatrix},\tag{3}$$

于是对系统方程(1)的研究就是对系统矩阵

$$P(s)=\begin{bmatrix}sI_n-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}\tag{4}$$

的研究。改变状态变量的等价变换，可以由系统矩阵左乘和右乘变换矩阵 T 所组成的矩阵来得到，如下式所示：

$$\begin{bmatrix}sI_n-A_1 & B_1\\ -C_1 & D_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T^{-1} & 0\\ 0 & I_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI_n-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T & 0\\ 0 & I_l\end{bmatrix}\tag{5}$$

上述变换称为系统的相似变换。系统的相似变换，实质上就是对系统进行一系列的矩阵初等变换。由于在相似变换中 sI_n 和 D 未起任何变化，加上我们今后所关心的仅是系统矩阵中行和列的线性相关问题，因此式(4)中的 sI_n 可以不予考虑，并可把 $P(s)$ 中的前 n 列变一下号，只对矩阵

$$P=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} \tag{6}$$

进行变换．式(6)定义的矩阵P也称为系统矩阵．

2．可控性与可观性的判别和输入、输出解耦零点

定理1 系统完全可控的充要条件是对所有的复数值s，

$$\operatorname{rank}[sI_n-A \quad B]=n.$$

系统完全可观的充要条件是对所有的复数值s，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sI_n-A\\ -C\end{bmatrix}=n.$$

当s不取A的特征值时，矩阵$[sI_n-A]$的行必定线性无关．只有当s取A的特征值λ_i时，矩阵$[sI_n-A]$的行才有可能线性相关，使矩阵$[sI_n-A \quad B]$的行成为线性相关时的λ_i称为输入解耦零点．因此，如果不存在输入解耦零点，系统便完全可控．同样可定义输出解耦零点，当不存在输出解耦零点时，系统便完全可观．

我们知道，系统的相似变换不仅保持系统的传递函数矩阵以及系统的阶不变，而且保持系统的可控性与可观性不变，并保持输入解耦零点和输出解耦零点不变．

定理2 若系统矩阵

$$P=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & 0\\ A_{21} & A_{22} & B_{21}\\ C_{11} & C_{12} & D\end{bmatrix},$$

其中A_{11}为$p\times p$阵，A_{22}为$(n-p)\times(n-p)$阵，B_{21}为$(n-p)\times l$阵，C_{12}为$r\times(n-p)$阵，则

$$P(s)=\begin{bmatrix}sI_n-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}$$

与

$$P_1(s)=\begin{bmatrix}sI_{n-p}-A_{22} & B_{21}\\ -C_{12} & D\end{bmatrix}$$

具有相同的传递函数矩阵$G(s)$．

由于A_{11}的特征值全部都是输入解耦零点，系统矩阵$P(s)$的其余输入解耦零点必定包含在系统矩阵$P_1(s)$内．如果A_{11}中已包含了$P(s)$的全部输入解耦零点，那末，经过分离后得到的系统$\{A_{22}, C_{12}, B_{21}, D\}$将是完全可控的．

同样，对于输出解耦零点，可以得到类似的可观性结论．

3．获得最小实现(完全可控与完全可观实现)的 Rosenbrock 算法

设系统的传递函数$G(s)$为一有理真分式矩阵，由规定的$G(s)$获得相应最小实现的 Rosenbrock 算法如下：

第一步，写出$G(s)$的可观实现

$$
P=\left[\begin{array}{cccc:c}
A_1 & & & 0 & B_1 \\
 & A_2 & & & B_2 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
0 & & & A_r & B_r \\
\hdashline
C_1 & C_2 & \cdots & C_r & D
\end{array}\right] \tag{7}
$$

第二步，利用系统的相似变换，把全部的输入解耦零点分离出来从而得到最小实现。

由式(5)可见，系统的相似变换包含以下三种运算：

变换(1)：系统矩阵P的前n行(列)中的第i行(列)乘以非零常数α，然后对第i列(行)乘以$1/\alpha$。

变换(2)：系统矩阵P的前n行(列)中第i行(列)乘以常数α后加到第j行(列)上去，然后将第j列(行)乘以$-\alpha$后加到第i列(行)上去。

变换(3)：系统矩阵P的前n行(列)中的第i行(列)和第j行(列)互换位置，然后互换第i列(行)和第j列(行)。

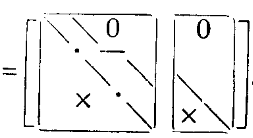
由P求得最小实现的具体算法是：

1) 令$i=n+l$, $j=n$。
2) 如$P(1, i)\sim P(j, i)$全为零，则转6)。
3) 选$P(1, i)\sim P(j, i)$中绝对值最大者，通过变换(3)使之调到$P(j, i)$位置。
4) 以$P(j, i)$通过变换(2)，使$P(1, i)\sim P(j-1, i)$均为零。
5) $i-1\Rightarrow i$, $j-1\Rightarrow j$. 如$j<1$，计算结束；如$j\geqslant 1$，则转2)。
6) $i-1\Rightarrow i$. 如$i=j$，计算结束；如$i\neq j$，则转2)。

计算结束时

$$
P=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} \\ C_{11} & C_{12} & D \end{bmatrix},
$$

其中$[A_{22}\ B_{21}]$的形式(称为下阶梯形阵)是

$[A_{22} \vdots B_{21}]=$ 

矩阵$[A_{22}\quad B_{21}]$中有一条单调下降的非零"界线"，其右侧的全部元素均为零，而左侧的元素可以不为零。

由于式(7)中的P是$G(s)$的一个可观实现，故

$$
P_1=\begin{bmatrix} A_{22} & B_{21} \\ C_{12} & D \end{bmatrix}
$$

便是它的最小实现。

4. 上述Rosenbrock最小实现算法的改进

采用Rosenbrock算法求最小实现时所涉及的可观实现