周怀梧 主编

医用高等数学

浙江科学技术出版社

YIYONG GAODENG SHUXUE

医用高等数学

周怀梧 主编

浙江科学技术出版社

编 写 者

浙江医科大学	周怀梧
	李乃英
山东医科大学	张 馥
	周凤君
上海第二医科大学	杨 琦
苏州医学院	邓恒道
南京医学院	黄大朊
哈尔滨医科大学	张 仲
山西医学院	李仲元
上海医科大学	金莳芳

医用高等数学

周怀梧 主编

*

浙江科学技术出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本850×1168 1/32 印张11.5 字数282,000

1988年4月第一版

1988年4月第一次印刷

印数：1—12,500

ISBN 7-5341-0068-2/R·20

统一书号：14221·147

定 价：2.85 元

责任编辑：陈云华

封面设计：潘孝忠

前　言

现代医学科学发展的一个显著特点是：突破了单纯观察、描述与积累经验的传统研究方式，将现代实验手段与各种数学方法紧密结合起来，向着数量化、精确化，即数学化的方向迈进；不论是基础医学、临床医学，还是预防医学，都日益广泛、深入地应用各种数学工具．因此，为适应现代医学科学发展的需要，高等医学院校各专业的学生和研究生都有必要学习高等数学．

自卫生部1981年决定在医学各专业中开设高等数学课以来，不少院校编印了教材．经过这些年来的教学实践，大家都觉得有必要也有可能在原有教材的基础上进行修订，编出一本切实符合医学各专业54～72学时教学要求的教材．鉴此，上海医科大学、上海第二医科大学、浙江医科大学、山东医科大学、哈尔滨医科大学、南京医学院、苏州医学院、山西医学院八校协作编写了本书，由浙江医科大学周怀梧副教授任主编．

本书包括一元函数微积分、常微分方程与拉普拉斯变换、多元函数微分法和二重积分、行列式与矩阵，以及概率论等内容．这些内容不仅在现代医学科学中有许多重要的应用，而且是学习其他数学方法，尤其是钻研医学生物数学必需具备的基础．编写中我们力求做到：叙述深浅适当，例题、习题典型，联系医学实际自然，重视科学抽象能力、逻辑推理能力以及数值计算能力的培养．

本书可供医学及卫生各专业作教材使用，也可供医学教学、科研人员学习和参考．目录中打有“*”号的章节，各校可根据不同专业的实际需要和学时数的多少来取舍，也可选择一部分让

学有余力的学生自学．为了更好地贯彻因材施教的原则，我们建议布置习题可区分两种要求：基本要求和较高要求．打有“*”号的题目是属较高要求的，不要求所有的学生都做．书末所附习题答案未必是最佳的，仅供参考．为了配合教学的需要，书末还附有教学参考书及有关的初等数学和高等数学公式及数值表．

由于我们学识水平和教学经验有限，编写时间也比较仓促，因此本书一定有不少缺点和错误，恳请读者指正．

编　者

1987年4月

目　　录

*第七章　行列式与矩阵

第八章　概率论

第一章

函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象，而极限方法是其基本研究方法．函数与极限的初步知识在中学里已经学过，本章仅作必要的复习和补充．

第一节 函 数

一、函数的概念

我们在观察和研究某一变化过程时，常会遇到两种不同的量：一种是在该过程中可以取不同数值的量，称为**变量**；另一种是在该过程中保持同一数值的量，称为**常量**．例如，在热胀冷缩过程中，一个圆盘的半径 R 和面积 S 都是变量，但面积与半径的平方之比 $S/R^2=\pi$ 是不变的，这个常量 π 就是大家熟悉的圆周率．

通常，在同一变化过程中，出现的各种变量并不都是独立变化的，而是彼此联系、互相依赖的，由此抽象出函数的概念．

定义 1 设某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的每一个允许取的值，变量 y 按照一定的规律有确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**(function)．记作

$$y=f(x) \qquad \text{或} \quad f: x\longrightarrow y,$$

其中 x 称为**自变量**，y 又称**因变量**．

因变量与自变量之间的对应规律称为**函数关系**．自变量的所有允许值的集合称为函数的**定义域**；如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义域中的一点，有时我们也说函数 $f(x)$ 在 x_0 点**有定义**．与自变量的值相对应的因变量的值称为**函数值**，而所有函数值的集合称为函数的**值域**．

函数关系可用解析式表示，如 $S=\pi R^2$，$y=x^2+1$；也可用图象表示，如心电图、自动记录的气温曲线；还可用表格来表示，如对数表、三角函数表以及从某些实验得到的观测数据表，等等．换言之，解析法、图示法和列表法是三种常用的函数表示法．

函数的定义域或值域，常可用不等式、区间或集合表示．现将不等式、区间、集合三者对照列表，见表 1－1，表中 a、b 是实数．

表 1-1　不等式、区间与集合对照表

不　等　式	区　　　间	集　　　合
$a\leqslant x\leqslant b$	闭 区 间$[a,\ b]$	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$a<x<b$	开 区 间$(a,\ b)$	$\{x \mid a<x<o\}$
$a\leqslant x<b$	半开区间$[a,\ b)$	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$a<x\leqslant b$	半开区间$(a,\ b]$	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$-\infty<x<b$	无限区间$(-\infty, b)$	$\{x \mid x<b\}$
$-\infty<x\leqslant b$	无限区间$(-\infty, b]$	$\{x \mid x\leqslant b\}$
$a<x<+\infty$	无限区间$(a, +\infty)$	$\{x \mid x>a\}$
$a\leqslant x<+\infty$	无限区间$[a, +\infty)$	$\{x \mid x\geqslant a\}$
$-\infty<x<+\infty$	无限区间$(-\infty, +\infty)$	实数集 R

例 1　在自由落体运动中，如空气的阻力可略而不计，则物体下落路程 s 与时间 t 的关系可表示为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 t 是自变量，s 是 t 的函数．假定物体开始时离地面的高度为 h，则这个函数的定义域为：$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$（$\sqrt{\frac{2h}{g}}$是物体到达地面的时间）；值域为：$0\leqslant s\leqslant h$．

例 2 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域．

解 对$\sqrt{\sin x}$这一项，只有 $\sin x\geqslant 0$ 才有意义，即

$$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,$$

$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)$；对$\sqrt{16-x^2}$这一项，则要求 $16-x^2\geqslant 0$，即

$$-4\leqslant x\leqslant 4.$$

因此，y 的定义域是$[-4,\ -\pi]$和$[0,\ \pi]$．

例 3 求函数 $f(x)=\frac{x^2-3}{x+1}$在 $x=2$，$x=a$，$x=\frac{1}{a}-1$处的函数值．

解 在 $x=2$，$x=a$，$x=\frac{1}{a}-1$各点处的函数值分别为

$$f(2)=\frac{2^2-3}{2+1}=\frac{1}{3},$$

$$f(a)=\frac{a^2-3}{a+1},$$

$$f\left(\frac{1}{a}-1\right)=\frac{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-3}{\frac{1}{a}-1+1}=\frac{1}{a}-2-2a.$$

例 4 有人根据在一项生理学研究中测得的血液中胰岛素浓度 $c(t)$（单位/毫升）随时间 t（分钟）的变化数据，建立了如下

经验公式：

$$c(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5; \\ 25e^{-K(t-5)}, & t>5. \end{cases}$$

其中K为常数.

这里，浓度$c(t)$是时间t的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的．象这种在定义域的不同部分内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**．在求分段函数的函数值时，必须将自变量的值代入它所在区间的解析式计算．如例4中，当$t=2$时，对应的浓度$c(2)=2(10-2)=16$．当$t=10$时，对应的浓度$c(10)=25e^{-K(10-5)}=25e^{-5K}$.

在定义1中，若对一个x值，有唯一的一个y值与之对应，则y是x的**单值函数**．若对一个x值，有多个y值与之对应，则y是x的**多值函数**．例如，由圆方程

$$x^2+y^2=r^2 \quad (r\text{为圆的半径})$$

所确定的函数$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$便是一个多值函数，在本书中若无特别说明所讨论的函数均指单值函数.

二、复合函数

定义2　如果变量y是变量u的函数，变量u又是变量x的函数：

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),$$

且x在$\varphi(x)$的定义域或其一部分上取值时所对应的u值，函数$y=f(u)$是有定义的，则称y是x的**复合函数**（compound function)，记作$y=f[\varphi(x)]$

其中u称为**中间变量**.

例如，在物体下落时动能E是速度v的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2,$$

而速度 v 又是时间 t 的函数：

$$v=v_0+gt,$$

于是E通过 v 而成为 t 的复合函数：

$$E=\frac{1}{2}m(v_0+gt)^2.$$

又如，由 $y=\lg u$，$u=\mathrm{tg}\,v$，$v=x^2+1$ 经二次复合构成 x 的复合函数：$y=\lg\mathrm{tg}(x^2+1)$．但须注意，并不是任何两个函数都可复合成一个复合函数．例如 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$，因为 u 总是大于 1，从而使 $y=\arccos u$ 没有意义．

我们不仅要学会把若干个简单的函数"复合"成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数"分解"为若干个简单的函数．这种分解的技术在微分运算中经常要用到，应该重视．

例如，$y=e^{\sqrt{1+x^2}}$可以看成是由 $y=e^u$，$u=v^{\frac{1}{2}}$，$v=1+x^2$ 复合而成的．

三、初等函数

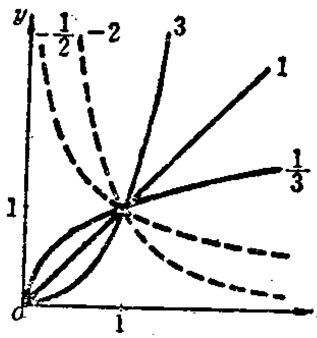
在中学中已学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统称为**基本初等函数**．为复习和应用的方便，将其归纳成表 1－2．

定义 3 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次函数的复合所构成的函数，称为**初等函数**(elementary function)．

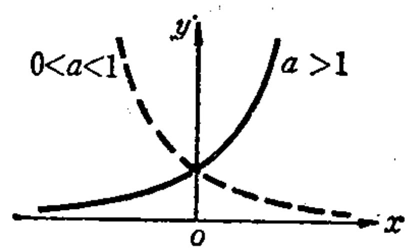
今后讨论的函数绝大多数是初等函数，但须注意，分段函数一般不是初等函数．

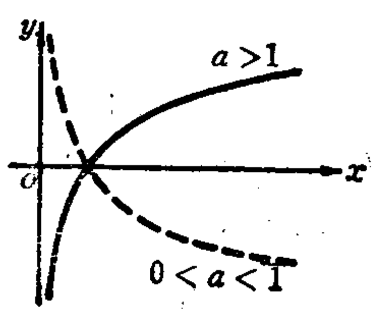
表1-2　基本初等函数表

类别及解析式		定义域	值　域	图　　形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ次抛物线	因μ而异，但$[0,+\infty)$是公共定义域	因μ而异，但$[0,+\infty)$是公共值域	见图 1
	$\mu<0$ 令$\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$, m次双曲线	公共定义域为$(0,+\infty)$	公共值域为$(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	见图 2
对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	见图 3

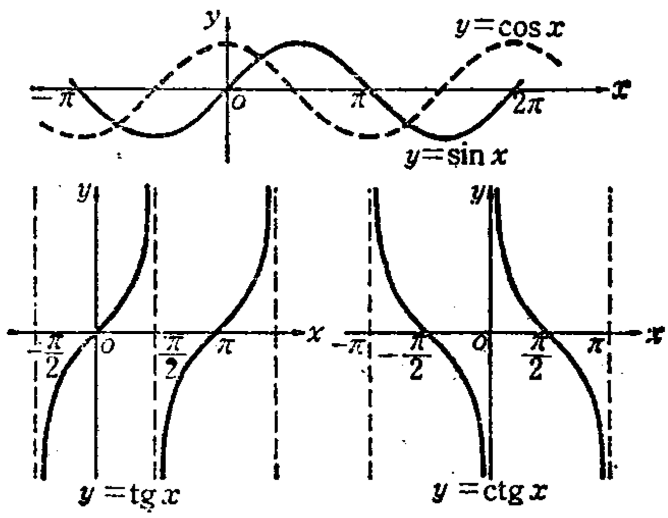
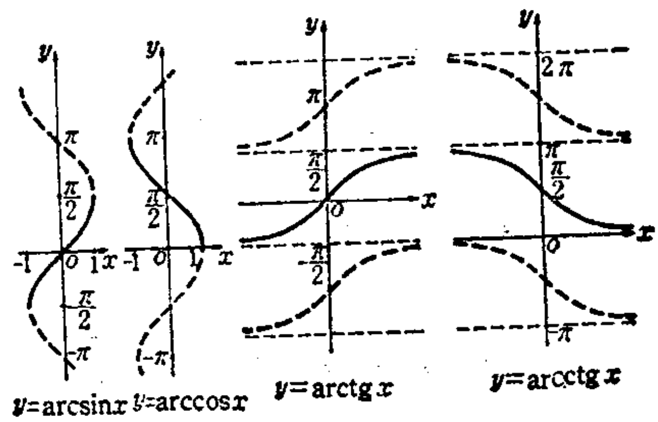


(在第一象限内)





续表

类别及解析式	定义域	值域	图形
三角函数			
正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
正切函数 $y=\operatorname{tg} x$	$x \neq n\pi+\frac{\pi}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	
余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$	$x \neq n\pi$ $(n=0, \pm 1, \cdots)$	$(-\infty, +\infty)$	
反三角函数			
反正弦函数 $y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
反余弦函数 $y=\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	
反正切函数 $y=\operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
反余切函数 $y=\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	

习　题　1-1

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{e^{-2x}-1}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$；

(3) $y=\dfrac{\lg(x-1)}{\lg(3-x)}$；　　(4) $y=\arccos\dfrac{x-2}{5-x}$；

(5) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & 当 x<0; \\ 0, & 当 x=0; \\ -x+1, & 当 x>0.\end{cases}$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(0.5)$，并作函数图象.

3.近似地说，婴儿的体重平均为3000克，从出生起至6个月，每月长600克；6个月后至12个月，每月长500克. 试写出婴儿从出生至一岁其体重与月龄的关系式，并估计刚满10个月的婴儿的体重是多少？

4.已知 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求：(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$；(2) $f\left(\frac{1}{a}\right)$；(3) $[f(x)]^2$；(4) $f[f(x)]$.

5.指出下列各函数系由哪些简单的函数复合而成：

(1) $y=e^{\operatorname{arc\,tg} 2x^3}$；

(2) $y=\sqrt{\sin^5(x+2)}$；

(3) $y=\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

(4) $y=\cos\ln\sqrt[3]{3x^2+1}$.

第二节 极 限

一、极限的概念

函数的极限是描述在自变量的某个变化过程中，对应的函数值的变化趋势的一个重要概念. 自变量的变化有各种各样的方式，通常研究下述两种情况：一种是自变量 x 的绝对值无限地增大，即 $|x|$ 趋于无穷大，记作 $x\to\infty$；另一种是自变量 x 无限趋