经济数学基础

〔苏〕A.N. 卡拉西夫　等著

下册

上海科学技术文献出版社

经济数学基础
(下 册)
须复芬　黄振勋　高国柱　译
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号)
新华书店经销
昆山亭林印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 14.25　字数 344,000
1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷
印数：1—2,000
ISBN 7-80513-232-1/O·14
定价：7.30元
《科技新书目》176-277

译者的话

本书由苏联 A. И. 卡拉西夫教授、З. М. 阿克秀金娜副教授和 T. И 萨维利耶娃副教授著，经苏联高等和中等专业教育部批准被用作苏联高等学校各类经济专业学生的教材和参考书，也适用于各类管理专业的学生。本书分上、下两册，系统地介绍了经济数学的基本原理和基本方法，内容全面、丰富。全书包括向量代数与解析几何、分析引论、微分学和积分学、常微分方程、线性代数、级数、概率论和数理统计、线性规划及其在经济上的应用，是同类书中较全面、系统的一本。为了使各类读者更好地使用此书，原书作者尽可能地简化了理论部分的叙述，在相当多的场合叙述非常直观，并列举了大量例题。此外在每章的结尾还有大量习题，且附有习题答案，以供读者参考。因此该书不仅适合于教学，还便于从事各类经济工作的同志阅读。本书也可作为各类经济专业自学考试的高等数学教材和参考书。

本书内容与苏联高等院校经济专业的现行高等数学大纲相符，由此也可看到苏联在现代经济领域中的数学基础，这正是译者翻译此书的目的之一。

尽管本书在理论上叙述较为直观、简洁，但仍保持立论严密完整，使读者在学完该书后，不仅能掌握所需要的数学知识，还能受到严格的数学思维方法的训练。

本书在翻译过程中承蒙复旦大学经济学系副教授马文奇同志仔细校阅，在此表示衷心感谢。

限于水平，译错之处在所难免，恳切希望读者批评指正。

译　者

1987 年 7 月于复旦大学

目　　录

第一篇　概　率　论

第一章　基本概念和定理

§1　概率论的对象

在实际活动中我们经常会遇见一些无法预测其结局的现象，诚如通常所说的，其结果带有偶然性。例如，保了险的对象（房屋、家庭财产等等）由于天灾遭毁灭，就是带随机性的事件。这时，保险机构在自己的工作中采取了什么方针，它能不能对随机现象进行某种预测呢？看来，如果说对于个别保险对象的未来情况无可奉告，那么对于大量保险对象的未来情况几乎能够准确地作出许多预测。

随机事件有时能够以频率，即它的发生次数与试验次数之比值来表征的，在同样的试验条件下，所考察的随机事件可能发生也可能不发生。某居民点一年内男孩的出生率、一批零件中的次品率等等，都可作为频率的例子。

如果从一系列大量试验中算出的随机事件的频率差不多是常数，即频率在某个常数附近作不大的摆动，那么我们将说，这个事件具有频率稳定性。例如，男孩子的出生率具有这种性质。

随机事件或说具有稳定频率的事件，在物理学、生物学、机器制造业（误差理论）、经济学以及其他许多学科中已得到广泛应用。

事件或现象的随机性不意味着它的无因果性。自然界中的

事物和现象是有机地联系的，是互相依赖和彼此制约的。自然界的任何一种现象，如果孤立地来看，是不可能理解的，反之，如果密切地联系周围的现象加以考察，那么任何现象都是能够理解并加以论述的。

大炮射击时炮弹的落点是随机的，然而这并不是说它没有因果依据。相反地，炮弹飞行的弹道是大量因素影响炮弹的结果。问题仅仅在于，每个因素的影响在不确定的时刻按不确定的方式以数量形式表现出来，我们不可能确切地表达其中每个因素在某个时刻对这个炮弹弹道所起的作用和所有因素所起的总作用。因而，炮弹落点就成为随机的。

总之，概率论成为数学的一个分支，它只研究具有稳定频率的随机事件并揭示大量重复情况下的规律性。

原始的实际事件的频率摆动范围越小，概率论就越能确切地描述所观察的有关现象。反之，如果原始的实际随机事件没有稳定的频率，而将概率理论的公式不加区别地应用于任何现象(不区别它们的特征——是经济学的还是自然科学的)，就会导致极其错误的结论。

应当防止可能的不正确解释，即认为只有在我们无法确切知道现象的来源和发展时才去运用概率论。仅仅根据未知的事实不可能作出关于规律性的任何结论。

§2 基本概念和定义

任何一门科学都有它所依据的一些基本概念。后面的每个概念是通过前面的概念来确定的。然而，这种确定过程应当在某处结束。应该有一些基本概念作为“起源”，它们是不可能通过其他概念来确定的；它们只是被说明一下，而所有其他概念的确定都归结到它们那里。事件和等可能性的概念就属于概率论中

这样一些概念. 事件是指可能发生，也可能不发生的一切事情. 例如：1) 家里生下的第一个孩子是男孩；2) 随便取的一个产品是合格品；3) 随便取的一个产品是次品；4) 1990年8月1日莫斯科下沉. 事件——不是一件实存事情，而仅仅是试验、现象或观察的一种可能结局.

在某些游戏中使用同样材料做成的形如立方体的骰子，它的各个面用若干点子作为标记. 在掷骰子的时候，上表面的点子数为所掷到的点数 (1, 2, 3, 4, 5, 6). 在这些条件下所指出的六种事件应当认为是等可能的,因为没有依据认为,可凭愿望掷得某个点数. 因此,等可能性就意味着关于某组条件,试验的各种结果的平等性(匀称性).

事件用大写的拉丁字母表示：A, B, C 等等.

如果两个事件中一个事件的发生排除了另一个事件发生的可能，这两个事件就称为不相容事件. 反之，就称为相容事件.

例如，假定一个大学生得到一张货币实物彩票. 这时事件A是指他将奖得一辆莫斯科人牌汽车，事件B是指他将奖得一只手表,那么,事件A和事件B是不相容的. 对于具有两张货币实物彩票的人，事件A和B是指他按第一张和第二张彩票各中相应的奖，那么事件A和事件B是相容的，因为事件A的发生(他按第一张彩票中奖)不排斥事件B(按第二张彩票中奖)发生的可能性.

两个以上事件的不相容表示它们两两互不相容.

如果在给定的试验条件下事件一定发生，则这个事件称为必然事件. 如果事件在实现规定的综合条件的情况下不可能发生,则这个事件称为不可能事件.

从一批合格的零件中要取一个合格零件的事件是必然事

件，而要取一个次品零件的事件是不可能事件。

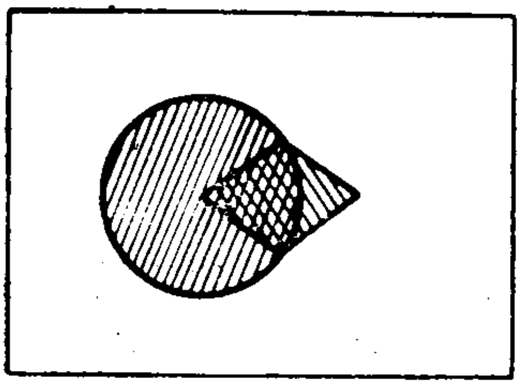

图 1

当两个事件中必有一个事件发生，并且一个事件的发生排斥另一个事件发生的可能性时，这两个事件称为对立事件。

例如，"产品是合格品"和"产品是次品" 这两个事件是对立事件。

对立于事件A的事件将用记号$\bar{A}$表示。

在某个试验中，如果事件A，B，…，M中至少有一个事件必作为试验的结果而发生，则事件A，B，…，M就称为基本事件(至少其一可能的可能事件组)。

设射击手正在对图1中所示的靶子进行一次射击。这时可能有三种结果：1) 击中圆；2) 击中菱形；3) 既不击中圆又不击中菱形。显然，只能出现其中的一个结果。我们这里不讨论它们的等可能性，同时也不知道它们是否是等可能的。因为这是另一个问题，需要专门加以研究。

如果事件A，B，…，M是某种试验的基本事件，并且是两两互不相容的，则它们构成一个完备系统。

例如，设电灯泡按使用期限分为下面几组：

组 别	A	B	C	D	E
使用期限(小时)	600 以下	600—1200	1200—1800	1800—2400	2400 以上

那么任意取出的一个灯泡必属于上面某一组，这可以看作是事件A，B，C，D，E之一发生。这些事件构成一个完备系统。

任何两个对立事件都构成一个完备系统。

称一个事件为有限个给定事件的并，是指这些给定事件中至少有一个发生的事件。

称一个事件为有限个给定事件的交，是指所有这些给定事件同时发生的事件。

例如，如果事件A是指击中圆，事件B是指击中菱形(图1)，那么它们的并是击中圆，或者击中菱形(在图上细线条给出的部分)，而它们的交是击中圆和菱形的公共部分(在图上双细线给出的部分)。

事件A和事件B的并用记号$A+B$表示，它们的交用记号AB表示。有限个事件的并与交用类似的方法表示。

如果每当事件A发生时事件B也发生，我们就说事件A蕴涵事件B。

如果A的发生蕴涵B发生，而B的发生也蕴涵A发生，则称事件A和事件B是等价事件。

§3 事件概率的定义

假设在100个外形相同的零件中，97个是正品，剩下的是废品，从它们中任意取出一个零件。设事件A和事件B分别指零件为正品和废品，显然它们的发生不是等可能的，发生事件A比发生事件B的可能性大得多。

事件的概率是指这样一个数，它刻划这个事件发生的可能性大小。事件A的概率将用符号$P(A)$表示（从拉丁文 Probabilitas——“概率”一词而来）。

事件A的概率等于数m与数n之比，其中m为总共n种情况中组成事件A发生的那些情况个数，这n种情况是至少其一可能的、等可能的和互不相容的情况。即

$$P(A)=m/n \tag{1.1}$$

概率的这个定义称为古典的定义。

例 1 在本节开始所指出的例子的条件下求任取的一个零件是合格产品的概率。

解 设想所有的零件都标上号码。这时应该清楚，在取一个零件的时候可能会有100种不同的事件(情形)发生，不难看出，这些事件是至少其一可能的、等可能的和互不相容的。在97个正品中出现任何一个零件，将意味着实现事件 A，或如通常所说，在总共100种情形中的97个可形成事件 A。因而，事件 A 的概率就是：$P(A)=97/100=0.97$。

例 2 以1964—1965年为准对100000个出生于苏联的人所作的年龄调查资料整理于表1.1。求新生儿活到30岁的概率。

表 1.1

年龄(岁)	活到这个年龄的人数	年龄(岁)	活到这个年龄的人数	年龄(岁)	活到这个年龄的人数	年龄(岁)	活到这个年龄的人数
0	100000	30	93405	55	83551	80	38998
5	96236	35	92232	60	79179	85	25003
10	95852	40	90809	65	72661	90	12723
15	95565	45	89109	70	64332	95	5450
20	95098	50	86895	75	52892	100	1873
25	94354						

解 根据上表得出，100000个新生儿中有93405个活到30岁。因此所求的概率 $P(A)=93405/100000\approx0.934$。

例 3 掷两只游戏骰子。事件 B 是指两只骰子上共得出10点。求事件 B 的概率。

解 在掷两只游戏骰子时可能有以下36种不同的结果(第

一个数字表示第一只骰子上的点数，第二个数字表示另一个骰子上的点数)：

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	62	63	**64**	65	66

它们是至少其一可能、等可能和互不相容的试验结果。由这36种情况中的三种(用黑体字标出的)组成未知事件 B，因此它的概率 $P(B)=3/36\approx0.083$。

例 4 在 50 个零件中有三个是次品。任取两个零件，求它们都是次品的概率。

解 所研究事件的概率与零件的抽取方式有关。

情形 I 任取一个零件查明质量后把它放回去，经仔细混合之后再取出一个。采用这样抽样方式，不同的试验结果的总数等于 $50\cdot50=2500$ (第一个可能是 50 个零件中的任何一个，而在抽第二个零件时它可能与这 50 个零件中的任何一个配组)，并且它们是至少其一可能的、等可能的和互不相容的。在它们之中有 $3\cdot3=9$ 种结果 (在选择第一个零件时次品可能出现三种，在选择第二个零件时每种都能与原先的三种配组) 会形成事件 A，事件 A 是指这两个零件都为次品。因而，$P(A)=9/2500=0.0036$。

情形 II 任取一个零件后不放回去。采用这种抽样方式，不同试验结果的总数等于 $50\cdot49=2450$ (50 个零件中的任何一个可取为第一个零件，在选择第二个零件时它能与其余的 49 个零件中的任一个配组)，同时它们是至少其一可能的、等可能的

和互不相容的。其中只有 $3\cdot2=6$ 种情形会促成事件 B，事件 B 是指这两个零件都为次品。所以 $P(B)=6/2450\approx0.0024$。

这个例子明显地表明，事件的概率仅在确立试验的条件之后才成为确定的。

我们由概率定义出发确立事件的概率的性质。

定理 1 任何事件的概率是非负数且不大于 1。

证 构成任何事件的场合数目 m 不可能是负数且大于它们的总数 n，即 $0\leqslant m\leqslant n$。用 n 逐项除这个不等式，得到 $0\leqslant m/n\leqslant1$，或者，考虑到等式(1.1)，得到 $0\leqslant P(A)\leqslant1$。**证毕**

定理 2 必然事件的概率等于 1。

证 这是显然的，因为构成必然事件的应该是所有 n 个至少其一可能的、等可能的和互不相容的场合，即 $m=n$。**证毕**

定理 3 不可能事件的概率等于零。

证 不可能事件不能含有 n 个至少其一可能的、等可能的和互不相容的场合之中任何一个，即 $m=0$。**证毕**

必须明确区分事件的概率和事件的频率这两个概念。事件的概率在试验之前进行计算并且用数量表示事件发生的客观可能性的程度，而事件的频率仅仅在试验结果已知之后才被确定。

例 5 抛钱币 5 次。"徽记"出现 2 次，"徽记"出现的概率和频率是怎么样的？

解 "徽记"出现的概率是 $1/2=0.5$（在抛钱币时两种可能结果之中有一种促成"徽记"出现），而"徽记"出现的频率是 $2/5=0.4$（在 5 次试验中事件出现了 2 次）。

在事件的概率和频率之间存在联系吗？为了揭示这个联系，许多研究者做了各种试验。实际上，在所有试验中事件的频率仅仅在一系列十分大量的试验中才接近于在每次试验中事件的

概率。事件的频率接近于它的概率，这一试验事实将在贝努里定理中得到严密的论证。这个定理将在下面进行探讨（见第五章§3）。

§4 概率加法定理

借助于概率论的最简单定理——加法和乘法定理，能较为简易地解决一些问题，其中包括上述问题中的一些算题。

定理1（概率的加法定理） 有限个互不相容事件之和的概率等于它们的概率之和。

证 先证定理对两个事件适用。设在总数为n且至少其一可能、等可能和互不相容的情形中，组成事件A的有k个情形，组成事件B的有l个情形。则这些事件的概率为

$$P(A)=k/n;P(B)=l/n \tag{1.2}$$

根据条件，事件A和B是不相容的。因而，组成事件A的k个情形中的任何一个都不形成事件B，组成后者的是其他l个情形。由此可见，n种情形中的$k+l$种情形促成事件的并$A+B$，因此事件$A+B$的概率是$P(A+B)=(k+l)/n$。最后的表达式可以写成$P(A+B)=k/n+l/n$。注意等式(1.2)，得

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1.3}$$

即对于两个事件，定理获证。

对于任意有限个事件的情况则用数学归纳法证明。假设定理对n个不相容事件A_1，A_2，…，A_n是正确的，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.4}$$

把事件$A_1+A_2+\cdots+A_n+A_{n+1}$的和看作为两个事件之和：$A_1+A_2+\cdots+A_n$和$A_{n+1}$。那末对于两个事件的定理已被证明，因此求得