华章教育

本科生数学题库

（基础篇）

概率论与数理统计习题集

姚孟臣　编著

数学

机械工业出版社
China Machine Press

本科生数学题库

（基础篇）

概率论与数理统计习题集

姚孟臣 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题集(基础篇)/姚孟臣编著. －北京：机械工业出版社，2002.7
(本科生数学题库)
ISBN 7-111-10592-3

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论-高等学校-习题 ②数理统计-高等学校-习题 Ⅳ.021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 048458 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑：石会敏
北京昌平奔腾印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2002 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16 · 16.25 印张
定 价：22.00 元

出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们，感谢他们付出的辛勤劳动。同时，欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002年3月

目 录

第一章　随机事件和概率

一、内容提要

1. 样本空间与随机事件

在相同的条件下可以重复进行，并且每次试验的多种结果事先不可预知的试验称作**随机试验**，一般用字母 E 表示.

随机试验中每一种可能的试验结果称作一个**样本点**或**基本事件**，用 ω 表示；样本点的全体组成的集合称作**样本空间**或**基本空间**，记作 Ω.

在随机试验中，把一次试验中可能出现也可能不出现，而在重复独立试验中具有某种统计规律性的样本空间的一个子集称为**随机事件**(简称**事件**). 所谓一个随机事件 A 发生当且仅当 A 的一个样本点 ω 发生.

仅含一个样本点的随机事件称作**基本事件**，含两个或两个以上样本点的随机事件称作**复合事件**.

必然发生的事件称作**必然事件**，必然事件应该包含所有的样本点，因而它等于样本空间 Ω. 不可能发生的事件称作**不可能事件**，因为它不能包含任何样本点，所以为空集，记作 $\varnothing$.

常用大写字母 A, B, C 等表示随机事件.

2. 事件之间的关系与运算

(1) 包含关系　如果事件 A 发生则事件 B 一定发生，即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B，称事件 B **包含**事件 A，记为：$B \supset A$.

(2) 相等关系　如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$，即事件 A 和事件 B 同时发生和不发生，称事件 A, B **相等**，记为 $A = B$.

(3) 互不相容关系　如果事件 A 和 B 不能同时发生，即它们的积事件是不可能事件，称事件 A 与 B **互不相容**(或**互斥**)，记为 $AB = \varnothing$.

(4) 事件的逆　如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生，反之亦然，称事件 A 和 B **互逆**(或**互余**)，此时称 B 是 A 的**逆事件**，记为 $B = \overline{A}$.

(5) 事件的和　"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**(或**并事件**)，记为 $A \cup B$(或 $A + B$). 它可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(6) 事件的积　"事件 A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**(或**交事件**)，

记为 $A\cap B$(或 AB).它可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(7) 事件的差 “事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**,记为 $A-B$(或 $A\overline{B}$).

事件之间的运算具有下述性质:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$,

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

(5) 双重否定律 $\overline{\overline{A}}=A$.

(6) 排中律 $A\cup\overline{A}=\Omega$.

(7) 矛盾律 $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

(8) 差积转换律 $A-B=A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$.

3. 概率的定义及基本性质

(1) 概率的统计定义

在一组不变的条件 S 下,重复做 n 次试验,设 n 次试验中,事件 A 发生 m 次,如果当 n 很大时,频率 $\frac{m}{n}$ 稳定的在某一数值 p 附近摆动,而且一般说来,随着 n 的增大,这种摆动的振幅越小,则称数值 p 为事件 A 的**概率**,记作 $P(A)=p$.这样定义的概率称作**统计概率**.

(2) 概率的古典定义

如果随机试验满足下述三个条件:

1) 样本空间是有限的,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

2) 基本事件 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 两两互不相容;

3) 基本事件 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 发生的可能性相等,则称这个随机试验为**古典型试验**.

在古典型试验中,随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}\tag{1-1}$$

其中 n 为 Ω 中包含的基本事件总数,m 为事件 A 中包含的基本事件数.由关系式(1-1)计算事件概率的数学模型称为**古典概型**.

(3) 概率的几何定义

如果随机试验满足下述两个条件：1) 试验的结果是无限且不可数的；2) 每个试验结果出现的可能性是均匀的，则称这个随机试验为**几何型试验**.

在几何概型随机试验中，如果 Ω 中的所有基本事件可以用一个有界闭区域来描述，而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件，那么随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1-2}$$

其中，$L(\Omega)$和 $L(A)$分别为 Ω 和 A 的几何测度，由关系式(1-2)计算事件概率的数学模型称为**几何概型**.

(4) 概率的基本性质

1) 对于任何事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

注意：概率等于 0 的事件不一定是不可能事件，概率为 1 的事件也不一定是必然事件.

3) 有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

4) 完全可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

5) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

4. 条件概率和事件的独立性

设 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 的**条件概率**.

如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B **相互独立**. 设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果对任意 $i\neq j$，A_i 与 A_j 相互独立，则称这 n 个事件**两两相互独立**；如果对于任意的 $2\leqslant k\leqslant n$ 和 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称这 n 个事件**相互独立**.

注意：$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立与 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立是两个不同的概念. 前者蕴涵后者，但反之不真.

当 $P(A)>0$ 时，A 与 B 相互独立当且仅当 $P(B|A)=P(B)$.

若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

5. 概率的计算公式

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

当 $B\subset A$ 时, $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(3) 加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

一般地,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例如

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)$$
$$-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

当 A,B 互不相容时, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容时,

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

这正是有限可加性的一般情况.

(4) 乘法公式

设 $P(A)>0$,则

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)$$

设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$
$$\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别地,当 A,B 相互独立时,

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

关于条件概率有相同的计算公式,如

$$P(\overline{A}\mid D)=1-P(A\mid D)$$
$$P((A-B)\mid D)=P(A\mid D)-P(AB\mid D)$$
$$P((A+B+C)\mid D)=P(A\mid D)+P(B\mid D)+P(C\mid D)-P(AB\mid D)$$
$$-P(AC\mid D)-P(BC\mid D)+P(ABC\mid D)$$

(5) 全概公式

如果 n 个事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则称这 n 个事件是一个**完备事件组**.

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组，且

$$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

则对于任意的事件 $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

这个公式称作**全概公式**.

(6) 贝叶斯(Bayes)公式

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，又设 $P(A) > 0$，则对于每个 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)}$$

这个公式称作**贝叶斯公式**或**逆概公式**.

6. 伯努利(Bernoulli)概型

对于随机试验 $E_i(i = 1, \cdots, n)$，设 A_i 是随机试验 E_i 中任一随机事件，如果

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n)$$

则称**随机试验** $E_i(i = 1, \cdots, n)$是**相互独立**的.

如果在一次随机试验中，仅关心随机事件 A 是否发生，即只考虑 A 和 $\overline{A}$ 两个试验结果，称这种试验为**伯努利试验**. 如果重复独立进行 n 次伯努利试验，将它们合在一起称为 **n 重伯努利试验**.

设在一次伯努利试验中事件 A 发生的概率为 p，则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生(用 μ 表示)k 次的概率为

$$P(\mu = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n) \tag{1-3}$$

由关系式(1-3)计算概率的数学模型称为**二项概型**，二项概型也称为**伯努利概型**或**独立试验序列概型**.

二、习　　题

1. 设 A, B 为任意两个事件，求证

$$P(AB)=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B})$$

2. 设 $P(A)=p$, $P(B)=q$, $P(AB)=r$,求下列各事件的概率:$P(\bar{A}\cup\bar{B})$, $P(\bar{A}B)$, $P(\bar{A}\cup B)$, $P(\bar{A}\,\bar{B})$.

3. 设一批产品共 N 件,其中有 M 件是次品,现在从中任取 n 件,问其中恰有 m 件次品的概率为多少? 其中 $M<N$, $m\leqslant n$ 且 $m\leqslant M$.

4. 袋中有红、黄、白色球各一个,每次从袋中任取一球,看过颜色后再放回袋中,共取球三次,求下列事件的概率.

(1) $A=$“全红”;　　(2) $B=$“全白”;

(3) $C=$“全黄”;　　(4) $D=$“颜色全同”;

(5) $E=$“颜色全不同”;　　(6) $F=$“颜色不全同”;

(7) $G=$“无红颜色球”;　　(8) $H=$“无黄颜色球”;

(9) $I=$“无白颜色球”;　　(10) $J=$“无红色球且无黄色球”;

(11) $K=$“全红或全黄”.

5. 从一副扑克牌的 13 张梅花中,有放回地取 3 次,求 3 张都不同号的概率.

6. 从 5 副不同的手套中任取 4 只,求这 4 只都不配对的概率.

7. 将一部五卷文集任意排在书架上,求文集卷号自左至右或自右至左的顺序恰好为 1,2,3,4,5 的顺序的概率.

8. 一批产品共 100 件,对产品进行不放回抽样检查,整批产品不合格的条件是:在被检查的 5 件产品中至少有一件是废品.如果该批产品中有 5 件是废品,求该批产品因不合格而被拒绝接收的概率.

9. 设事件 AB 发生,则事件 C 一定发生.证明

$$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$$

10. 袋内放有 2 个伍分、3 个贰分和 5 个壹分的钱币,任取其中 5 个,求钱额总数超过 1 角的概率.

11. (1) 500 个人中,至少有一个人的生日是在 7 月 1 日的概率为多少(一年按 365 天计算)?

(2) 4 个人中,至少有两个人的生日在同一个月的概率为多少(假设每个月的天数相同)?

12. 将 3 个乒乓球随机地放入 4 个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率各为多少.

13. 有标号为 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的 9 张卡片,从中任取 2 张,求下面事件的概率:

(1) 至少有 1 张卡片标号不小于 7;

(2) 两张卡片标号之和不超过 10.

14. 现有 10 人分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,从中任选 3 人,记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率;

(2) 求最大号码为 5 的概率；

(3) 求中间号码为 5 的概率；

(4) 求正好有一个人号码为 5 的概率；

(5) 求没有一个人号码为 5 的概率.

15. 某公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运过程中，所有标签全部脱落，交货人随意地将油漆发给顾客，现有 1 顾客定货为白漆 4 桶，黑漆 3 桶，红漆 2 桶，求该顾客能如数得到定货的概率.

16. 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车到站，乘客到达车站的时间是任意的，求一个乘客的候车时间不超过 3 分钟的概率.

17. 把一根棍子任意折成两段，求其中一段的长度大于另一段 m 倍的概率. 这里 $m>1$.

18. 在圆周上任取三个点 A,B,C，求三角形 ABC 为锐角三角形的概率.

19. 从区间 $(0,1)$ 内任取两个数，求这两个数的乘积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

20. 某机械零件的加工由两道工序组成. 第一道工序的废品率为 0.015，第二道工序的废品率为 0.02，假设两道工序出废品是彼此无关的，求产品的合格率.

21. 在 $1,2,\cdots,100$ 中任取一数，问：

(1) 此数既能被 2 整除又能被 5 整除的概率为多少？

(2) 此数能被 2 整除或能被 5 整除的概率为多少？

22. 加工某一零件共需经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 0.02，0.03，0.05 和 0.03. 假设各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率.

23. 三个人独立地去破译一个密码，他们能译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$. 问能将此密码译出的概率为多少？

24. 已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(A|B)=0.5$，求

(1) $P(AB), P(A\cup B)$；　　(2) $P(B|A)$；

(3) $P(B|A\cup B)$；　　(4) $P(\bar{A}\cup\bar{B}|A\cup B)$.

25. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(\bar{A}\,\bar{B})$.

26. 10 张考签中有 4 个难签，3 人参加抽签. 按甲、乙、丙顺序，每人抽一个，不放回，求各人抽到难签的概率.

27. 一工人看管 A,B,C 三台机器，在 1 小时内，这三台机器需照管的概率分别为 0.2，0.1，0.4，各台机器是否需要照管相互独立，设该工人照管每台机器的时间不超过 1 小时，求 1 小时内，机器因无人照管而影响工作的概率.

28. 甲、乙两人向同一目标进行射击，甲、乙命中目标的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，甲先射击，然后乙射击，轮流进行，求下列事件的概率：

(1) 在甲进行第3次射击时,目标被首次击中;

(2) 甲射击3次,且在乙之前击中目标.

29. 如图1-1,A,B,C,D,E 表示继电器接点,每一个继电器闭合的概率为 p,且各继电器是否闭合相互独立.求 $L-L$ 成通路的概率.

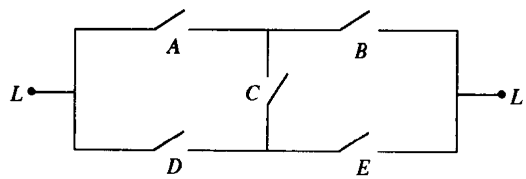

图 1-1

30. 设有甲、乙两名射手轮流独立地对同一目标射击,甲的命中率为 p_1,乙的命中率为 p_2.甲先射,谁先命中谁得胜,试分别求甲获胜的概率和乙获胜的概率.

31. (配对问题) 某人写了 n 封不同的信,欲寄往 n 个不同的地址.现将这 n 封信随意地插入 n 只具有不同通信地址的信封里,求至少有一封信插对信封的概率.

32. 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$.问 A 与 B 是否独立?

33. 两台机床加工同样的零件,第一台出废品的概率是0.03,第二台出废品的概率是0.02.加工出来的零件混在一起,并且已知第一台加工的零件比第二台多一倍,求任意取出的零件是合格品的概率.又如果任意取出的零件经过检查后是废品,求它是第二台加工的概率.

34. 对飞机进行三次独立地射击,第一次射击的命中率为0.4,第二次为0.5,第三次为0.7.飞机被击中一次而被击落的概率为0.2,被击中两次而被击落的概率为0.6.若被击中三次,则必然被击落,求射击三次而击落飞机的概率.

35. 甲、乙两箱中都放有10个红色、白色两种颜色的球,甲箱中有红球6个、白球4个;乙箱中有红球4个,白球6个.现从甲箱中任取1球放入乙箱,再从乙箱中任取1球:

(1) 求从乙箱中取出的1球为红球的概率;

(2) 若从乙箱中取出的1球为白球,求从甲箱取出的1球也是白球的概率.

36. 在第一个箱中有10个球,其中8个是白的;在第二个箱中有20个球,其中4个是白的.现从每个箱中任取一球,然后从这两球中任取一球,取到白球的概率是多少?

37. 有一批产品,其中正品有 n 个,次品有 m 个,先从这批产品中任意取出 l 个(不知其中的次品数),然后再从剩下的产品中任取一个恰为正品的概率是多少?

38. 甲袋中放有5只红球,10只白球;乙袋中放有5只白球,10只红球.今先从甲袋中任取一球放入乙袋,然后从乙袋中任取一球放回甲袋.求再从甲袋中任取两球全是红球的概率.

39. 设来自三个地区的各10名、15名和25名考生的报名表,其中女生的报名表分别为3份、7份和5份.随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 q.

40. 假设有两箱同种零件:第一箱内装 50 件,其中 10 件一等品;第二箱内装 30 件,其中 18 件一等品.现从两箱中随意挑出一箱,然后从该箱中先后随机取两个零件(取出的零件均不放回).试求:

(1) 先取出的零件是一等品的概率 p;

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下,第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

41. 甲、乙二人投篮,投中的概率分别为 0.6 和 0.7,今各投三次,求:

(1) 二人投中次数相等的概率;

(2) 甲比乙投中次数多的概率.

42. 假设一厂家生产的每台仪器,以概率 0.70 可以直接出厂;以概率 0.30 需进一步调试,经调试后以概率 0.80 可以出厂;以概率 0.20 定为不合格品不能出厂.现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立),求

(1) 全部能出厂的概率 α;

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β;

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

43. 在对某厂的产品进行重复抽样检查时,从抽取的 200 件中发现有 4 件次品,问能否相信该厂产品的次品率不超过 0.005.

44. 设平面区域 D_1 是由 $x=1, y=0, y=x$ 所围成,今向 D_1 内随机地投入 10 个点,求这 10 个点中至少有 2 个点落在由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围成的区域D 内的概率.

45. 某类电灯泡使用时数在 1000 个小时以上的概率为 0.2,求三个灯泡在使用 1000 小时以后最多只坏一个的概率.

46. 设甲、乙都有 n 个硬币,全部掷完后分别计算掷出的正面数,求甲、乙两人掷出的正面数相等的概率.

47. 设一昆虫产 i 个卵的概率为$\frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}(i=0,1,\cdots)$.而每个卵能孵化为成虫的概率为 p,且各卵的孵化是相互独立的,试求这昆虫的下一代有 k 只的概率.

三、习题解答与分析

1. **证**　左$=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})]=$右.

2. **解**　$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-r$;

$P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=q-r$;

$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=1-P(A)+P(B)-P(\bar{A}B)=1-p+r$;

$P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-p-q+r.$

3. **解** 这是一个古典概型问题.

设 $A=\{n$ 件中有 m 件次品$\}$.

从 N 件产品中任取 n 件,取到任给的 n 件产品的可能性相等.于是有

$$n = C_N^n$$

由题意可知,A 发生当且仅当 n 件中有 m 件取自 M 件次品,有 C_M^m 种可能,另外 $n-m$ 件取自 $N-M$ 件正品,有 C_{N-M}^{n-m}种可能.由乘法原则,$m=C_M^mC_{N-M}^{n-m}$,故

$$P(A) = C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$$

4. **解** **方法 1** 这是一个古典概型问题.考虑取球的顺序,这是可重复的排列.总数 $n=3^3=27$.下面求出各事件所包含的样本点的个数.

三次全取到红球只有一种可能,故 $m_1=1$.同样地,$m_2=m_3=1$.三次取到的颜色相同,即全红、全黄或全白,有 3 种可能,故 $m_4=3$.三次取到 3 种不同的颜色,考虑到顺序,有 $3!=6$ 种可能,故 $m_5=6$.三次颜色不全相同的个数等于总数减去三次颜色全相同的个数,故 $m_6=n-m_4=27-3=24$.无红颜色球,即每次都取到黄球或白球,由可重复的排列数的计算公式,$m_7=2^3=8$.同样地,$m_8=m_9=8$.显然,$m_{10}=1$, $m_{11}=2$.于是

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{27}, \quad P(D) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

$$P(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}, \quad P(F) = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

$$P(G) = P(H) = P(I) = \frac{8}{27}, \quad P(J) = \frac{1}{27}, \quad P(K) = \frac{2}{27}$$

方法 2 根据事件有下述关系.A,B,C 两两互不相容.$D=A\cup B\cup C$, $F=\overline{D}$, $J=B$, $K=A\cup C$.

用方法 1 求得 $P(A),P(B),P(C)$.由上述关系,有

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{9}$$

$$P(F) = 1 - P(D) = \frac{8}{9}$$

$$P(J) = P(B) = \frac{1}{27}$$

$$P(K) = P(A) + P(C) = \frac{2}{27}$$

其余事件的概率的计算同方法 1.

5. **解** 这是一个古典概型问题.设 $A=\{$三张都不同号$\}$.由题意,有 $n=13^3$, $m=P_{13}^3$,则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{132}{169}$$