高等学校教材

线弹性结构静动态有限元法

丁耀武 主编

东北工学院出版社

内 容 提 要

本书是根据"机械设计与制造"专业本课程的教学大纲编写的。内容包括：弹性力学的基本理论、弹性力学平面问题的有限元法、平面三角形单元的有限元程序、空间轴对称结构的有限元法、刚架结构有限元法及其程序、等参元、薄板弯曲问题有限元法、薄壳问题有限元法、整体结构若干问题分析、线弹性结构的动力方程分析、结构的固有频率与振型、用有限元法分析结构动力响应。并附有两个实用计算程序。本书既有基本理论与方法，又有深一步的阅读内容。除用做本科生教材外，还可供工程技术和科研人员学习使用。

高等学校教材

线弹性结构静动态有限元法

丁耀武　主编

东北工学院出版社出版　东北工学院出版社发行
（沈阳·南湖）　沈阳农业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16　印张：24　字数：599千字
1990年4月第1版　1990年4月第1次印刷
印数：1～1000册

责任编辑：崔华林　责任校对：张德喜

ISBN7－81006－095－3/TH·17　定价：5.06元

目　　录

第6章　刚架结构有限元法

第7章　刚架有限元法计算框图及程序

第8章　等参数单元（等参元）

第9章　薄板弯曲问题有限元法

第10章　薄壳问题有限元法

第11章　整体结构分析中的几个问题

第1章　绪　论

§1-1　引　言

在生产实践和科学实验中，人们已经认识到，几乎所有的自然材料（岩石、煤、木材……）和人工合成的材料（各种钢材、混凝土、塑料、有色金属、合金……）都在不同程度上具有一定的弹性。即当外载荷引起的结构变形未超出某一限度时，随着外载荷的消失，变形也将消失，使结构变形处于线弹性范围以内；同时，人们也认识到，当外载荷超过某一限度时，即使去掉结构所受的外载荷，其变形也不能完全消失，而产生不同程度的永久变形，即塑性变形。

工程上由各种材料制造的各种构件，受载后可能产生弹性和塑性变形，但在小变形范围内，构件材料的弹性变形占主要地位，因此我们可以忽略极微量的塑性变形，而认为由各种材料制造的构件是完全弹性体，《弹性力学》所研究的对象就是这种完全弹性体。

在机械工程和土木工程的各种构件的设计和运转过程中，人们掌握构件受载后的应力分布状态和变化规律，以及变形状态和规律，具有极其重要的意义，这直接涉及到构件的安全可靠性和经济性。《弹性力学》是研究由各种材料制成的各种形状的构件，在外载荷作用下其内部产生的应力分布状态和变形规律，正确判定构件的强度与刚度指标，以便更合理地决定它的形状、尺寸和材质。《材料力学》和《结构力学》则是分析杆件和杆系结构，而且对杆件在拉（压）、弯曲和扭转变形状态下做了平面截面假设（在这种假设条件下，使得分析过程所用的数学工具比较简单，所得出的计算公式也便于应用，但其计算精度较低），因而它们在工程上的应用范围受到一定的限制。《弹性力学》不仅可以更深入地研究杆系结构，还可以分析板、壳、块体结构的应力与变形，以及局部应力问题。并且在弹性力学中对受载构件的变形状态不做任何假设（有时也引入某些假设），它只是从受载构件中取出一微小单元体，从静力平衡条件和几何变形关系等方面，建立线弹性构件内任意点的位移与应力的基本关系式（平衡微分方程、几何方程、物理方程），这些关系式具有普遍的意义，它已为求解各种构件的强度与刚度问题建立了普遍的理论基础。

但是，应该指出，由于弹性力学的基本方程是以偏微分方程组形式表示的，对于许多实际工程问题，常因实际构件的受载和边界条件复杂而无法从偏微分方程组中解得解析解，因此，促使许多力学工作者不得不求助于计算量很大的数值近似解法，这就使弹性力学在工程中的应用受到了很大限制。

形状复杂构件的结构振动问题，在机械振动分析中也是难以解决的问题。虽然在经典振动理论中讲述了一些近似解法，如瑞雷-李兹法、伽辽金法等等，但对形状复杂的构件仍然解决不了。

随着大型数字电子计算机的出现，以及它的应用日益发展和普及，弹性力学中的数值近似解法和结构力学中的结构矩阵分析方法，以及工程结构振动问题的一些近似解法就逐步发展成有限单元法。该方法50年代起源于航空工业中对飞机结构的矩阵分析，1960年被推广应

用于求解弹性力学的平面应力问题，并开始应用"有限单元法"这一术语。目前，应用有限单元法（或有限元法）求解任何弹性力学、结构力学和结构振动问题的近似解已不受限制了，从而使弹性力学和结构振动的基本理论在工程中的应用得到迅速发展。因此，有限元法已成为工程结构设计中一种比较新颖和有效的数值计算方法，它的应用将会提高人们对各种构件的应力和变形的分析能力，使人们能够认识许多过去认识不清的结构强度和振动问题，从而提高人们的设计能力和构件设计的准确性与可靠性。有限元法也已成为对我国现有机械设备进行改造、挖掘设备潜力的一种手段。

§1－2　有限元法概述

有限元法是随着电子计算机的应用而发展起来的一种数值计算方法。目前，该方法在工程中的应用已非常广泛。根据它在工程中的应用情况，可分为线性和非线性有限元法。线性有限元法中又可分为静力有限元法和动力有限元法。为便于了解，先简述静力有限元法。其实质是，先将结构（连续体）分割成数目有限的小单元体（称为单元），这些小单元体彼此间只在数目有限的指定点（称为结点）上互相连结，用这些小单元体组成的集合体来代替原来的结构。当然，每小单元体的力学特性都与原结构对应于该小单元处的力学特性相同；再把每个小单元上实际作用的外载荷按静力等效原理分配到单元的结点上，构成等效结点力，并按结构实际约束情况决定受约束结点的约束。这一步通常称为结构离散化。其次，对每个小单元根据分块近似的思想，选择一个简单的函数来近似地表示其位移分量的分布规律，并按弹性力学中的变分原理（虚功原理）建立起单元结点力与结点位移之间的关系（单元刚度方程）。最后，把全部单元的结点力与结点位移之间的关系组集起来，就得到一组以结构结点位移为未知量的代数方程组，并考虑结构约束情况，消去结点位移为零的方程，再由最后的代数方程组就可求得结构上有限个离散结点的各位移分量。求得了结构上各结点的位移分量后，即可按单元的几何方程和物理方程求得各单元的应变和应力分量。

归纳起来，静力有限元法的分析步骤可以通过图1－1示的实例，使读者建立起初步的概念。图1－1(a)表示一个局部受均布载荷q的等厚度悬臂梁，梁内有一梯形孔，用有限元法分析该结构受载后的应力与变形问题，按前述，可分为如下几个步骤：

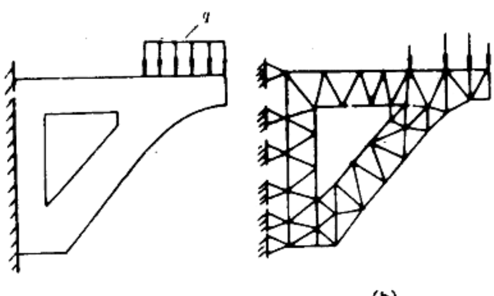

图1－1

一、结构的离散化

有限元法把图1-1(a)示的弹性连续体离散化，就是把原结构划分成数目有限的小单元体（网格划分），每个小单元体有三个结点（对于平面三角形单元而言）与其他相邻的小单元体相连接，见图1-1(b)，用这些小单元体的集合体来代替图1-1(a)示的原结构。显然，当离散化网格划分的越细小时，有限元法的离散化结构越能更加真实地逼近原结构。结构离散化的网格划分可选用不同类型和不同数目的单元，对于二维问题，可选用三角形单元、矩形单元、任意四边形单元；对于三维

问题、板壳问题，以及杆系结构的单元选用，详见以后各章的叙述。

把原结构划分成有限元网格后，还要把原结构所受的外载荷按静力等效原理分配到各单元的受载结点上（见图1-1(b)），构成各单元的等效结点力。另外，根据原结构的约束条件，还应把离散化结构在约束区域内的各受约束的结点引入足够的约束。至此，我们就从原结构抽象出有限元法的离散化结构的力学模型。

二、选择单元的位移模式

在抽象出结构离散化力学模型以后，就可以根据所选定的单元类型来假定该种单元的位移场是坐标的某种简单函数，称该函数为单元的位移模式或位移函数。在有限元法分析中，通常都是假定单元的位移模式是多项式，这是因为多项式的数学运算比较方便，而且用各单元的位移多项式曲线的局部线段（分段近似）容易逼近整体结构的位移光滑曲线。至于多项式的项数和阶次的选取，则与单元的自由度数和位移近似解的收敛性有关。一般来说，单元位移多项式的项数应与单元自由度数相等，它的阶次至少应包含常数项和一次项，至于高次项要选取多少项，则应视单元类型而定。

根据已选定的位移模式，可用单元结点位移插值方法导出单元内任一点位移的矩阵表达式：

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e \qquad (1\text{-}1)$$

式中 $\{f\}$——单元内任一点的位移列阵；

$\{\delta\}^e$——单元的结点位移列阵；

$[N]$——单元的形函数矩阵，它的元素是任一点位置坐标的函数。

三、单元的力学特性分析

选定了各单元的位移模式以后，就可根据单元内任一点的几何方程、物理方程和虚功方程来分析单元的力学特性。

把式（1-1）代入几何方程，可导出用单元结点位移列阵表示的单元应变表达式：

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \qquad (1\text{-}2)$$

式中 $\{\varepsilon\}$——单元内任一点的应变列阵；

$[B]$——单元的应变矩阵，它的元素仍为任一点位置坐标的函数。

把式（1-2）代入物理方程中，可导出用单元结点位移列阵表示的单元应力表达式：

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e \qquad (1\text{-}3)$$

式中 $\{\sigma\}$——单元内任一点的应力列阵；

$[D]$——单元的弹性矩阵，它与材料特性有关。

利用弹性体的虚功方程建立起单元的结点力列阵与结点位移列阵之间的关系式，即形成单元刚度方程式：

$$\{F\}^e=[K]^e\{\delta\}^e \qquad (1\text{-}4)$$

式中 $[K]^e$——单元刚度矩阵，

$$[K]^e=\iiint_V [B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz \qquad (1\text{-}5)$$

式（1-5）的三重积分是对整个单元体积V进行的。

四、建立整体结构的刚度方程

将各个单元刚度矩阵$[K]^e$应用直接刚度法或其他方法组集成整体结构刚度矩阵$[K]$，再把作用于各单元的等效结点力列阵$\{F\}^e$组集成总载荷列阵$\{F\}$，便可组成以$[K]$、$\{F\}$和整体结构的结点位移列阵$\{\delta\}$表示的整体结构刚度方程式：

$$[K]\{\delta\}=\{F\} \tag{1-6}$$

考虑整体结构的几何约束情况，适当修改式（1-6），才能从修改后的式（1-6）解出各结点的未知位移值。

五、求解修改后的整体结构刚度方程

考虑整体结构的约束情况，修改整体刚度方程之后，式（1-6）就变成以未知结点位移分量为未知数的代数方程组，选择代数方程组的合适解法，就可解得各结点的位移分量。

六、由单元的结点位移列阵计算单元应力

由修改后的式（1-6）解出整体结构的结点位移列阵$\{\delta\}$后，再根据各单元结点编号顺序从$\{\delta\}$中找出各单元的结点位移列阵$\{\delta\}^e$，将$\{\delta\}^e$代入式（1-3）中就可算出各单元的应力分量值。

对于工程中的机械振动问题和机械结构的动强度问题，在大多数情况下，构件的质量具有分布特点，属于无限多自由度系统振动问题。由于采用结构离散化方法而将结构的分布质量聚缩成结点的集中质量，就将无限多自由度的弹性体简化为多自由度系统进行分析，以便得到结构较低的若干阶频率的一些振动特性与规律，这样，往往就能满足机械结构设计和使用上的要求。这种简化分析方法在振动分析中很早就被应用。随着电子计算机的广泛应用和静力有限元法的发展，上述结构振动分析方法逐步发展成动力有限元法。目前，运用动力有限元法，对任何复杂的弹性结构的振动问题，都可以离散化成多自由度系统的振动问题，并运用动力有限元法去求其近似解。

目前，有限元法不但广泛应用于求解线弹性结构的静、动力问题，而且对结构的稳定性和非线性问题，以及对流体场和电磁场问题的分析也均能适用。限于篇幅，本书只对线弹性结构静、动力问题进行分析，其他问题请参考有关专著。

由上述可见，弹性理论和多自由度振动理论是本教材的基本理论；静、动力有限元法是本教材分析各种线弹性结构静、动强度和振动问题的方法；有限元程序的编制和计算机操作是我们计算各种线弹性结构的静、动强度和振动问题的手段。所以，本教材所研究的理论是精确的，方法是近似的，手段是先进的。学习好本教材，能解决各种线弹性结构的强度与刚度，以及动态特性分析等问题，这将对机械设备和工程结构的设计和改造起到重要作用。

第2章　弹性力学的基本理论简介

弹性力学主要研究各种弹性结构(或称弹性体)在外力和温度变化的作用下所产生的应力分布规律和变形状态。弹性力学在研究弹性体的这些未知量时，并不是从各个具体弹性体出发，而是根据各种弹性体所共有的基本属性，抽象出统一的和理想化的模型进行分析，从中建立某些基本概念，并导出模型内任一点的平衡微分方程、 几何方程、 物理方程及边界条件，这些就构成弹性力学的基本理论；然后，结合具体工程问题去求解弹性体的应力分布规律和变形状态，即求解弹性力学问题的理论解。

本教材不研究用弹性力学经典方法去求解具体工程结构的应力与变形规律，而是用静、动态有限元法代替。但是，弹性力学的基本理论则是研究静、动态有限元法的理论基础。

§2-1　弹性力学的基本概念和基本假定

一、基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、内力、应力、应变、形变和位移。

1．外力：作用于弹性结构上的外力可分为表面力（又称面力）和体积力(又称体力)。

面力是指分布在结构表面上的外载荷，如流体压力，物体间的接触压力等。一般来说，结构表面上各点所受的面力大小和方向是不相同的，它是结构表面上各点位置坐标的函数。为了表示结构表面上某一点P所受面力的大小和方向，在结构表面上P点附近（包括P点）取一微小面积 ΔS(见图2-1)，假设作用于 ΔS上的面力是连续分布的,且其值为 ΔQ, 则该微小ΔS上面力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta S$。如果令 ΔS无限减小而趋近于P点,则 $\Delta Q/\Delta S$将 趋于一定

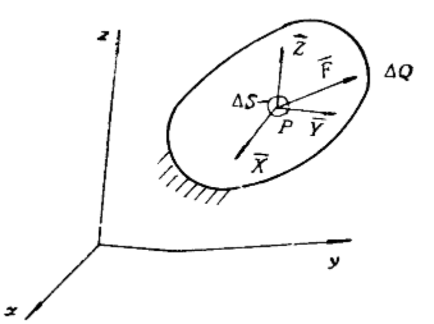

图2-1

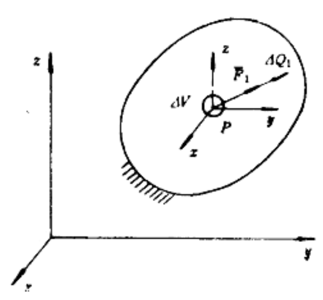

图2-2

的极限矢量$\overline{F}$：

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \overline{F} \tag{2-1}$$

这个矢量$\overline{F}$就是结构在P点处所受面力的集度，简称面力。

矢量$\overline{F}$在三个坐标轴（右手坐标系）x，y，z上的投影为 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$，称这三者为结构上在P点的面力分量，且以沿坐标轴正方向为正，相反者为负。它们的因次（量纲）为〔力〕〔长度〕$^{-2}$，它们的单位为Pa或MPa。

弹性力学把结构所受的集中力看成是面力的特殊状态——作用于一点或微分面积上的面力。

体力是指分布在结构体积内的力，它是作用在结构内的每个质点上，如重力、惯性力等等。结构内所受的体力一般是和质量成正比，而且各点不相同，它仍是各点位置坐标的函数。为了表示结构在某点P所受体力的大小和方向，在结构上取包含P点在内的微小体积 ΔV，设作用于 ΔV的体力为 ΔQ_1（见图2-2），则 ΔV上体力的平均集度为 $\Delta Q_1/\Delta V$。如令ΔV无限减小而趋近于P点，则 $\Delta Q_1/\Delta V$将趋于一定的极限矢量$\overline{F}_1$：

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q_1}{\Delta V}=\overline{F}_1 \tag{2-2}$$

极限矢量$\overline{F}_1$即为结构内P点所受体力的集度，简称体力。体力$\overline{F}_1$在x、y、z 坐标轴上的投影为X、Y、Z，这三者称为结构内P点的体力分量，且以沿坐标轴的正方向为正，相反者为负，它们的因次为〔力〕〔长度〕$^{-3}$。

2．内力与应力：假想用截面$m-n$将受外力作用而处于平衡状态的结构截成A和B两部分，移去B部分（图2-3的虚线部分），留下A部分（图2-3实线部分），则根据A部分的平衡条件判断，B部分必然在截面$m-n$上对A部分作用有一定的力，称为内力。通常，内力在截面$m-n$上是连续分布的，且分布不均匀。

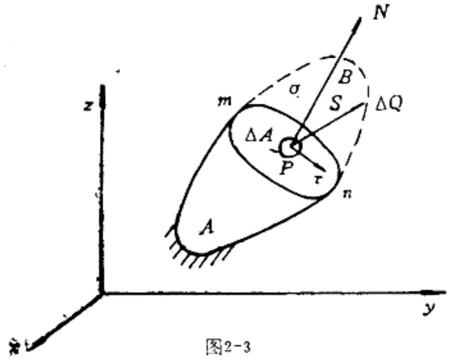

图2-3

在A部分截面$m-n$上取一小面积 ΔA，再在小面积 ΔA上取一点P，假设作用于 ΔA上的内力为ΔQ，则内力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta A$，$\Delta Q/\Delta A$即是ΔA上的平均应力。如令ΔA无限减小而趋于P点，则$\Delta Q/\Delta A$将趋于一定的极限矢量S：

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta A}=S \tag{2-3}$$

极限矢量S就是结构在截面$m-n$上P点的应力，应力S的方向与内力 ΔQ的极限方向一致。

在一般情况下，应力S的方向并不与截面$m-n$的法线N方向一致，通常是将应力 S沿截面$m-n$的法线和切线方向分解成两个分量——正应力σ和剪应力τ，见图2-3。应力及其分量的因次为〔力〕〔长度〕$^{-2}$，单位为Pa。

应该指出，一般来说，在弹性力学所研究的结构内，不同截面上的应力是不尽相同的；同一截面上不同点的应力也不尽相同；同一点而通过该点所做截面方位不同，应力也不相同。因此，通常结构内的应力不仅与所考察的位置有关，还与所做截面的方位有关。

为了考察受外力而平衡的结构内某一点的应力状态，从结构内任意点P截出一个微小平行六面体，该六面体过P点的三个棱边PA，PB，PC分别平行于坐标轴ox，oy，oz，且$PA=dx$，$PB=dy$，$PC=dz$，见图2-4。将微小六面体的BPC截面（垂直x轴）、APC截面（垂

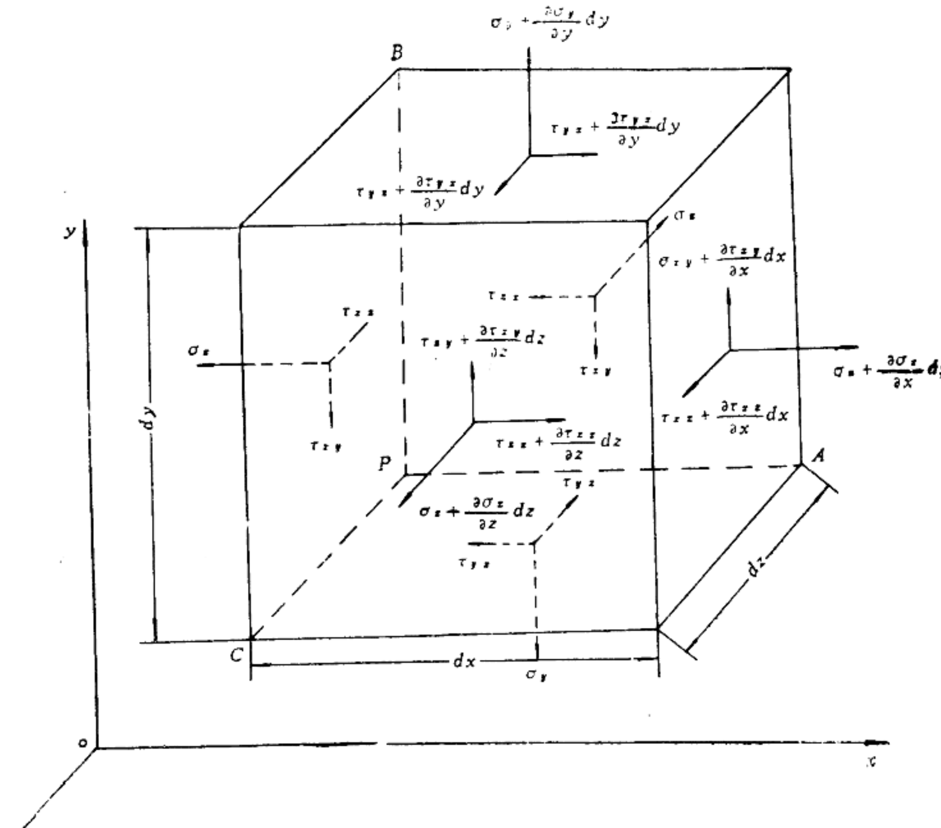

图2-4

直y轴）、APB截面（垂直z轴）上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，这些应力分量分别与三个坐标轴平行。我们规定，小六面体的各个截面的外法线与坐标轴同向时，称为正面，反之为负面；正面上的应力方向与坐标轴一致者取正值，反之取负值，负面上的应力方向与坐标轴相反者取正值，反之取负值。图2-4中标出小六面体的三个负面上的正应力分别设为σ_x，σ_y，σ_z，它们都是取正值，三个正面上的正应力通常应有增量，可分别写成：$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\sigma x}dx$，$\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$，$\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz$，它们也是取正值；三个负面上的剪应力分别为$\tau_{xy}$，$\tau_{xz}$，$\tau_{yx}$，$\tau_{yz}$，$\tau_{zx}$，$\tau_{zy}$，这些剪应力分别用两个角码区分它们的作用面和方向，前一个角码代表剪应力作用面垂直于那一个坐标轴，后一个角码表明其作用方向沿着那一个坐标轴，例如τ_{xy}是作用在垂直于x轴的面上而沿y轴方向的剪应力，三个正面上的剪应力通常也应有增量，可分别写为：$\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$，$\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx$，$\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$，

$\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy$，$\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz$，$\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$；这些剪应力按前述规定都是正值。

3．形变与应变：结构在外力作用下总要产生一定的形状改变，通常称为形变（或变形）。这种形状的改变可以归结为从结构内任取的微小六面体的各边长度的改变和两边之间夹角的改变。我们先从图2-4中取出微小六面体上过P点的PA和PB微线段进行分析，可画出其变形前后的图形，见图2-5。

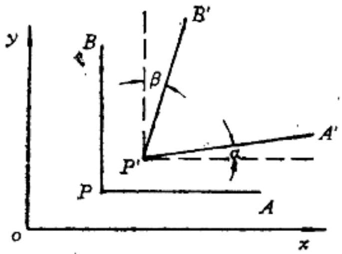

图2-5

设过P点微小六面体的PA和PB两线段变形后变成$P'A'$和$P'B'$，各线段单位长度的伸缩（相对伸缩）定义为正应变，用ε_x和ε_y表示，ε_x表示PA线段在x轴方向的正应变，ε_y表示PB线段在y轴方向的正应变，正应变以线段伸长为正，缩短为负，与正应力的正负号规定相适应；PA与PB两线段变形后的夹角缩小了$\alpha+\beta$，用$\gamma_{xy}=\alpha+\beta$表示两线段之间直角的变化，并定义γ_{xy}为结构P点在xoy平面内的剪应变，两线段之间直角变小时剪应变为正，变大时为负，且与剪应力的正负号规定相适应。正应变和剪应变都是无因次的量。

同理，对于过P点微小六面体其他两两线段变形后的正应变与剪应变的定义，与上述相似。因此，结构内任意点P共有三个正应变ε_x，ε_y，ε_z和三个剪应变γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}，这六个应变分量称为P点的的形变分量，它们可以完全确定该点的形变状态。一般来说，结构内各点的应变都是不相同的，它是各点位置坐标的函数。

4．位移：在外力作用下结构内每一点都要发生位置的变化，称这种位置改变为位移。图2-4示的微小六面体上P点的位移可由两部分组成：一部分是刚体位移（各应变等于零时的位移），另一部分是小六面体本身形变产生的位移，后者与应变构成确定的几何关系。位移是个向量，它在x，y，z三个坐标轴上的投影构成位移分量u，v，w。位移分量以沿坐标轴正方向为正，反之为负。位移及其分量的因次为〔长度〕。一般来说，结构内每一点的位移也是不相同的，它也是各点位置坐标的函数。

总之，弹性力学通常把所研究结构所受的体力分量和面力分量都看成是位置坐标的函数，把结构内任意一点的应力分量、形变分量和位移分量也都看成是该点位置坐标的函数。

二、基本假定

为了由弹性力学问题中的已知条件（外载荷和边界条件）求出未知量（应力分布函数和位移函数），必须建立这些已知条件和未知量之间的关系，以及各个未知量之间的关系，即需要建立一套求解方程（平衡微分方程、几何方程和物理方程）及边界条件。在导出这些关系式时，如果精确考虑所有各方面因素，则导出的方程变得非常复杂而无法求解。因此，通常把研究对象或求解结构做出某些简化，略去一些暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。弹性力学的基本假定如下：

1．所研究的结构是连续的。即假定整个结构的体积都由组成该结构的材质微粒所填满，不留下任何空隙。这样，结构内的应力、应变和位移才可能是连续的，才可能用坐标的

连续函数来表示它们的变化规律。从微观上看，一切材质都不能符合这个假定，但是，从宏观上看，结构材质微粒尺寸和微粒之间的距离远比结构尺寸小得很多，因此，结构的这种连续性假定就不会引起显著的误差。

2．所研究的结构是完全弹性体。即结构受外力而产生变形，当外力去掉后，结构能迅速恢复原来形状而不留任何残余变形，或者说，结构的材质服从虎克定律，其应力与应变成正比，而且反映这种比例关系的弹性常数并不随应力或应变的大小和符号而变化。这样，对于用脆性材料制成的结构，在其应力未超过比例极限以前，可近似地认为它是完全弹性体；对于用韧性材料制成的结构，在其应力未达到屈服极限以前，也可认为是完全弹性体。此外，这个假定还说明，结构在任何瞬时的应变只取决于该瞬时所受的外力，而与它在该瞬时以前和以后的受力情况无关，即应变与施加外力的次序无关。

3．结构的材质是均匀的。即整个结构是由同一种材料组成的。这样，整个结构的各部分才具有相同的物理特性，即具有相同的弹性模量E和泊松比μ，结构的物理特性不随位置坐标而变化，从而才能从结构内任意取出一微小六面体进行分析，然后把分析结果用于整个结构。实际上，工程结构的材质是由微小颗粒组成的，因而这种均匀性只具有统计平均的意义。对于各种金属材料，这种均匀性比较符合实际；对于混凝土之类的材料，并不符合这种均匀性，但只要混凝土的每种材料的颗粒远小于结构尺寸且均匀地分布在结构内，从统计平均意义上看，也可以当成是均匀的。

应该指出，均匀性假定并不妨碍弹性力学处理由几部分材质组成的构件，只要在每一部分都能满足均匀性假定即可。

4．结构是各向同性体，即结构材料的弹性模量和泊松比等不随方向而变化。对于橡胶等非晶体材料，这一假定是符合的；对于钢铁等由晶体组成的金属材料，尽管它们由各向异性的晶体组成，而且轧制钢材还有纤维效应，但由于晶体很微小且是不规则的随机排列，从统计平均效应看，钢质构件的弹性常数基本上满足各向同性的要求；而由石料、木材和竹材制成的构件都不能当做各向同性体。

5．结构的位移和形变是微小的。即假定结构受载后，其各点的位移都远远小于结构的原尺寸，应变与转角都远远小于1。这一假定使得建立结构变形后的平衡微分方程时，可用变形前的尺寸代替变形后的尺寸，并可不考虑载荷作用方向随着变形的改变而产生的变化；另外，在研究结构变形和位移时，可略去应变和转角的二次项，从而可以使弹性力学中的代数方程和微分方程简化为线性的，可利用叠加原理建立和运算它们。

凡满足上述前四个假定的物体，称为理想弹性体。本教材把所研究的物体都看成是这种弹性体，由这种弹性体组成的工程结构，称为线弹性结构。

§2-2　平衡微分方程

在弹性力学的基本理论分析中，主要从静力学、几何学和物理学三方面考虑问题。由受外载而平衡的结构中任意取出微小六面体，研究该六面体的静力平衡条件而导出平衡微分方程。

一、直角坐标下的平衡微分方程

在受外载而平衡的结构内任意一点P，截出一个微小平行六面体，其六个面分别垂直于直角坐标轴x，y，z，而各棱边长度分别为$PA=dx, PB=dy, PC=dz$，见图2-4。由于整个结构是受外载而处于平衡的，则结构内部的各部分也都处于平衡状态，而从结构内任意一点P截出的微小六面体，当然也处于平衡状态。一般来说，结构内的各应力分量是位置坐标的函数。因此，作用在这小六面体三组两对面上的各应力分量就不完全相同，而具有微小的差量，如图2-4所示。由于所取的六面体是微小的，因而可认为其体力在三个方向的分量X，Y，Z是均匀分布的，微六面体每个面上的应力也认为是均匀分布的。

首先，把作用于微六面体上的各内力和体力分量投影到x轴上，列出投影平衡方程

$$\Sigma F_x=0,\text{ 得：}\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx-\tau_{yx}dzdx$$

$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+Xdxdydz=0;$$

再由投影到y轴和z轴上的两个平衡方程$\Sigma F_y=0$和$\Sigma F_z=0$，可得出与上式相似的两个方程。将这三个方程约简，并除以$dxdydz$后，可得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z=0\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}4)$$

式（2-4）就是空间弹性力学问题的平衡微分方程。该方程代表外力处于平衡状态下，结构内各点应力分量与体力之间的一组必须满足的平衡条件，它是弹性力学的基本方程之一。

其次，以连接小六面体垂直于x轴的左右两面中心的直线ab为力矩轴线，列出各应力分量与体力对轴线ab的力矩平衡方程$\Sigma M_{ab}=0$，得：

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dy}{2}+\tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\frac{dz}{2}$$

$$-\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}=0$$

上式除以$dxdydz$、合并同类项、略去微量项，得：

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}\ ;$$

同理，可得：$\tau_{zx}=\tau_{xz}$ ；

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\ 。$$

这就是受外力而平衡的结构内任意一点P的各剪应力分量之间成对互等定理。

由此看出，结构内任一点的九个应力分量中，只有σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}和τ_{zx}这六个是独立的，称这六个应力分量为结构内任一点的应力。

二、圆柱坐标下的平衡微分方程

机械工程中常常遇到对某一坐标轴（如z轴）对称的结构。求解这种结构的弹性力学问题，采用圆柱坐标系$r\theta z$比较方便。为此，需要给出圆柱坐标下的平衡微分方程。由于该方程的导出比较麻烦，本教材只引出结果，其详细推导可参见〔1〕。

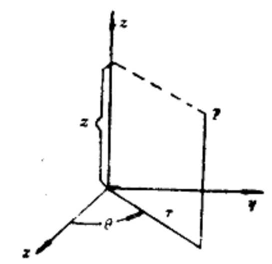

图2-6

在圆柱坐标系中，结构内任一点P的位置决定于三个坐标r，θ，z，见图2-6。z轴取为对称轴，r是P点到z轴的径向距离，θ是P点和z轴组成的径向平面与xz平面之间的夹角。于是用圆柱坐标表示的平衡微分方程为：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+K_r=0;\\
&\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\tau_{\theta r}}{r}+K_\theta=0;\\
&\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+K_z=0;
\end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

中式，K_r，K_θ，K_z分别为r，θ，z方向的体力分量；σ_r，σ_θ，σ_z，分别为沿r，θ,z方向的正应力，通称径向应力、环向应力、轴向应力；六个剪应力仍然遵守剪应力互等定理，$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$，$\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}$，$\tau_{zr}=\tau_{rz}$，它们的作用面和方向的判定，仍然类似于在直角坐标系中用过的方法，例如τ_{rz}就是作用在垂直于r向平面上而沿z向的剪应力。

§2-3　结构内任一点的应力状态、主应力及主应力方向

一、结构内任一点的应力状态

假定受外力而平衡的结构内任一点P的六个应力分量σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}已知，欲求过P点的任一斜截面上的应力。为此，在P点附近取一平面ABC，该平面平行于欲求应力的斜截面，且ABC平面与过P点而平行于坐标面的三个平面组成一个微小四面体$PABC$，见图2-7。当ABC平面无限趋近于P点时，平面ABC上的应力就成为过P点的该斜截面上的应力。

设平面ABC的外法线为N，N与三个坐标轴的夹角的方向余弦为$\cos(N,x)=l$，$\cos(N,y)=m$，$\cos(N,z)=n$。如令三角形ABC的面积为ΔS，则小四面体其余三个三角形BPC，CPA、APB的面积分别为$l\cdot\Delta S$，$m\cdot\Delta S$，$n\cdot\Delta S$。小四面体$PABC$的体积用ΔV表示，三角形ABC上的应力S_N在三个坐标轴上的投影用X_N，Y_N，Z_N表示，见图2-7。

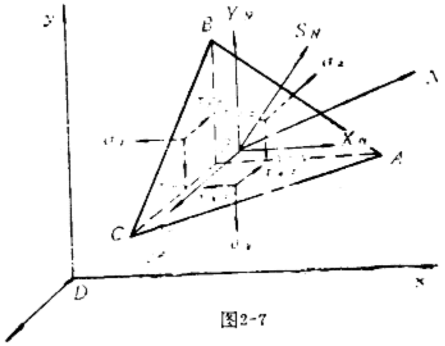

图2-7

由于小四面体$PABC$是无限小的，可认为其各面上的应力是均布的。根据小四面体的平衡条件$\Sigma F_x=0$，得：

$$X_N\,\Delta S-\sigma_x\,l\cdot\Delta S-\tau_{yx}\,m\cdot\Delta S-\tau_{zx}n\,\Delta S+X\cdot\Delta V=0,$$

上式除以ΔS并移项，得：

$$X_N+X\frac{\Delta V}{\Delta S}=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}$$

当平面ABC无限趋近于P点时，ΔV就是比ΔS更高一阶的微量，故可令$\frac{\Delta V}{\Delta S}$趋于零。

于是得：$X_N=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}$

再由平衡条件$\Sigma F_y=0$和$\Sigma F_z=0$，可同样得第二和第三式，即

$$\left.\begin{aligned}X_N&=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx};\\Y_N&=l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy};\\Z_N&=l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z;\end{aligned}\right\}\tag{2-6}$$

或写成矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix}X_N\\Y_N\\Z_N\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_x&\tau_{yx}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&\sigma_y&\tau_{zy}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&\sigma_z\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}l\\m\\n\end{Bmatrix}\tag{2-6a}$$

上面求得的X_N，Y_N，Z_N只是斜截面上平行于x，y，z轴的三个应力分量。如欲求出该斜截面上的正应力和剪应力，可在斜截面ABC上取个新坐标系$x'y'z$，其中x'轴与斜截面的外

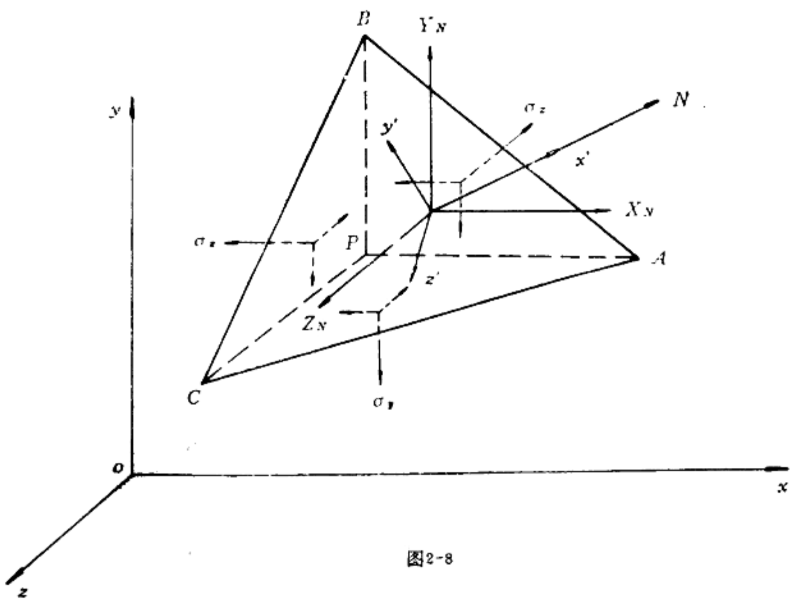

图2-8