黄冈·海淀·天门·荆州二十多所全国重点中学联合推出

活题巧解巧练

huoti qiaoji qiaolian

·中考红皮书·

·根据最新命题趋势编写·

丛书主编／陈桂壮

初中数学

北京大学出版社

中考红皮书

活题巧解巧练

初中数学

黄冈、海淀、荆州、天门联合推出

丛书主编 陈桂壮
本册主编 李文溢
编　　委 李文溢　吴吉勇　彭学军
王光辉　徐　涛　彭家明
杨才文　秦茂桃　吴志华
吴立宏　陈美焕　黄　诚

北京大学出版社

内 容 提 要

本书从培养学生解题思维能力入手，专门传授“活题”巧解方法技巧，亦即“3 + X”中考试卷中那些理论联系实际、关注时代、关注社会的综合能力题的解题方法和技巧。这种类型的“活题”是目前中考试卷中的热点试题，也是学生在中考考试中失分比例最高的题目，师生在平常的备考复习中对此极为关注。本书正是立足于解决这类问题的一本方法手册。

全书以中考《考试说明》为蓝本，以考点为专题，以学科内、跨学科综合问题为重点，分知识类别和试题题型进行解题思路分析和解题方法指导。“考点内容”、“解题档案”、“活题巧解”集中体现了这一思想。练习部分，试题新编，材料鲜活，突出对学生探究性学习方法的指导和创造性思维能力的培养。其中的“新题预测”，题目典型规范，反映最新考试信息，直接瞄准 2003 年中考。

图书在版编目(CIP)数据

活题巧解巧练．初中数学/李文溢主编．—北京：北京大学出版社，2002.6
ISBN 7-301-05622-2

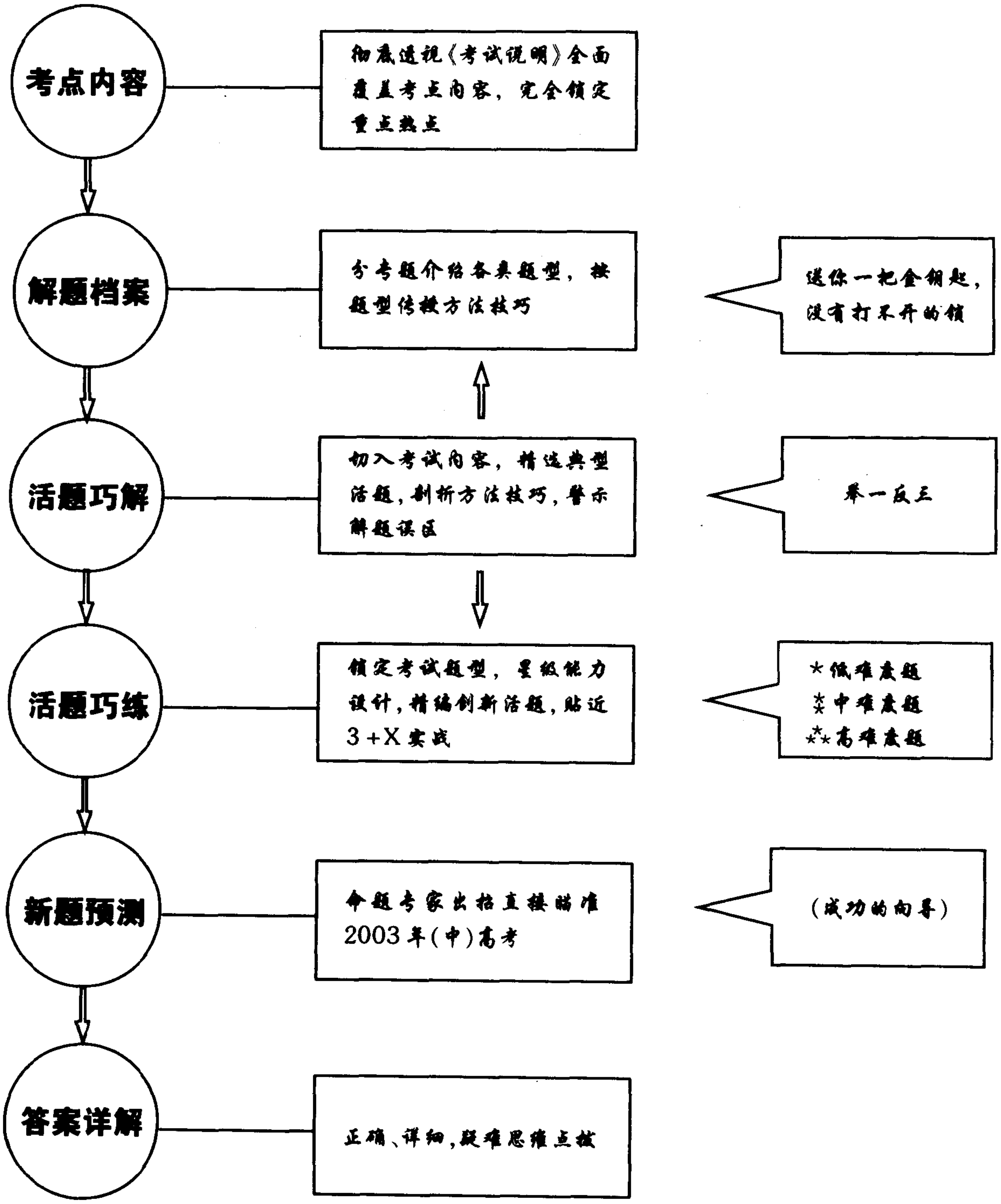
Ⅰ．活…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学课—初中—解题—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 033116 号

书　　名：活题巧解巧练(初中数学)
著作责任者：李文溢
责任编辑：张自强
标准书号：ISBN　7-301-05622-2/G·0714
出 版 者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62754140　编辑部 010-51893149
电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排 版 者：北京科文恒信图书经销有限公司
印 刷 者：河北省丰润印刷有限公司
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
890 毫米×1194 毫米　16 开本　10.25 印张　390 千字
2002 年 6 月第一版　2002 年 6 月第一次印刷
定　　价：10.80 元

导读图示

亲爱的读者，这是一本专门解答学科内、跨学科综合能力题——“活题”，解答技巧的方法手册，是挑战 3 +X 考试高分的金钥匙。为了最大程度发挥本书的作用，提高你的学习效率，建议你在使用本书时先阅读下面图示。



目　录

目　　录

第一章　实数

巧解巧练1　实数的概念

考点过关

考　点　内　容	解　题　档　案
(1)有理数、无理数、实数的概念及实数的分类； (2)倒数、相反数、绝对值的定义及求法； (3)数轴及数轴上的点与实数的一一对应关系； (4)平方根与算术平方根； (5)近似数、有效数字和科学记数法．	(1)利用无理数的概念“无限不循环小数”及实数的分类来判断一个数是无理数还是有理数． (2)利用倒数、相反数、绝对值、平方根与算术平方根的意义解题，会利用近似数的精确度解题，并会用科学记数法表示一个实数．

活题巧解

【例1】已知数 $a-2$ 与 $2a-3$，(1)若这两数互为相反数，则 a 的倒数是______，相反数是______；(2)若这两数互为倒数，则 a 的倒数是______，相反数是______；(3)若这两数的绝对值相等，则 a 的倒数是______，相反数是______．

【分析】由相反数的性质知：若 $a-2$ 与 $2a-3$ 互为相反数，则 $a-2+2a-3=0$，故 $a=\frac{5}{3}$，其倒数与相反数分别为 $\frac{3}{5}$ 和 $-\frac{5}{3}$；由倒数的性质得：若 $a-2$ 与 $2a-3$ 互为倒数，则 $(a-2)(2a-3)=1$，故 $a=1$ 或 $a=\frac{5}{2}$，其倒数与相反数分别为1或 $\frac{2}{5}$ 和 -1 或 $-\frac{5}{2}$；而当 $a-2$ 与 $2a-3$ 的绝对值相等时，有 $a-2=2a-3$ 或 $a-2+2a-3=0$，故 $a=1$ 或 $a=\frac{5}{3}$，其倒数与相反数分别为1或 $\frac{3}{5}$ 和 -1 或 $-\frac{5}{3}$．

【答案】$\frac{3}{5}$，$-\frac{5}{3}$；1或 $\frac{2}{5}$，-1 或 $-\frac{5}{2}$；1或 $\frac{3}{5}$，-1 或 $-\frac{5}{3}$

【评注】学习倒数、相反数、绝对值的有关知识时，要会利用它们的定义求出一个具体数的倒数、相反数或绝对值，还要象本题这样会利用它们的性质解题，即利用若 a、b 互为相反数，则 $a+b=0$，若 a、b 互为倒数，则 $ab=1$，若 $|a|=|b|$，则 $a=b$ 或 $a=-b$ 这些性质解题．

【例2】据测算，我国每天因土地沙漠化造成的经济损失约为1.50亿元，这个近似数精确到______位，有______个有效数字，它表明我国每天因土地沙漠化造成的经济损失最少有______亿元；若一年按365天计算，我国一年因土地沙漠化造成的经济损失为______元(保留三个有效数字)．

【分析】由近似数最后一位数字在哪一个数位上，它就精确到哪一位知1.50亿精确到百万位，而有效数字是指其从左边第一个非零数字至最末一位数字中的所有数字，故有3个有效数字，再由四舍五入的取近似数的方法知，经济损失最少有1.495亿元；一年的经济损失为547.50亿元，将这个值保留三个有效数字且最后单位为元，就应用科学计数法表示为 5.48×10^{10} 元．

【答案】百万　三　1.495　5.48×10^{10}

【评注】解答本题的关键是熟悉近似数的精确度、有效数字等概念，同时要注意取近似数常用的方法：四舍五入法，还要注意审题，要看到最后一空后是“元”这个单位，并熟悉科学记数法中10的指数 n 的确定方法．

【例3】如图1-1所示是标出了长度单位和正方向的数轴，若点 A 对应于实数 a，点 B 对应于实数 b，a、b 是整数，且 $b-2a=7$，则图1-1数轴上的原点应是______点，$\sqrt{ab}$ 的算术平方根是______．

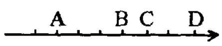


图1-1

【分析】由数轴上标出的长度单位及 a、b 均是整数知：$b-a=3$，又 $b-2a=7$，联立解得 $b=-1$，$a=-4$，故点 C 应为原点；而 $\sqrt{ab}=\sqrt{4}=2$，则其算术平方根为 $\sqrt{2}$．

【答案】C　$\sqrt{2}$

【评注】数轴是实现数形结合的重要工具和方法，本题要注意从图形——数轴上观察到 $b-a=3$ 这个关键条件，另外不要犯认为 $\sqrt{4}$ 的算术平方根是2这样的错误，并注意平方根与算术平方根的区别．

【例4】已知某正数的平方根为 $2a-3$ 和 $a-3$，而数 x 在数轴上对应的点在数 a 与 -1 对应的点之间，则化简 $|x+2|+\sqrt{(x-5)^2}$ 的结果为______．

【分析】要对所给式进行化简，必先确定 x 的取值范围，由题意知 x 在 -1 和 a 之间，故必须求出 a 的值，再由一个正数的平方根有两个，它们互为相反数这一性质知，$2a-3+a-3=0$，$\therefore a=2$，$\therefore -1<x<2$，即 $x+2>0$，$x-5<0$，$\therefore$ 原式 $=x+2-(x-5)=7$

【答案】7.

【评注】熟悉一个正数的两个平方根互为相反数这一性质是解答本题的关键；而思考 $|a|$ 与 $\sqrt{a^2}$ 类型的化简问题时，第一步要弄清 a 的取值范围，再对照 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0)\\-a & (a<0)\end{cases}$ 进行化简，此结论反过来也成立，即若 $|a|=a$，则 $a\geqslant0$，而 $|a|=-a$ 时，$a\leqslant0$．

活题巧练

*1. 在$(-\sqrt{2})^0$，$\sin45°$，0，$\sqrt{9}$，0.010010001…，$\frac{22}{27}$，$\frac{\pi}{2}$这7个数中，无理数有(　　)个

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

*2. 下列说法：(1)-64的立方根是4，(2)49的算术平方根是±7，(3)$\frac{1}{27}$的立方根是$\frac{1}{3}$，(4)$\frac{1}{16}$的平方根是$\frac{1}{4}$，其中正确说法的个数是(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

*3. 若$\frac{3}{a}$的倒数与$\frac{2a-9}{3}$互为相反数，则$a=$(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. -3

*4. 我国最近研制出的"曙光3000超级服务器"排在全世界运算速度最快的500台高性能计算机的第80位左右，它的峰值计算速度达到每秒403200000000次，用科学记数法表示这个峰值计算速度为(　　)

A. 0.4032×10^{12}次/秒　　B. 403.2×10^{9}次/秒

C. 4.032×10^{11}次/秒　　D. 4.032×10^{12}次/秒

*5. 设a、b为非零实数，则$\frac{a}{|a|}+\frac{\sqrt{b^2}}{b}$所有可能的值为(　　)

A. ±2　　B. ±1或0

C. ±2或0　　D. ±2或±1

*6. 若$a^2=b$，则a是b的______，b是a的______，$\sqrt{b}=$______(用含a的代数式表示)

*7. 倒数等于本身的数是______，相反数等于本身的数是______，绝对值等于本身的数是______，平方后等于本身的数是______，立方根等于本身的数是______.

*8. 若$|2-a|\neq2-a$，则a的取值范围是______，若$\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a-1}}\neq1$，则$a$的取值范围是______；$|x|=5$的几何意义是______，$|x|>5$的几何意义是______，不等式$|2x-3|<5$的解集是______(用绝对值的几何意义求解).

*9. 689000精确到万位的近似数是______，保留两个有效数字的近似数是______.

*10. 2.448四舍五入精确到十分位为______，2649000保留两个有效数字的结果是______，2.30×10^5有______个有效数字，近似数0.00102有______个有效数字.

*11. 用科学记数法记为2.03×10^6的数是______，记为-1.95×10^{-4}的数是______.

*12. 数a的近似数为2.05，则a的取值范围是______.

*13. 自从扫描隧道显微镜发明后，世界上便诞生了一门新学科，这就是"纳米技术"，已知52个纳米的长度为0.000000052米，用科学记数法表示，此数为______米.

⁑14. 下列说法：①若a是一个有理数，则a的倒数是$\frac{1}{a}$；②$\frac{\sqrt{3}}{2}$是分数；③实数分为有限小数和无理数；④正整数即是自然数，其中错误的是______(填序号).

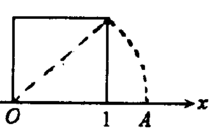


图1-2

⁑15. 某老师在讲实数时，画了一个图(如图1-2)，即"以数轴的单位长线段为边作一个正方形，然后以原点O为圆心，正方形的对角线长为半径画弧交x轴于一点A"，作这样的图是用来说明______.

⁑16. 下列说法：①近似数18.0的有效数字的个数与近似数18的有效数字的个数一样；②近似数7百与近似数700的精确度一样；③"初三(1)班有60位同学"的60是准确数；④$3.7\times10^{-2}$表示的原数是0.0037；⑤$9.60\times10^6$有三个有效数字，精确到万位，其中正确的是______(填序号).

⁑17. 现有22.5吨石灰，若每辆汽车最多只能装7吨，则至少需要______辆汽车才能一次将石灰运完.

⁑18. 一个自然数的算术平方根是a，那么这个自然数相邻的下一个自然数的平方根是______.

⁑19. 已知实数a，b在数轴上的对应点如图1-3所示，则$|a|-|a+b|-|b-a|=$______.

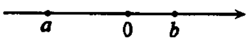


图1-3

⁑20. $\sqrt{81}$的平方根是______，算术平方根是______，$(-4)^2$的算术平方根是______.

⁑21. 一个实数的平方根是$a+3$和$2a-3$，则这个实数是______.

⁑22. 已知$2.468^2=6.091$，则$24.68=$______，0.06091的算术平方根是______.

⁑23. $\sqrt{(-2)^2}=$______，$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=$______，若$a^2=(-\frac{1}{2})^2$，则$a=$______.

⁑24. 若中午12时记作0，下午1时记作+1，则上午7时记作______.

2003年中考新题预测

⁑25. 已知a、b互为相反数，c、d互为倒数，x的绝对值等于2，试求$x^2-(a+b+cd)x+(a+b)^{2002}+(-dc)^{2003}$的值.

巧解巧练 2　实数的运算

考　点　内　容	解　题　档　案
(1)实数的加、减、乘、除、乘方、开方的意义及运算法则，特别是运算结果符号的法则及零指数、负整数指数的意义，特殊的角的三角函数值； (2)实数的大小比较； (3)实数的混合运算法则及运算顺序．	(1)会用求差法、求商法、倒数法及特殊值法比较两个实数的大小； (2)利用有关运算意义及按“+，-”号分段法进行实数的混合运算； (3)会用尝试探索的方法思考解决问题．

活题巧解

【例 1】:计算下列各题:(1)$(\frac{1}{2})^0-\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+|1-\sqrt{2}|$；

(2)$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+2^{-2}+\cos^2 30°-2^{2001}\cdot 0.5^{2000}$

【分析】先分清每一道题的结构，每题均由四个部分组成，由每部分涉及的运算意义算出其值，最后求出整个代数式的代数和．

解:(1)原式 $=1-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=1$

(2)原式 $=\sqrt{2}-1+\frac{1}{4}+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-2\times(2\times0.5)^{2000}=\sqrt{2}-1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-2=\sqrt{2}-2$

【评注】实数的混合运算涉及的知识点很多，如幂的运算，指数(包括零指数、负整数指数)运算；根式运算，特殊三角函数值，绝对值的化简等，解题时宜先观察式子结构，运用以上运算规律与性质算出部分值，最后按运算顺序算出最终结果，本例中计算 $2^{2001}\cdot0.5^{2000}$ 时逆用积的乘方运算法则，即 $a^n\cdot b^n=(ab)^n$．

【例 2】下列运算:①$(-3)^3=-9$　②$(-3)^{-2}=9$　③$2^3\cdot2^3=2^9$　④$-2^4\div(-2)^2=(-2)^2=4$　⑤$-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^0=1$　⑥$5\div\frac{1}{6}\times6=5\div1=5$　其中错误的个数是(　　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

【分析】由幂的运算法则知 $(-3)^3=-27$，$(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$，$2^3\cdot2^3=2^6$　而 $-2^4\div(-2)^2=-[2^4\div2^2]=-4$，$-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^0$ 表示 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^0$ 的相反数，结果为 -1，$5\div\frac{1}{6}\times6$ 中同级运算应按从左到右的顺序进行，结果为 $5\times6\times6=180$.

【答案】D

【评注】解答此题的关键是要熟悉相关的运算意义、法则和运算顺序，不要想当然地给出答案，要结合式子的特征和意义联想相关法则给出正确结果．

【例 3】比较大小:(1)若 $-1<x<0$，则 x^3、x、$\frac{1}{x}$ 的大小顺序是______；(2)$\sqrt{17}-4$ ______ $4-\sqrt{15}$

【分析】对第(1)题可采用作差法或特殊值法解决，当 $-1<x<0$ 时，$x+1>0$，$\therefore x-x^3=x(1+x)(1-x)<0$，$\therefore x<x^3$，又 $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}>0$，$\therefore x>\frac{1}{x}$，即 $x^3>x>\frac{1}{x}$，或取 $x=-\frac{1}{2}$，则 $x^3=-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{x}=-2$，亦可得 $x^3>x>\frac{1}{x}$．第(2)题可用取倒数法，$\sqrt{17}-4=\frac{1}{\sqrt{17}+4}$，$4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$ $\because\sqrt{17}+4>4+\sqrt{15}$，

$\therefore\frac{1}{\sqrt{17}+4}<\frac{1}{4+\sqrt{15}}$

$\therefore\sqrt{17}-4<4-\sqrt{15}$

【答案】(1)$x^3>x>\frac{1}{x}$　　(2)<

【评注】类似第(1)题的已知字母取值范围，比较关于此字母的代数式值的大小常采用作差法或特殊值法，而二次根式型实数的大小比较常采用作商法、倒数法或平方法．

【例 4】有一种“二十四点”的游戏，其游戏规则是:任取 1 至 13 之间的自然数四个，将这四个数(每个数用且只用一次)进行加减乘除四则运算，使其结果等于 24. 例如对 1,2,3,4，可作运算:$(1+2+3)\times4=24$.(注意上述运算与 $4\times(2+3+1)$ 应视作相同方法的运算)，现有四个有理数 3,4,-6,10，运用上述规则写出三种不同方法的运算，使其结果等于 24，(1)______，(2)______，(3)______；另有四个数 3,-5,7,-13，可通过运算式(4)______使其结果等于 24.

【分析】考虑算式时可将 -6,-5,-13 看作 6,5,13 进行考虑(为什么?)，再逆向思考 24 可拆分为哪些数的和与积呢? $24=3\times8=3\times[4+10+(-6)]=6+18=10-4-3\times(-6)=10+14=10-[3\times(-6)+4]=4+20=4-(-6)\div3\times10=72\div3=[(-5)\times(-13)+7]\div3$

【答案】(1)$3\times[4+10+(-6)]$　(2)$10-[3\times(-6)+4]$　(3)$4-(-6)\div3\times10$　(4)$[(-5)\times(-13)+7]\div3$

【评注】此题具有趣味性和开放探索性，解答进需逆向思考，从 24 可拆分为哪些数的和与积这个角度进行尝试探索．

活题巧练

*1. 下列各组数中，相等的是(　　)

A. $(-1)^3$ 和 1　　B. $(-1)^2$ 和 -1

C. $\sqrt{(-1)^2}$ 和 1　　D. $-(-1)$ 和 $-|-1|$

*2. 如果实数 a、b 满足 $a+b>0$, $ab<0$，则下列不等式中正确的是(　　)

A. $|a|>|b|$　　B. 当 $a>0$, $b<0$ 时，$|a|>|b|$

C. $|a|<|b|$　　D. 当 $a<0$, $b>0$ 时，$|a|>|b|$

*3. 已知 $a=2^{-2}$, $b=(\sqrt{3}-1)^0$, $C=(-1)^3$，则它们之间的大小关系是(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

*4. 下列各数中，与 $(-7-2)^5$ 的值相等的是(　　)

A. $(-7)^5+(-2)^5$　　B. -7^5-5^2

C. -3^{10}　　D. 3^{10}

*5. a, b 在数轴上的位置如图 2－1 所示，$M=a+b$, $N=-a+b$, $H=a-b$, $G=-a-b$，则它们的大小关系是(　　)

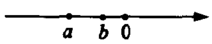


图 2－1

A. $G>H>M>N$　　B. $G>N>M>H$

C. $G>M>N>H$　　D. $G>N>H>M$

*6. 设 $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}-1$, $c=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$，则 a、b、c 之间的大小关系是(　　)

A. $c>b>a$　　B. $a>c>b$

C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

*7. $-2^0+(-2)^2=$____，$-3\div5\times\dfrac{1}{5}=$____，$-3-2$____$2-3$(填“>，=，<”)，$\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=$____.

*8. 若 $(2x-1)^0$ 有意义，则 x 的取值为____，若 $(3x+8)^{-2}$ 无意义，则 x 的值为____.

*9. 比较大小：当实数 $a<0$ 时，$1+a$____$1-a$(填“>”或“<”)

*10. 设 $\sqrt{7}$ 的小数部分为 b，则 $(4+b)b=$____.

*11. 若 $2^{x+|x|}=1$，则 x 的取值范围是____，若 $a^3\cdot a^m=1$，则 a、m 必须满足的条件是____.

⁑12. 某商品标价为 165 元，若降价以 9 折出售(即优惠 10%)，仍可获利 10%(相对于进货价)，则该商品的进货价是____.

⁑13. 从 1999 年 11 月 1 日起，全国储蓄存款需征收利息税，利息税的税率是 20%(即储蓄利息的 20%，由各银行储蓄点代扣代收)，张老师于 1999 年 5 月 1 日在银行存入人民币 2 万元，定期一年，年利息为 3.78%，存款到期时，张老师净得本金和利息共计____元.

⁑14. 有若干个数，第 1 个数记为 a_1，第 2 个数记为 a_2，第 3 个数记为 a_3，…，第 n 个数记为 a_n，若 $a_1=-\dfrac{1}{2}$，从第 2 个数起，每个数都等于“1 与它前面的那个数的差的倒数”.

(1)试计算：$a_2=$______，$a_3=$______，$a_4=$______

(2)根据以上计算结果，请你写出：$a_{2002}=$______，$a_{2004}=$

⁑15. 计算：

①$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=$____　②$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=$______

③$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=$________　④$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=$____

通过以上计算，观察规律，写出用 n(n 为正整数)表示上面规律的等式__________

⁑16. 给出一列算式：$3^2-1^2=8=8\times1$, $5^2-3^2=16=8\times2$, $7^2-5^2=24=8\times3$, $9^2-7^2=32=8\times4$, …，试用代数式表示出上面算式的规律.

⁑17. 计算下列各题：

(1) $-(-5)+(-2)\times(-1)^{10}+(\frac{1}{2})^{-1}-(\sqrt{2}-1)^0$

(2) $-(\sqrt{2}+1)^0-|\sin60^\circ-1|+(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^{-1}+(-1)^3$

(3) $|1-\sqrt{3}|-\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\tan60^\circ+(\sqrt{3})^0+(\sqrt{3}+2)^{2002}\cdot(\sqrt{3}-2)^{2003}$

(4) $\cos60^\circ+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+(\cot45^\circ)^{-2}+(\sqrt{5}+2)^0$

2003 年中考新题预测

⁑18. 张先生在上周五买进某公司股票 1000 股，每股 28 元，下表为本周内每日该股票的涨跌情况(单位：元)

星期	一	二	三	四	五
每股涨跌	+4	+4.5	−2	+1.5	−6

(1)星期三收盘时，每股是多少元？

(2)本周内最高价是每股多少元？最低价是每股多少元？

(3)已知张先生买进股票时付了 1.5‰ 的手续费，卖出时需付成交手续费和交易税共 2.5‰，如果张先生在星期五收盘时将全部股票卖出，他的收益情况如何？

巧解巧练3　实数单元小结

单元小结

中考考向分析	解题档案
热点：(1)判断一个实数的类型；(2)求一个数的倒数、相反数或绝对值；(3)求一个非负数的平方根或算术平方根；(4)求几个和为零的非负数表示式中字母的值． 冷点：(1)利用实数的运算解决实际生产生活中的有关问题；(2)实数运算的规律推导问题． 趋势：题量一般是二道小题，重点考查概念，一道分值在8分左右的大题，一般是规律探索性问题或应用问题．	(1)运用分类讨论，一般——特殊——一般、类比字母代数、数形结合等重要数学思想． (2)运用配方法、分析法、综合法等常用的数学方法． (3)运用非负数的性质解题，如：若 $\|a\|+b^2+\sqrt{c}=0$，则 $a=b=c=0$，$\|a\|\geqslant 0$，$a^2\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0$ 且 $a\geqslant 0$ 等． (4)结合实际问题中各数量之间的关系进行有关计算．

活题巧解

【例1】已知△ABC 的三边 a、b、c 满足等式：$a^2+b+|\sqrt{c-1}-2|=6a+2\sqrt{b-3}-7$，试判断△$ABC$ 的形状．

【分析】由一个方程求出几个未知数的值有两种情况(1)不定方程的特殊解；(2)利用几个非负数的和为零，则每一个数均为零求解；显然此题属第(2)种情况，故先应将等式变为几个非负数的和为零的形式．

【解答】由已知得：$a^2-6a+9+(\sqrt{b-3})^2-2\sqrt{b-3}+1+|\sqrt{c-1}-2|=0$，即 $(a-3)^2+(\sqrt{b-3}-1)^2+|\sqrt{c-1}-2|=0$

$\therefore a-3=0,\sqrt{b-3}-1=0,\sqrt{c-1}-2=0$

$\therefore a=3,b=4,c=5$

$\therefore a^2+b^2=3^2+4^2=5^2=C^2$

∴△ABC 是直角三角形

【评注】*解答本题的关键是运用配方法将已知式变形为几个非负数的和为零的形式，再应用非负数的性质：若 a、b、c 均为非负数，且 $a+b+c=0$，则 $a=b=c=0$，求解 a、b、c 的值．*

【例2】国家统计显示，2000年我国农民人均纯收入为1200元，2001我国农民人均纯收入实际增长4.2%，物价上涨0.7%，则2001年我国农民人均纯收入为________元．

【分析】农民人均纯收入实际增长4.2%，表示购买相同货物的数量增加了4.2%，即2000年纯收入可买每件一元的商品1200件，到2001可买 $1200\times(1+4.2\%)=1250.4$(件)这些商品2001年折款应为 $1250.4\times(1+0.7\%)\approx 1260$(元)．

【答案】1260

【评注】*理解人均纯收入实际增长4.2%的意义是解答此题的关键，掌握实际生产、经济生活中的增长率、利润、利率等问题的计算，是对每个人用数学的基本要求．*

【例3】已知数 a、b 在数轴上对应的点如图3－1所示：(1)用"<"连接下列各数：a，b，$-a$，$-b$，$1+a$，$-1-a$，$1-b$；

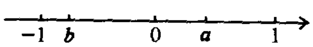


图3－1

(2)化简 $|2b+2|+\sqrt{(b-a)^2}+|1-a-b|$

【分析】由相反数的定义及加、减运算法则先标出(1)中各数在数轴上对应的点如图3－2所示，即可比较出它们的大小，对第(2)问由图知，$b+1>0$，$b-a<0$，$1-a-b>0$，再根据绝对值的代数意义化简出结果．

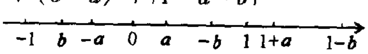


图3－2

【解答】(1) $-1-a<b<-a<a<-b<1+a<1-b$

(2) $\because -1<b<0,0<a<1$

$\therefore b+1>0,b-a<0,1-a-b>0$

∴原式 $|2(b+1)|+|b-a|+|1-a-b|$

$=2b+2-(b-a)+1-a-b=3$

【评注】*此类数形结合的问题是中考常见的题型，解答时需仔细观察图形，由点的位置确定相应的数的大小，由数的大小确定其对应的点位置，从而使问题变得直观简捷．*

【例4】已知 $1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$，$1+3+5+7+9=25=5^2$，…．(1)根据前面各式的规律，猜测 $1+3+5+\cdots+(2n+1)$ 的值(其中 n 为正整数)；(2)根据(1)中的规律计算 $1+3+5+\cdots+1999$．

【分析】观察以上特例知，从1开始，两个连续奇数相加和为 2^2，三个连续奇数相加，和为 3^2，以此类推，和的结果关键取决于加数的个数，而从1到 $2n+1$ 有 $n+1$ 个奇数，故(1)的结果应为 $(n+1)^2$，由(1)易计算出第(2)问的结果．

【答案】(1) $(n+1)^2$ (2) $(1000)^2=10^6$

【评注】*解答此题关键是要多观察各特例，从各特例中归纳出一般的规律，此类问题的解答过程也正好体现了人们认识客观世界的由特殊到一般，又由一般到特殊的思想方法．*

活题巧练

*1. 已知 $0<x<1$，那么在 $x,\frac{1}{x},\sqrt{x},x^2$ 中，最大的数是（　　）

A. x　　B. $\frac{1}{x}$　　C. $\sqrt{x}$　　D. x^2

*2. 设 $M=x^2-8x+22$，$N=-x^2+6x-3$，那么 M 与 N 的大小关系是（　　）

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 无法确定

*3. 已知 $(m+n)^2+|\frac{m}{n}|=P$，则 P 的值（　　）

A. 只能为正数　　B. 不能为负数

C. 不能为 1　　D. 不能为正数

*4. 下列各式中，计算正确的是（　　）

A. $5\div3\times\frac{1}{3}=5$　　B. $2\sin60^\circ\cdot\cos30^\circ=\frac{3}{2}$

C. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}$　　D. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{100}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{101}=1$

*5. 将正偶数按下表排成 5 列

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	第 5 列
第 1 行		2	4	6	8
第 2 行	16	14	12	10	
第 3 行		18	20	22	24
…	…	…	28	26	

根据上面排列规律，则 2000 应在（　　）

A. 第 125 行，第 1 列　　B. 第 125 行，第 2 列

C. 第 250 行，第 1 列　　D. 第 250 行，第 2 列

*6. 观察下列等式：$1^3=1^2$，$1^3+2^3=3^2$，$1^3+2^3+3^3=6^2$，$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$，…

想一想等式左边各项幂的底数与右边幂的底数有什么关系？猜一猜可以引出什么规律，并把这种规律用等式写出来______

*7. 若 x,y 都是实数，且 $\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+y=4$，则 $xy=$______

*8. 若 $\sqrt{-(3x^2-12)^2}$ 为实数，则 $x=$______

*9. 已知等式 $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}+(x-2)^2=0$，则实数 x 的值为______

*10. 若实数 x,y 满足 $y=\frac{\sqrt{4-x^2}+2\sqrt{x^2-4}+8}{x-2}$，则 $y^x=$______

**11. 已知 $a>0,\frac{a}{b}<0$，化简 $\sqrt{(b-a-4)^2}-\sqrt{(a-b+1)^2}=$______

**12. 代数式 $-|x+5|-3$ 有最____值，是____，此时 $x=$____. $-(2x-5)^2-6$ 有最____值，是____，此时 $x=$____.

**13. 计算 $|19\frac{5}{19}-13\frac{3}{26}|+5\frac{23}{26}-7\frac{14}{19}=$______

**14. 观察：$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=1-\frac{1}{4}$，…，以此类推，求：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2002\times2003}=$______

**15. 若 a,b 为有理数，且 $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{\frac{1}{8}}=a+b\sqrt{2}$，求 a、b 的值.

2003 年中考新题预测

***16. 将一张足够大的正方形纸片，按如图 3－3 虚线所示剪成四个大小形状一样的小正方形，然后将其中的一个再按同样的方法剪成四个小正方形，如此循环进行下去，并统计每次剪完后的正方形的个数.

(1)根据统计的结果填写下表，并根据表中的规律写出 s 与 n 的关系式.

剪的次数(n)	1	2	3	4	5	6	…
正方形个数 s							

(2)运用(1)中总结的公式计算要剪出 100 个正方形，共要剪多少次？能不能将原来的正方形剪成 2003 个小正方形？为什么？

(3)若原正方形的边长为 1，那么第 n 次所剪得的正方形的边长是多少？每次剪得的小正方形边长之和与原正方形边长有什么关系？

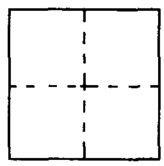


图 3－3

第二章 代数式

巧解巧练4 整　式

考点内容	解题档案
(1)代数式、整式的概念及分类; (2)同类项、单项式次数和系数,多项式的项数和次数等概念的准确理解与辨析; (3)整式的运算: ①整式的加减:添去括号法则;合并同类项法则; ②整式的乘除:幂的运算性质,乘法公式; (4)求代数式的值.	(1)挖掘概念的内涵或隐含条件,寻求解题的突破口; (2)渗透整体代入、分类讨论的思想,借助非负数、方程(组)等知识,把已知条件简化; (3)套用乘法公式一定要符合题目的结构特点,运用公式要灵活,可以正用或逆用,还可反复运用或综合运用; (4)代数式求值常见的方法:①先化简后求值;②将要求的代数式转化为已知的条件式;③式子中字母的值隐含在方程等题设条件中,先由题设条件求出字母的值,再求代数式的值.

活题巧解

【例1】(1)当代数式 x^2+3x+5 的值为7时,代数式 $3x^2+9x-2$ 的值为(　　)

A. -4　　B. 0　　C. -2　　D. 4

(山东省聊城市2000年中考题)

(2)若方程 $(x-1)(x^2+8x-3)=0$ 的三个根分别为 x_1、x_2、x_3,则 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 的值为(　　)

A. 5　　B. -5　　C. 11　　D. -11

【分析】这两个题的共同特点是代数式中的字母隐含在方程中,且这两个方程直接求解比较麻烦,因此第1小题要把已知和代数式均变为 x^2+3x 的形式,然后再整体代入;第2小题要运用根与系数的关系得到 $x_2+x_3=-8$, $x_2\cdot x_3=-3$,然后整体代入.

【解答】(1)解法一:由 $x^2+3x+5=7$ 得 $x^2+3x=2$,则

$3x^2+9x=6$　　$\therefore 3x^2+9x^2-2=4$

解法二:$\because x^2+3x=2$,

$\therefore 3x^2+9x-2=3(x^2+3x)-2=3\times2-2=4$,故选D

(2)解方程组:$x_1=1$, $x_2+x_3=-8$, $x_2\cdot x_3=-3$

原式 $=x_1(x_1+x_2)+x_2x_3=-8-3=-11$,故选D

【评注】借助方程,整体代入将已知条件或代数式变形、转化是近年中考命题的热点.

【例2】已知多项式:$a^{10}-a^9b+a^8b^2-\cdots-ab^9+b^{10}$

(1)按规律写出该多项式的第6项,并指出它的系数和次数.

(2)这个多项式是几次几项式?

【分析】该多项式的特点是:①按字母 a 的降幂排列,且按字母 b 升幂排列;②每项次数均为10;③第 n 项的系数为 $(-1)^{n+1}$

【解答】(1)该多项式的第6项为 $-a^5b^5$,它的系数为 -1,次数为10次,(2)这个多项式是十次十一项式.

【评注】对于找规律的题型,要从各个不同的角度分析归纳,并将所观察到的结论进行检验.此题该注意一点:多项式的项包括它前面的符号.

【例3】若 $(x^2+nx+3)(x^2-3x+m)$ 的展开式中不含 x^2 和 x^3 项,求 $m-3n$ 的值.

【分析】按一般解法是:把已知的多项式展开,然后合并同类项,由 x^2 和 x^3 的系数为0列方程组,求出 m、n,其实两个二次三项式相乘,二次项 x^2 只能是 x^2 项与常数项的积或 x 项与 x 项的积,x^3 项只能是 x^2 与 x 项相乘而得,没有必要全部展开.

【解答】含 x^2 项是 $mx^2+3x^2-3nx^2=(m+3-3n)x^2$

含 x^3 项是 $-3x^3+nx^3=(n-3)x^3$

$\because$ 展开式中不含 x^2 项和 x^3 项

$\therefore \begin{cases} n-3=0 \\ m-3n+3=0 \end{cases}$　　解得 $\begin{cases} m=6 \\ n=3 \end{cases}$

$m-3n=6-3\times3=-3$

【评注】本题综合性强,主要考查学生三方面能力:多项式乘以多项式;根据题意列方程组;解方程组的能力,同时启发我们要多观察分析,勤思考,一题多解.

【例4】解方程组

$$\begin{cases} [(2x+3y)^2-(9y^2-x^2)\div(3y-x)(3y+x)+3xy]\div3x=5 \\ [(x-2y)^2+(x+2y)(2y-x)-4xy]\div2y=-4 \end{cases}$$

【分析】我们只学过二元一次方程组的解法,因此必须根据乘除运算法则把方程组变为二元一次方程组求解.

【解答】原方程组化为:

$$\begin{cases} [4x^2+12xy+9y^2-(x^2+6xy+9y^2)+3xy]\div3x=5 \\ [x^2-4xy+4y^2-(x^2-4y^2)-4xy]\div2y=-4 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} (3x^2+9xy)\div3x=5 \\ (8y^2-8xy)\div2y=-4 \end{cases}$　　就是 $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

解这个方程组得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

【评注】本题表面上看是解方程组,实质上是以多项式除以单项式为主体的运算,两个方程都需要先把中括号内的式子化简,再做除法,因此要选择合理的运算顺序,更要重视确定合理的运算方法,用平方差,完全平方,立方差等乘法公式化简中括号内的式子.

活题巧练

*1. 如图 4－1,在矩形 $ABCD$ 中,横向阴影部分为矩形,另一阴影部分为平行四边形,依照图中标注的数据,计算图中空白部分的面积,其面积为(　　)

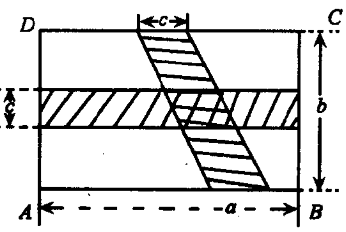


图 4－1

A. $bc-ab+ac+c^2$

B. $ab-bc-ac+c^2$

C. $a^2+ab+bc-ac$

D. b^2-bc+a^2-ab

*2. 下列计算中,正确的是(　　)

A. $a^2+2a^2=3a^4$　　B. $2x^3(-x^2)=-2x^5$

C. $(-2a^2)^3=-8a^5$　　D. $6x^{2m}\div 2x^{2m}=3x^2$

*3. 当 $x=1$ 时,代数式 px^3+qx+1 的值为 2001,则当 $x=-1$时,代数式 px^3+qx+1 的值为(　　)

A. －1999　　B. －2000　　C. －2001　　D. 1999

*4. 若$(x+t)(x+6)$的积中不含有 x 的一次项,则 t 的值为(　　)

A. 0　　B. 6　　C. －6　　D. －6 或 6

*5. 下面是一位同学所做 6 道练习题:(1)$(-3)^0=1$,(2)$a^3+a^3=a^6$,(3)$(-a)^5\div(-a)^3=-a^2$,(4)$4m^{-2}=\frac{1}{4m^2}$,(5)$(xy^2)^3=x^3y^6$,(6)$\sqrt{(-2)^2}=2$,他做对的题的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

*6. 下列各式中,正确的是(　　)

A. $(a+2b)^2=a^2+2ab+4b^2$　　B. $(0.1)^{-1}+(0.1)^0=\frac{11}{10}$

C. $\frac{-a+b}{c}=-\frac{a-b}{c}$　　D. $(a+b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$

*7. 受季节影响,某种商品中每件按原售价降价 10% 后,又降价 a 元,现在每件售价为 b 元,那么该商品每件的原售价为(　　)元

A. $\frac{a+b}{1-10\%}$　　B. $(1-10\%)(a+b)$

C. $\frac{b-a}{1-10\%}$　　D. $(1-10\%)(a-b)$

**8. 某商品原价为 100 元,现有下列四种调价方案,其中 $0<n<m<100$,则调价后该商品价格最高的方案是(　　)

A. 先涨价 $m\%$,再降价 $n\%$

B. 先涨价 $n\%$,再降价 $m\%$

C. 先涨价$\frac{m+n}{2}\%$,再降价$\frac{m+n}{2}\%$

D. 先涨价$\sqrt{mn}\%$,再降价$\sqrt{mn}\%$

*9. 下列命题:①n 为正整数,若 a、b 互为相反数,则 a^n、b^n 一定互为相反数;②若 m、n 为自然数,则 $x^m+y^m-5^{m+n}$的次数为 $m+n$;③$(a-b)^3$ 的意义是 a 与 b 的立方差;④若 $5x^{|a|}y^7$ 与 $-\frac{1}{2}x^3y^{|b|}$是同类项,且 $a>b$,则代数式$(2a+9)(b-4)$的值为 －33 或 －165,其中正确命题的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

*10. 下列说法正确的是(　　)

A. $\frac{1}{3}x^2y^{-3}$和 $2x^2y^{-3}$是同类项

B. $-\frac{1}{3}x^4y-2x^3y+1$ 是四次三项式

C. x^2-xy+y^{-2}是多项式

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$是单项式

*11. 已知 $a-b=2+\sqrt{3}$,$b-c=2-\sqrt{3}$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值为(　　)

A. 20　　B. 15　　C. 30　　D. 40

*12. 国家为了继续刺激消费,规定私人买耐用消费品,不超过其价格 50% 的款项可以用抵押的方式向银行贷款．蒋老师欲购买一辆家用轿车,他现在全部积蓄为 p 元,只够车款的 60%,蒋老师应向银行贷款______元．

*13. 观察下列各式$(x-1)(x+1)=x^2-1$,$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$,$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$,根据前面各式的规律可得:$(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)=$______

(武汉市 2001 年中考题)

*14. 在 $-\frac{1}{3}x^2$,xy,$2x+y$,$\frac{4y}{3x}$,0,$|-0.5|$,$6x^2-\frac{4}{3}y^2$,$1-\frac{3a^2b}{\pi}$,$\sqrt{x}$中,是单项式的有____个,是多项式的有____个．

*15. 先化简,再求值:

$(2a+1)^2-(2a+1)(2a-1)$,其中 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**16. 观察某同学计算$(2y-z)^2[(2y-z)^2+6yz)]^2$的过程:

解:原式 $=(2y-z)^2[(2y)^2+2yz+z^2]^2$ ………… 第一步

$=\{(2y-z)[(2y)^2+2yz+z^2)]\}^2$ ……… 第二步

$=[(2y)^3-z^3]^2$ ……………………………… 第三步

$=64y^3-16y^3z^3+z^6$ ………………………… 第四步

回答:(1)第一步和第四步都运用了同一乘法公式,叫做______________公式;

(2)第二步运用幂的运算性质的一般形式是______;

(3)第三步运用的乘法公式的一般形式是______.

**17. 已知$(a+b)^2=7$,$(a-b)^2=4$,求 a^2+b^2 和 ab 的值．

**18. 已知$(2a+b+3)^2+|b-1|=0$,求:

$5a+\{-2a-3[2b-8+(3a-2b-1)-a]+1\}$的值．

19. 已知 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(x-2)^4$,求值:

(1)$a+b+c+d+e$　　(2)$a+c$.

2003 年中考新题预测

***20. 社会的信息化程度越来越高,计算机网络已进人普通百姓家,某市电信局对计算机拨号上网用户提供三种付费方式供用户选择(每个用户只能选择其中一种付费方式):甲种方式是按实际用时付费,每小时付信息费 4 元,另加付电话费每小时 1 元 2 角;乙种方式是月包制,每月付信息费 100 元,同样加付电话费每小时 1 元 2 角;丙种方式也是月包制,每月付信息费 150 元,但不必再另付电话话费.

(1)设某户某月上网时间为 t 小时,试用 t 的代数式表示三种付费公式 y;

(2)试判断哪种付费方式优惠;

(3)小王为选择合适的付费方式,连续记录了 7 天中每天上网所花的时间(单位:分):

	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
上网时间	62	40	35	74	27	60	80

根据以上结论,你认为小王应选哪种方式付费比较合适?并说明理由.

巧解巧练5　因式分解

考点内容	解题档案
(1)因式分解的概念,因式分解与整式乘法的区别与联系; (2)因式分解常用方法:提公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法、配方法、求根公式法; (3)因式分解的一般步骤: 提公因式⟶运用公式⟶分组分解⟶配方法或求根公式⟶检查是否分解完全; (4)运用因式分解进行代数式的化简．	(1)把多项式构建成符合公式特征的形式时,常用到: ①积(或幂)的乘方的逆用;②先提公因式或一个合适的因数;③整体变形; (2)因式分解采用"一提二套三分组":首先考虑提公因式,然后套用公式或十字相乘法,最后考虑分组分解; (3)应用求根公式时,防止结果漏掉了二次项系数; (4)因式分解的结果是整式,是乘积的形式,必须在实数范围内分解到不可再分解为止．

活题巧解

【例1】分解因式

(1)$m^3-mn^2+m^2n-n^3$　　(2)$x^3+3x^2-4x-12$

(3)$9ax^2+9bx^2-a-b$　　(4)$2ax-10ay+5by-bx$

【分析】以上各题都不可直接提公因式或直接运用公式,所以应考虑用分组分解法进行分解,分组时可按系数分组,也可按同一字母分组,这有利于下一步提公因式,且以上4题有多种解法．如第(1)小题可以一、二项,三、四项各为一组公因式为(m^2-n^2);可一、三项和二、四项各为一组,公因式为$(m+n)$;还可一、四项和二、三项各为一组,公因式为$(m-n)$．

【解答】(1)原式$=m(m^2-n^2)+n(m^2-n^2)$

$=(m^2-n^2)(m+n)$

$=(m+n)^2(m-n)$

(2)原式$=x(x^2-4)+3(x^2-4)$

$=(x^2-4)(x+3)$

$=(x+2)(x-2)(x+3)$

(3)原式$=9x^2(a+b)-(a+b)$

$=(a+b)(9x^2-1)$

$=(a+b)(3x+1)(3x-1)$

(4)原式$=2a(x-5y)-b(x-5y)$

$=(x-5y)(2a-b)$

【评注】分组分解法要把握两个原则:①分组后至少有一组可分解因式;②组与组之间还可再分解因式,同时要综合运用运算律,特别要注意符号问题．这类题目常采取二分法．

【例2】分解因式

(1)$(x+y)^2-4(x+y-1)$　(2)$(c+b)(c-b)-a(a-2b)$

(3)$(a+b)(a-b)+4(b-1)$　(4)$(1-x^2)(1-y^2)-4xy$

【分析】以上题目都含有括号,但又不能直接提公因式或用公式,所以都应将原式展开,再重新进行分组．

【解答】(1)原式$=(x+y)^2-4(x+y)+4$

$=(x+y-2)^2$

(2)原式$=c^2-b^2-a^2+2ab=c^2-(b^2+a^2-2ab)$

$=c^2-(a-b)^2=(c+a-b)(c-a+b)$

(3)原式$=a^2-b^2+4b-4$

$=a^2-(b^2-4b+4)$

$=a^2-(b-2)^2$

$=(a+b-2)(a-b+2)$

(4)原式$=1-x^2-y^2+x^2y^2-4xy$

$=(1-2xy+x^2y^2)-(x^2+y^2+2xy)$

$=(xy-1)^2-(x+y)^2$

$=(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$

【评注】对含有括号的多项式因式分解时,如果能直接提公因式或用公式,不应展开,如$(x+a)^2-(x-a)^2=(x+a+x-a)(x+a-x+a)=4ax$．另解,(1)题中为了不破坏原式的结构,也不能把$(x+y)^2$,$(x+y)$展开,应把$(x+y)$当作一个整体．

【例3】下列因式分解,错误的是(　　)

A.$2a^3-8a^2+12a=2a(a^2-4a+6)$

B.在实数范围内分解因式$2x^2+5x-1=(x+\frac{5-\sqrt{33}}{4})(x+\frac{5+\sqrt{33}}{4})$

C.$(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$

D.$x^2+xy+xz+yz=(x+y)(x+z)$

【分析】本题考查提公因式法,公式法,求根公式法和分组分解法,在选择项B中,运用了求根公式、分解因式,但对式的恒等变形与方程的同解变形之间的区别没有弄清楚,误认为$2x^2+5x-1=x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$,因此答案中丢掉了系数2．

【解答】选B

【评注】用求根公式把二次三项式分解因式时,防止漏掉二次项系数;防止把两个一次因式写成$a(x+x_1)(x+x_1)$的形式．上题$2x^2+5x-1$正确的结果为$2(x+\frac{5-\sqrt{33}}{4})(x+\frac{5+\sqrt{33}}{4})$;二次三项式$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$．

【例4】已知△ABC的三边为a,b,c,且$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$,试判定三角形的形状．

【分析】从条件等式的特征,联想到完全平方式,不妨考虑配方．

【解答】$\because a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$

即$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore$由非负数性质得:$a-b=b-c=c-a=0$,即

$a=b=c$

$\therefore$△ABC为等边三角形

【评注】本题用到的拆项、分组、配方、非负数的性质,都是很常用的一些方法、技巧．

活题巧练

$*$1. 下列因式分解错误的是(　　)

A. $15a^2+5a=5a(3a+1)$

B. $-x^2-y^2=-(x^2-y^2)=-(x+y)(x-y)$

C. $k(x+y)+x+y=(k+1)(x+y)$

D. $a^2-ab+ac-bc=(a-b)(a+c)$

$*$2. 下列多项式中能用公式法进行因式分解的是(　　)

A. x^2+4　　B. x^2+2x+4

C. $x^2-x+\frac{1}{4}$　　D. x^2-4y

$*$3. 把多项式 $2xy-x^2-y^2+1$ 分解因式的结果是(　　)

A. $(x-y+1)(y-x+1)$　B. $(x+y-1)(y-x-1)$

C. $(x+y-1)(x-y+1)$　D. $(x-y+1)(x-y-1)$

$*$4. 一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 3、4，那么二次三项式 x^2+px+q 可分解为(　　)

A. $(x+3)(x-4)$　　B. $(x-3)(x+4)$

C. $(x-3)(x-4)$　　D. $(x+3)(x+4)$

$*$5. $x^2+2(m-3)x+49$ 是完全平方式，则 m 的值为(　　)

A. -4　B. -3　C. 10　D. 10 或 -4

$*$6. 把 $2x^2-8xy+5y^2$ 分解因式为(　　)

A. $(x-5y)(2x-y)$

B. $(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y)(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}y)$

C. $2(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2})(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2})$

D. $2(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y)(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}y)$

$*$7. 下列恒等变形中，为因式分解的是(　　)

A. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})$

B. $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

C. $(3x+y)(3x-y)=9x^2-y^2$

D. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

$*$8. 若 $a\neq b$，且 $a<0,b<0$，则 a^3+b^3 与 a^2b+ab^2 比较大小的结果为(　　)

A. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$　　B. $a^3+b^3<a^2b+ab^2$

C. $a^3+b^3=a^2b+ab^2$　　D. 无法确定

$*$9. 下列各式：① $m^2+n^2-2mn+1=(m-1)^2+1$，② $xy^2+x^2y+y^3=xy(y+x+\frac{y^2}{x})$，③ $2x^2-3x-20=(2x-5)(x+4)$，④ $\frac{1}{4}x^2-3xy+9y^2=(\frac{1}{2}x-3y)^2$，其中从左到右是因式分解的有(　　)

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

$*$10. 下列各式从左到右的变形中，不能再分解因式的是(在有理数范围内)(　　)

A. $a^4-1=(a^2+1)(a^2-1)$

B. $2ax^2+2ax-4a=2a(x^2+x-2)$

C. $6a^2b^2-18ab=3ab(2ab-6)$

D. $a^4-2a^2-3=(a^2+1)(a^2-3)$

$*$11. 把多项式 $x^2-xy-2y^2-x-y$ 因式分解的结果为(　　)

A. $(x+y)(x-2y-1)$　　B. $(x-y)(x-2y-1)$

C. $(x+2y)(x+y-1)$　　D. $(x-y)(x-2y-1)$

$**$12. 分解因式 x^2+ax+b，甲看错了 a 的值，分解的结果是 $(x+6)(x-1)$，乙看错了 b 的值，分解的结果为 $(x-2)(x+1)$，那么 x^2+ax+b 分解因式正确的结果为(　　)

A. $(x-2)(x+3)$　　B. $(x+2)(x-3)$

C. $(x-2)(x-3)$　　D. $(x+2)(x+3)$

$*$13. 已知 $\sqrt{a-1}$ 与 $(b+1)^2$ 互为相反数，则 $ax^3-by^3-ax^2y+bxy^2$ 分解因式的结果为(　　)

A. $(x+y)(x-y)^2$　　B. $(x-y)(x+y)^2$

C. $(x+y)^3$　　D. $(x-2y)(x-y)^2$

$**$14. 要使二次三项式 x^2+mx-6 能在实数范围内分解因式，则 m 可取的整数为(　　)

A. ±1　B. ±5　C. $\pm1,\pm5$　D. $\pm1,\pm6$

$*$15. 多项式 x^2-mx-4 有一个因式为 $x+1$，则多项式的另一个因式为(　　)

A. $x+4$　　B. $x-4$

C. $(x+4)$ 或 $(x+4)$　　D. 无法确定

$*$16. 若 $(2x)^n-81=(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$，则 n 的值为(　　)

A. 3　B. 4　C. 6　D. 2

$***$17. 把下列多项式分解因式：

(1) $2x^{n+1}-6x^n+4x^{n-1}$(n 为自然数)

(2) $(a-2)a^2-8(2-a)^2$

(3) $m-m^3-mn^2+2m^2n$

(4) $-81a^{4n}+18a^{2n}b^2-b^4$

(5) $1-m^2-n^2+2mn$

(6) $9a^2-b^2+2b-1$

(7) $(x-1)(x-2)-20$

(8) $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$

(9) x^4-5x^2+4

(10) $(a-1)(a-2b-1)+b^2$

(11) $4-12(x-y)+9(x-y)^2$

(12) $(a+b)^2-4(a^2-b^2)+4(a-b)^2$

$**$18. 利用因式分解计算：

$$\frac{2001^3-2\times2001^2-1999}{2001^3+2001^2-2002}$$

$**$19. 已知 $x+y=\frac{1}{2}$，$xy=\frac{3}{8}$，求下列各式的值

(1) $(x-y)^2$　　(2) x^3+y^3

2003年中考新题预测

$***$20. 观察某同学把多项式 $(x^2+3x+4)(x^2+3x-3)-8$ 分解因式的过程：

解：设 $x^2+3x=y$，则

原式 $=(y+4)(y-3)-8$ ………………………… 第一步

$=y^2+y-20$ ………………………… 第二步

$=(y+5)(y-4)$ ………………………… 第三步

$=(x^2+3x+5)(x^2+3x-4)$ ………………… 第四步

回答：①这位同学运用的解题方法是________；

②第三步运用了因式分解的________方法；

A. 公式法　　B. 十字相乘法

C. 两立分法　　D. 求根公式法

③这位同学因式分解的结果是否完整，如果完整，请说明理由，如果不完整，请直接写出分解因式的最后结果______；

④仿照上述解法把 $(ab-1)^2+(a+b-2)(a+b-2ab)$ 分解因式．

巧解巧练6 分　式

考点内容	解题档案
(1)分式的概念的意义,分式的值为零的条件; (2)分式的基本性质及运用; (3)分式的变号法则; (4)分式的加减乘除运算,分式的约分、通分; (5)分式的化简求值.	(1)要使分式$\frac{A}{B}$有意义,则$B\neq0$;使分式$\frac{A}{B}=0$,则$A=0$,且$B\neq0$. (2)进行分式加减运算时,关键是找最简公分母,常要把分母因式分解,也可以合理搭配,分组通分;逐步通分;裂项通分;先约分再通分等. (3)分式约分:当分子、分母是单项式时,约去它们的公因式;是多项式时,先把它们按同一字母降幂排列,再分别分解因式;当子或分母的最高次数的系数是负数时,先根据分式的变号法则,把负号提到分式的前边.

活题巧解

【例1】已知分式$\frac{|x|-5}{x^2-4x-5}$,当$x\neq$______时,分式有意义;当$x=$______时,分式的值为0.

(扬州市2000年中考题改编)

【分析】本题主要考查分式$\frac{N}{M}$在什么条件下有意义、无意义及其值为零的问题,当$M\neq0$时,分式$\frac{N}{M}$有意义;当$M=0$时,分式$\frac{N}{M}$无意义;当$N=0$且$M\neq0$时分式$\frac{N}{M}=0$.由此可见,要使原分式有意义,则$x^2-4x-5\neq0$,即$x\neq-1,x\neq5$;要使分式值为0,则$\begin{cases}|x|-5=0\\x^2-4x-5\neq0\end{cases}$,解得$x=-5$

【解答】当$x\neq-1,5$时分式有意义;当$x=-5$时分式的值为0.

【评注】分式的值为零的条件:分子为零且分母不为零.

【例2】如果三个量a、b和c之间存在数量关系$a=bc$,则

(1)若$a\neq0$,则$b=$________,$c=$________;

(2)若$b=c$,则a的取值范围为__________;

(3)若$b=\frac{2m-6}{4-4m+m^2}\div(m+3)$,$c=\frac{m^2+m-6}{3-m}\div\frac{2}{2-m}$,求$a$的值.

【分析】本题主要考查$a=bc$型数量关系,非负数的性质,整式的乘除以及分式成立的条件,(3)中要运用因式分解和添括号法则.

【解答】(1)$\because a=bc$且$a\neq0$,$\therefore b\neq0,c\neq0$

$\therefore b=\frac{a}{c},c=\frac{a}{b}$

(2)$\because b=c$　$\therefore a=bc=b^2$

$\because b^2$为非负数,即$b^2\geqslant0$

$\therefore a\geqslant0$

(3)将b、c的值分别代入得

$$a=bc=\frac{2m-6}{4-4m+m^2}\div(m+3)\cdot\frac{m^2+m-6}{3-m}\div\frac{2}{2-m}$$
$$=\frac{2(m-3)}{(2-m)^2(m+3)}\cdot\frac{(m+3)(m-2)}{3-m}\cdot\frac{2-m}{2}$$
$$=\frac{2(m-3)}{(2-m)^2(m+3)}\cdot\frac{-(m+3)(2-m)}{-(m-3)}\cdot\frac{2-m}{2}=\frac{-1}{-1}=1$$

【评注】在理解$a=bc$型数量关系时,这里的字母a、b和c既可代表具体的数,也可代表代数式,在实际问题中,还可以代表许多不同意义的量.

【例3】计算:(1)$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

(2)$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$

(3)$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

(4)$\frac{a^3-2a^2-9a+1}{a^2-5a+6}-\frac{a^3-a^2-4a+1}{a^2-3a+2}$

【分析】观察以上分式的加减,应分别采取逐步通分;合理搭配,分组通分;拆项通分,分离分式等方法,计算时比较简便.

【解答】(1)原式$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}$
$=\frac{8}{1-x^8}$

(2)原式$=(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2})+(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1})=\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=\frac{12}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}$

(3)原式$=(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x})+(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})+(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})+(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3})=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=\frac{4}{x^2+2x-3}$

(4)原式$=$

$$\left[(a+3)+\frac{3}{(a-2)(a-3)}\right]-\left[(a+2)-\frac{3}{(a-1)(a-2)}\right]$$
$$=(a+3)-(a+2)+\frac{3}{a-2}(\frac{1}{a-3}+\frac{1}{a-1})$$
$$=1+\frac{3}{a-2}\cdot\frac{2(a-2)}{(a-1)(a-3)}$$
$$=1+\frac{6}{(a-1)(a-3)}$$
$$=\frac{a^2-4a+9}{a^2-4a+3}$$

【评注】做分式的计算时,要做到:牢记法则,顺序计算、善于技巧、认真细心.