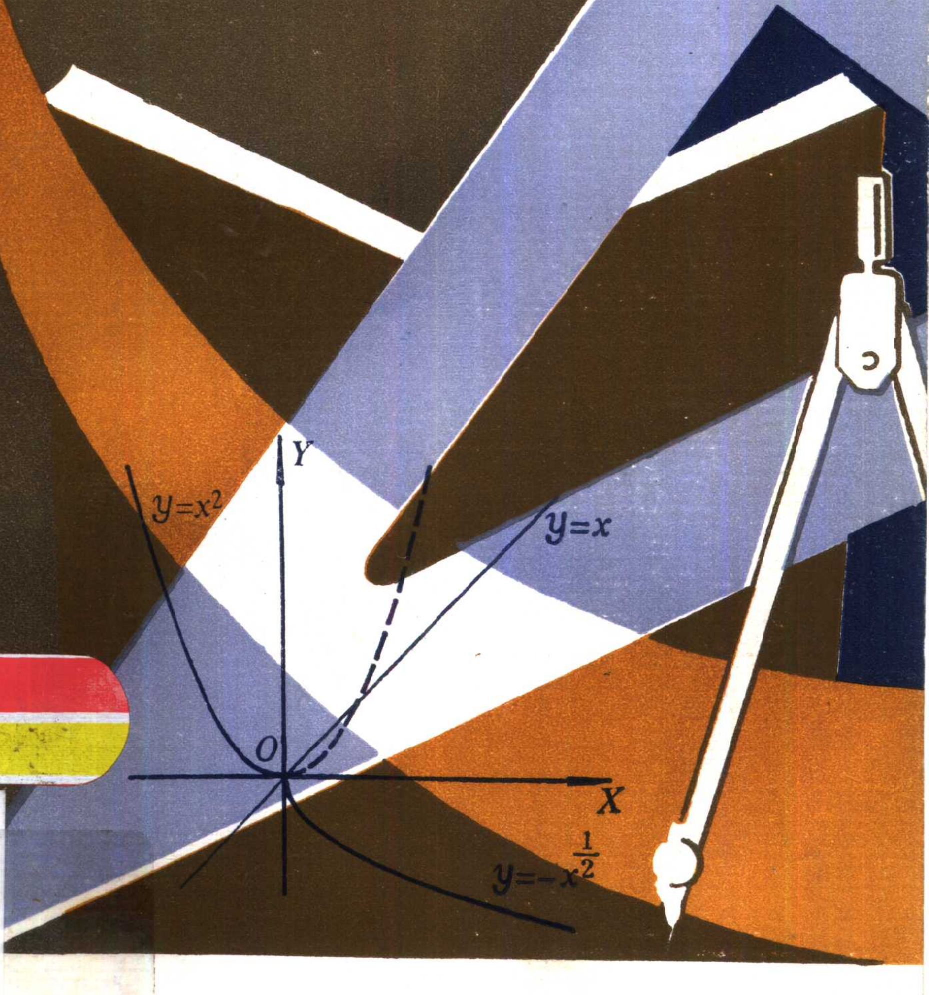
高中代数学习指导

许莼舫 编



中国青年出版社

高中代数学习指导

许莼舫　编

许玉声　许晓声
许树声　何辛畊　修订

中国青年出版社

高中代数学习指导
许莼舫 编
许玉声　许树声　许晓声　何辛耕 修订
*
中国青年出版社出版
陕西省印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092　1/32　9印张　200千字
1984年7月北京第1版　1984年7月北京第1次印刷
印数1—250,000册　定价0.90元

内 容 提 要

本书是供给高中学生作学习代数的课外参考读物。内容紧密联系教材，总结要点，扫除疑难，帮助读者明确概念，巩固知识。本书每章都对有关的名词概念和基本原理作了简明扼要的叙述，并根据情况提供学习注意点，补充适量的典型例题、特例和有利于复习的综合问题，以便于读者得到观摩和温故知新的机会，在学习中少走弯路，提高学习效果。本书也可以作中学数学教师的参考书和同等程度的青年自学用书。

修订说明

老友许莼舫君的《代数和初等函数学习指导》一书出版以来，受到广大读者的关怀和支持，许多同志在内容和编排方面提出了宝贵意见和积极建议.

近二十年来，中学数学教学的内容已有了相当程度的改变，教育大纲已经修订，新的中学数学统编教材也已确定，这就对各种数学课外读物提出了新的要求. 为了适应当前中学教学的形势，使读者在阅读中得到更大的收获，许君的哲嗣玉声、树声、晓声对这书进行了修订，邀我参与了这件工作，修订版分《初中代数学习指导》、《高中代数学习指导》、《平面三角学习指导》和《平面解析几何学习指导》共四册出版，编排上力求和新教材吻合，取材方面也有一定程度的增补，并充实了一定量的综合例题和练习题. 为了便于读者总结要点、分辨异同、明确概念、巩固知识，还增加了各章的提要和书末的“名词索引”.

这套书在编排和取材方面，一定还存在不少缺点，希望读者给予批评和指正.

何辛畊

1982年十月

原书“编者的话”摘要

近年以来，我国的教育事业取得了巨大成就．由于广大师生深入贯彻了党的教育方针，思想认识有了很大进步，对教学的目的性更加明确，积极性也不断增长，从而使教学质量显著提高．但是，学生在各科的学习中困难在所难免．尤其是在中学数学方面，学生一向花在这一科上的时间占得最多，困难更突出一些．为了帮助中学生加深对数学教材内容的理解；帮助学生总结要点、分辨异同、明确概念；提供学习注意点，扫除各种疑难；补充多量例题，举示解法步骤和思考过程，培养解决实际问题的能力，并启发他们把知识灵活运用，就编写了这一部书．希望学生通过本书，能够少走弯路，省去摸索的时间，提高学习效果，多快好省地完成学习任务．

本书所选例题，为了使读者熟悉各种变化，举了很多特例，因而有个别题目稍嫌繁难，但用作观摩，似乎还是有益处的．

本书在编排和取材方面，可能有不适当的地方，内容也可能有错误的地方，希望读者多多指正．

许莼舫

1961年三月

目　次

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　名词表解

集合

【集合】　把具有某种属性的一类事物看作一个整体，叫做集合，简称集．集合通常用大写字母来表示，如集合 A、集合 B 等等．

【元素】　组成一个集合的每一个事物，都叫做这个集合的元素．通常用小写字母来表示元素，如元素 a、元素 b 等等．

例　高一(1)班有50名学生，把这50名学生看作是一个整体，就是一个集合．这个班里的每名学生都是这个集合的元素．

如果集合 A 中有元素 a，一般用符号记成 $a\in A$，读作 a 属于 A．如果事物 b 不是集合 B 的元素，一般用符号记成 $b\overline{\in}B$，读作 b 不属于 B．

集合的分类

【有限集】　元素个数有限的集合，叫做有限集．

【无限集】　元素个数无限的集合，叫做无限集．

【空集】　不含任何元素的集合，叫做空集，通常用符号 ϕ 表示空集．空集也是一个有限集．

【全集】　研究某一个问题所要涉及到的一切元素组成的集合，叫做全集，通常用 I 表示．

【子集】　对于两个集合 A 和 B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，我们就说集合 A 是集合 B 的子集，记成 $A\subseteq B$（读作 A 包括在 B 内），或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）．

【真子集】　如果集合 A 是集合 B 的一个子集，并且 B 中至少有一个元素

不属于 A，那么集合 A 就叫做集合 B 的真子集，记成 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

【解集】 由一个方程或不等式的所有的解组成的集合，叫做这个方程或不等式的解集.

例一 高一(1)班50名学生组成的集合，它的元素个数是有限的，所以是有限集. 所有的自然数也构成一个集合，因为自然数是无限的，所以自然数集合是无限集.

例二 因为所有的自然数都是有理整数，所以如果把所有的自然数看作一个集合 A，把所有的有理整数看作一个集合 B，那么自然数集 A 的所有元素都是有理整数集 B 的元素，集合 A 是集合 B 的一个子集. 有理整数集还包括负整数，负整数不属于自然数集 A，因此，集合 A 是集合 B 的一个真子集.

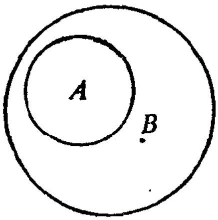


图1.

如果用图形来表示集合 A 是集合 B 的真子集，那么就得到图1. 这种用来形象地表示出几个集合的关系的图形，叫做文氏图.

注意一 任意一个集合是它本身的子集.

注意二 空集 ϕ 是任何一个集合的子集，空集和0集、0的概念不同，不要混同起来. 0集是指仅有0元素的集合；0是数字而不是集合.

集合的表示法

【列举法】 把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做列举法.

【描述法】 把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做描述法.

例一 用集合 B 来表示小于12的正偶数，用列举法表示就是

$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}.$$

例二 用集合 A 来表示高一(1)班的全体学生，用描述法表示就是

$$A=\{\text{高一(1)班全体学生}\}.$$

例三 用集合 O 来表示正奇数，就是

$$O=\{1, 3, 5, 7, \cdots\cdots\}.$$

例四 用集合 D 来表示不等式 $x-5>0$ 的解集，就是

$$D=\{x: x>5\}.$$

注意 a 和 $\{a\}$ 是不同的，a 表示一个元素，$\{a\}$ 是表示只有一个元素的 a 的集合.

集合的运算

【集合的相等】 如果集合 A 和集合 B 的所有元素相同，那么就说集合 A 和集合 B 相等，记成 $A=B$.

【集合的并】 由属于集合 A 或者集合 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 和集合 B 的并集．记作 $A\cup B$ 或 $A+B$(读作 A 和 B 的并).

【集合的交】 由同时属于集合 A 和集合 B 的一切元素组成的集合，叫做集合 A 和集合 B 的交集．记作 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$(读作 A 和 B 的交).

【集合的差】 由属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 和集合 B 的差集．记作 $A-B$ 或 $A\setminus B$ (读作 A 和 B 的差).

【集合的补】 由不属于集合 A 的所有元素组成的集合，叫做集合 A 的补集或余集．记作 A' (读作 A 的补)或 $\overline{A}$ (读作非 A).

集合的对应

【对应】 从集合 A 和集合 B 中，各取出一个元素 a 和 b，作为一个对偶 (a,b)，我们就说使元素 a 和 b 互相对应.

【从集合 A 到 B 的对应】 如果对集合 A 中的任何一个元素 a，通过某种法则 φ，在集合 B 中都可以找到元素 b 和它对应，这时我们就说 φ 建立了从集合 A 到 B 的对应．b 叫做 a 的对应元素(或象)，a 叫做 b 的原象(或逆象)，记作 $b=\varphi(a)$.

【多多对应】 如果集合 A 中有些元素 a，在集合 B 中有多个元素和它对应，而集合 B 中有些元素 b，在集合 A 中也有多个元素和它对应．这种对应叫做从集合 A 到集合 B 的多多对应．

【多一对应】 如果集合 A 中的任意一个元素 a，在集合 B 中只有唯一的元素 b 和它对应(可能有多个 a 对应于同一个 b)，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的多一对应，一般叫做单值对应，也叫做映射．

【一多对应】 如果集合 B 中的任意一个元素 b，在集合 A 中只有唯一的元素 a 和它对应(可能有多个 b 对应于同一个 a)，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的一多对应．

【一一对应】 如果集合 A 中的任意一个元素 a，在集合 B 中只有唯一的元素 b 和它对应，而集合 B 中的任意一个元素 b，在集合 A 中也只有唯一的元素 a 和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的一一对应．

【逆对应】 如果 φ 是从集合 A 到集合 B 的一一对应，那么由 φ 确定的从集合 B 到集合 A 的对应叫做 φ 的逆对应，记作 φ^{-1}．

【集合的对等】 如果集合 A 和 B 之间能建立起一一对应关系，那么我们就说这两个集合 A 和 B 是对等的（或把它们叫做有相同的势)，记作 $A \sim B$．

例一　如果把全班的学生作为集合 A，把教室里的坐位作为集合 B．排坐位的时候，一个学生一个坐位，把学生 a 同坐位 b 对应，因为每一个学生 a 都给他安排了一个坐位 b，因此这是从集合 A 到 B 的对应．

例二　我们把全校的所有学生作为一个集合 A，把学校图书馆的所有书作为一个集合 B，假设每个学生都在图书馆借过书，从集合 A 到 B 可以建立一个对应，对应的方法是：

$$\varphi: \text{学生 } a \longrightarrow \text{学生 } a \text{ 借过的某本书 } b.$$

因为每一个学生不止借过一本书，而每本书也不止只被一个学生借过，所以这个对应是多多对应．

例三　我们把角的度数作为集合 A，把从 -1 到 1 的实数作为集合 B，它们之间可以建立一个对应，对应关系是：

$$\varphi:\ a \longrightarrow \sin a.$$

因为一个角度只能有一个正弦值，而$[-1,1]$上的一个实数值可以是许多个角度（如互补的角或相差 $360°$ 的整数倍的角）的正弦值，所以这个对应是从 A 到 B 的多一对应，也就是单值对应，或叫映射。

例四　集合 $A=\{$正实数$\}$，集合 $B=\{$实数集$\}$，对应关系是：

$$\varphi:\ a \longrightarrow a \text{ 的平方根 } b.$$

因为 a 的平方根有正负两个，所以这个对应是从 A 到 B 的一多对应。

例五　实数集和数轴上的全体点的集合是一一对应关系。

例六　我们平时计数东西，如数苹果，实际上是在自然数和苹果之间建立一一对应关系。

单调函数

【函数的单调性】　函数在某个区间上都是增大或都是减小的性质，叫做函数的单调性。

【增函数】　如果对于函数 $f(x)$ 在某一区间上的自变量的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 的时候，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，我们就说函数 $f(x)$在这个区间上是增函数（或者叫做是单调增加的）。

【减函数】　如果对于函数 $f(x)$ 在某一区间上的自变量的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 的时候，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，我们就说函数 $f(x)$在这个区间上是减函数（或者叫做是单调减小的）。

【单调函数和单调区间】　在某一区间上的增函数和减函数都叫做单调函数，这个区间叫做这个函数的单调区间。

例　函数 $f(x)=x^2$，在区间$(0,\infty)$内，函数值 $f(x)$ 是随着自变量 x 的增加而增加的，所以我们说函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(0,\infty)$上是增函数。函数 $f(x)=-x$ 在区间$(-\infty,\infty)$上，函数值 $f(x)$ 是随自变量 x 的增加而减小的，所以我们说函数 $f(x)=-x$ 在区间$(-\infty,\infty)$上是减函数。函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(0,\infty)$上，以及函数 $f(x)=-x$ 在区间$(-\infty,\infty)$上都是单调函数。区

间$(0,\infty)$和区间$(-\infty,\infty)$分别是它们的单调区间.

注意 如果单调函数$f(x)$的单调区间就是它的定义域，我们就说函数$f(x)$在整个定义域上是单调函数. 如上例中的$f(x)=-x$.

奇函数和偶函数

【奇函数】 一个函数$f(x)$，如果对于这个函数的定义域内的任意x，都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做奇函数.

【偶函数】 一个函数$f(x)$，如果对于这个函数的定义域内的任意x，都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做偶函数.

单值函数和多值函数

【单值函数】 对于函数$y=f(x)$，当自变量x在定义域内任取一个值的时候，函数y只有唯一的值和它相对应，这样的函数叫做单值函数.

【多值函数】 对于函数$y=f(x)$，当自变量x在定义域内取某一个值的时候，函数y可以有几个值和它对应，这样的函数叫做多值函数.

例 对于函数$y=x^2$，自变量x的任意一个确定的值，函数y都有唯一确定的值和它对应，所以是一个单值函数. 而函数$y=\pm\sqrt{x}$，因为在定义域内自变量x的每一个确定的值，函数y有两个值和它对应，所以是多值函数.

幂函数

象$y=x^n$（常数n是不等于零的有理数）形式的函数叫做幂函数.

例 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-3}$等都是幂函数，它们的特点是解析式都是用自变量的某一个幂的形式来表示的.

指数函数

象$y=a^x$（常数$a>0$，且$a\neq1$）形式的函数叫做指数函数.

例 $y=2^x$，$y=0.3^x$等都是指数函数.

注意 这里规定常数$a>0$且$a\neq1$，因为（1）如果$a=0$，那么当$x>0$的时候，a^x等于一个常数0；当$x<0$的时候，就没有意义.（2）如果$a=1$，那么

a^x 是一个常数 1．所以如果 $a=0$ 或 $a=1$，研究 a^x 是没有必要的．(3) 如果 $a<0$，那么在实数范围内有可能会发生无意义的情况，例如当 $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$，……的时候就是这样．因此要规定 $a>0$ 且 $a\neq1$．(在有些书里也有不把 $a=1$ 除外的，本书采用前一种规定法．)

对数函数

函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq1)$ 叫做对数函数．

例 $y=\log_2 x$，$y=\log_{0.3} x$，$y=\lg x$ 等都是对数函数．

注意 根据对数的定义，对数的底数 a 必须符合：$a>0$，$a\neq1$ 的规定．

反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，解出 x，得到另一个函数关系，把 y 当作自变量，x 当作因变量，就是 $x=\varphi(y)$．就把 $\varphi(y)$ 叫做 $f(x)$ 的反函数．

例 $x=\sqrt[n]{y}$ 是 $y=x^n$ 的反函数．

注意 可以看出，形如 $y=\log_a x$ 的对数函数和形如 $y=a^x$ 的指数函数是互为反函数的．

二 集合的性质和运算定律

1．集合的包含关系的主要性质 集合的包含关系有以下主要性质

(1) 包含关系的传递性定理：

如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$．

(2) 包含关系的相等定理：

如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，那么 $A=B$．

2．并集的运算定律 集合 A 和集合 B，如果 $A=\{2,4,6,\cdots\cdots\}$，$B=\{1,3,5,\cdots\cdots\}$，那么集合 A 和集合 B 的并集是

$$A\cup B=\{2,4,6,\cdots\cdots\}\cup\{1,3,5,\cdots\cdots\}$$
$$=\{1,2,3,4,5,6,\cdots\cdots\}=\{全体自然数\}.$$

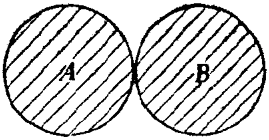


图 2.

两个集合 A 和 B 的并集用文氏图来表示，就是图 2 中的阴影部分.

并集有以下运算定律：

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A$.

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

（3）等幂律 $A\cup A=A$.

3. 并集的主要性质 集合的并有以下主要性质：

（1）如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cup C\subseteq B\cup C$.

如果 $A=B$，那么 $A\cup C=B\cup C$.

（2）如果 $B\subseteq A$，那么 $A\cup B=A$.

（3）如果 $A\subseteq C$，$B\subseteq C$，那么 $A\cup B\subseteq C$.

4. 交集的运算定律 有两个集合，集合 $A=\{$分数$\}$，集合 $B=\{$正数$\}$，那么它们的交集就是

$$A\cap B=\{\text{分数}\}\cap\{\text{正数}\}=\{\text{正分数}\}.$$

集合 A 和集合 B 的交集用文氏图来表示，就是图 3 中的阴影部分.

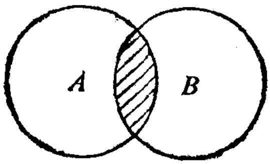


图 3.

交集有以下运算定律：

（1）交换律 $A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）分配律

（i）交关于并的分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

(ii)并关于交的分配律：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

5. 交集的主要性质 集合的交有以下主要性质：

(1) $A\cap B\subseteq A$， $A\cap B\subseteq B$.

(2) 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$.

如果 $A\cap B=A$，那么 $A\subseteq B$.

(3) 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap C\subseteq B\cap C$.

如果 $A=B$，那么 $A\cap C=B\cap C$.

注意 如果集合 A 和 B 没有公共元素，那么 $A\cap B=\phi$，也就是说集合 A 和 B 不相交。

6. 差集的运算定律 有两个集合 A 和 B，如果 $A=\{x: x>2\}$，$B=\{x: x<5\}$，那么集合 A 和集合 B 的差集是

$$A-B=\{x: x>2\}-\{x: x<5\}$$
$$=\{x: x\geqq 5\}.$$

两个集合 A 和 B 的差集用文氏图来表示，就是图 4 中的阴影部分.

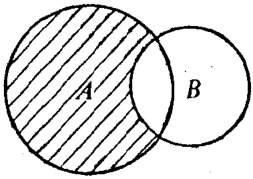


图 4.

注意 根据定义，集合的差可以这样表示：

$$A-B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\}.$$

差集有以下运算定律：

(1) $C\cap(A/B)=(C\cap A)\setminus B$

$$=(C\cap A)/(C\cap B).$$

(2) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.