立体几何学习指导

许莼舫 编

中国青年出版社

立体几何学习指导

许 莼 舫 编

中国青年出版社

内 容 提 要

学过平面几何的人继续学习立体几何，不免有些困难。本书为了帮助读者树立立体观念和培养空间想象力，对平面和立体两种图形的性质作了比较，并用实际事例来验证某些概念。为了使读者通过直观掌握立体图形的具体特征，本书介绍了看图、画图和制作模型的方法。各种定义、公理、定理、公式等，都分类作成表解，便于复习。本书多举例题，对解题方法也作了详细的指导。

立体几何学习指导

许莼舫 编

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092 1/32　5 1/8印张　95千字

1958年8月北京第1版　1980年3月北京第8次印刷

印数 447,001—847,000 册　定价 0.37 元

重印说明

本书初版于 1958 年，是根据当时的中学数学课本编写的。现在中学数学教学大纲已经修订，新教材也正在统一编写中，本书取材和目前教学要求已不完全适合。但作为青年学习立体几何的参考读物和自学读物，还有一定价值。许多青年读者和中学教师纷纷来信要求重版。由于作者已于文化大革命前夕因病去世，无法再作修订，爰照旧版重印。

中国青年出版社

1978 年 10 月

編者的話

生活在有長、寬、高的三度空間的人們，不論在日常生活或生产实踐中，所接触到的东西几乎无一不是立体几何图形。为了系統地研究空間物体图形的性質，发展我們的邏輯思維和对于空間的想象力，并且利用这些知識去解决实际問題，就必須学习立体几何学。过去的旧教育是脫离实际的，因为立体几何比較难教，也比較难学，于是大学不考它，中学也就不教它，这样因噎廢食，使生活在三度空間的人只認識了二度空間的平面几何图形，这当然是极不应該的。新中国誕生以后，批判了旧教育的缺点，确立了学用一致的新教育观点，立体几何学就成为我們中学所必修的一科。

一般人認为立体几何难学，主要是：(1)不能很好地树立立体观念，一遇題目，图就画不来，即使有了图也还不易認清楚。(2)立体几何学中的定义和定理很多，而又很繁杂，不易系統地記忆，并且也不易运用。(3)空間图形的性質，常易和平面图形的性質互相混淆，往往由于濫用平面几何定理而造成錯誤。(4)平面几何图形可以通过直观而得到启发，但在紙上描画出来的立体图形，却难于得到直观的帮助。

本書針对上述各点，来对学习立体几何的讀者作一些指导。內容的重点如下：

(1)从平面观念过渡到立体观念，对一般学习的人来說，困难較多．本書除用專門的一节举例說明空間图形性質和平面图形性質的联系和区别以外，又随处提出相关的材料，兩相比較，以期在这方面起一些桥梁作用．

(2)本書对怎样看图和画图，也作了必要的指导，借以帮助讀者树立立体观念，培养他們对空間图形的想象力，以及繪制图形的能力．

(3)立体几何模型的制作，不但可以使我們通过直观来掌握空間形象的具体特征，并且在貫彻基本生产技术教育上也有重要的意义．因此，本書对模型的制作方法，也扼要作了一些介紹．

(4)为了使讀者对抽象的概念得到清晰而透彻的領会，本書对于立体图形的基本性質，往往和实际生活中的事例联系起来講，即用客观实际来加以驗証．

(5)关于立体几何学中的各种定义、公理、定理、公式等，本書都分类列成表解，这不但可以便利复习，而且由此可以比較异同，帮助記忆．

(6)关于解題方法的指导方面，着重举出分析思考的过程，以及解法的灵活运用，并且随时提出学习上应該注意的各点．

因为本書不但要供給讀者作正課学习的輔导，并且也可以用来作为复习材料，所以編排的次序和課本稍有不同．尽管如此，讀者只要学过一些有关直綫和平面的初步知識，閱讀本書第一章便沒有什么困难，以后对其余各章的学习，就可以

循序进行了.

本書一定还有許多缺点，希望讀者提供宝貴意見，以作將来修訂时的参考.

許蒓舫

1957年3月

目　次

第一章　基本知識

一　什么是立体几何学

記得从前在一个土地改革展覽会上，曾經陈列了一只地主家里收租用的大斛。这是一只容量比标准斛大得多的斛子，是地主剝削农民的工具。我們为了要知道这斛子的容量究竟是多少，曾經精确地計算了一下。

这种量米、麦等粮食所用的斛子，式样如图1所示，是用五块木板做成的，一块是正方形的底，四块是完全相同的等腰梯形的側面，上面有一个正方形的口，是一种口小底大的特殊量器。我們曾經用尺量过这只大斛，知道它的口上的正方形每边長8寸（这是就內面量的，板的厚不算在內，以下都是一样），底面的正方形每边長17寸，高（指上、下兩面的正方形中心間的距离）11寸。从这几个数能不能算出这一只斛子的容量呢？它比标准斛（容量5斗）究竟大多少呢？

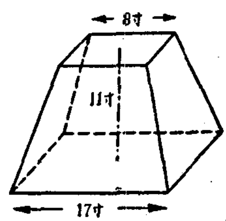


图 1.

要解决这个問題，可以根据中国古書"九章算术"里所講的方法。九章算术是在汉朝时候編写的，現今流傳的这本書

是三国时魏朝的刘徽所注解的．这本書第五章"商功"载着一个"方亭"求积的問題．所謂方亭，就是和上述斛子形狀一样的东西．我們从原書的术文：

"上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一．"

設下面正方形每边的長是 a，上面正方形每边的長是 b，高是 h，可譯成公式，得体积是

$$V=\frac{1}{3}h\ (ab+a^2+b^2).$$

有了这个公式，就可以求那个斛子中空的体积了．我們用已知的 $a=17$、$b=8$、$h=11$ 代入上式，得

$$V=\frac{1}{3}\times 11\times(17\times 8+17^2+8^2)=1793,$$

即斛子中空的体积是 1793 立方寸．

現在，再把体积 1793 立方寸換算成容量．大家都知道，每 27 立方寸的体积，折合容量 1 升，所以我們从

$$1793\div 27=66.4,$$

得斛子的容量是 6 斗 6 升 4 合．把它来和标准斛比較一下 (6.64 斗 $-$ 5 斗 $=$ 1.64 斗)，竟大了 1 斗 6 升 4 合．由此可知，地主对农民的剝削是何等的厉害！

在这里，我們不免会发生这样的疑問："九章算术"里所講的算法是怎样得到的呢？这样算出来的結果絕对精确嗎？要解决这兩个問題，当然不是一件簡單的事情，我們必須对这种图形的性質作深切的研究才行①．

① 这一只斛子的图形叫做正四棱台或正方台，从"九章算术"的算法譯成的公式，我們在学习立体几何到相当程度后，就能加以証明．証法可参閱本書第二章的例題 24．

这种有長短、寬窄和厚薄的图形，叫做立体几何图形或空間几何图形。我們以前学过的平面几何学，只研究在同一个平面內的图形（即仅有長短和寬窄的平面几何图形）的性質，而不能解决关于立体几何图形的問題。現在要研究不限于在同一个平面內的图形（即立体几何图形）的性質，借以解决許多实际問題的几何学，就是立体几何学，或称空間几何学。

人們生活在三度空間[①]里面，日常所接触到的东西，几乎都有長、寬、厚可以度量，也就是随处都是立体几何图形。人們既然和立体几何图形有密切的关系，那末为了要了解自然，利用自然，征服自然，对立体几何学的研究，当然是十分需要的。

就中国古代人民来說，他們居住在黃河流域，在肥沃的土地上从事农业生产。为了貯藏粮食，必須計算仓窖的容量；为了农产品的交易，必須制造量器；为了防止黃河泛濫，必須建筑堤岸，計算土方；等等。在这些劳动实踐中，他們获得了許多經驗，发現了許多立体几何学的定理。这样看来，我們可以肯定地說：立体几何学是劳动的产物。

二　从平面几何到立体几何

在数学的領域里面，无論从算术过渡到代数，或从代数过渡到几何，中間都是有一段相当的距离的。一个人要想从自己已經熟悉的园地，奔向一个从未領略过的境地，总得有一位

① 空間是有長短、寬窄和厚薄（或高低）三方面可以度量的，所以叫做三度空間或立体世界。

有經驗的領路人作引导。可是从平面几何过渡到立体几何却有些不同，因为在它們中間沒有很大的差别，好象只隔了一条小溝，不需要什么桥梁，可以一跃而过。因此，我們对平面几何如果已經心領神会，学习得很好，那末要想学习立体几何，就沒有多大的困难了。

話虽如此，但研究平面几何时，可以在紙上画出具体的图形，用观察和实驗的方法来帮助我們思考和領会；研究立体几何却有些兩样，用直尺和圓規在紙上所画的图形，只是象征的，而不是具体的。要作出具体的立体几何图形，非用模型不可，而模型的制作又不很容易。因此，学习立体几何不容易得到观察和实驗的帮助，常有賴于凭空構想，必須把空間观念正确地树立起来，才能获得学习效果，这和平面几何相比較，当然多了一层困难。

况且，在平面图形和空間图形之間，有些性質是相同的，有些是不相同的，有些是相类的，有些是不相类的，我們必須仔細辨明；否则的話，一定会互相混淆，产生錯誤。

因为我們剛学完平面几何，对平面图形的性質已經有了很深的印象，現在接着学习立体几何，往往会不自覺地把平面图形的性質加到空間图形上面。这种穿凿附会的毛病，是初学的人最容易犯的。为此，編者在这里举了一些例子，目的是想使讀者明了兩者的异、同，在学习时可以知所警惕，免生誤会。

1. 相同的性質 有些空間图形，实际上是在同一个平面内的；又有些空間图形，虽然不在同一个平面内，但和平面图

形有同样的性質．下面便是几个最簡單的例子：

例一　从空間的一点，到空間的一直綫可作一条垂綫（或平行綫），并且只可以作一条垂綫（或平行綫）．

設 A 是空間的一点，BC 是空間的一直綫．如图 2，因为“一条直綫和它外面的一点决定一个平面”，所以 A 和 BC 在同一个平面内．可見 A 和 BC 实际上就是平面几何图形，因而适用平面几何学的定理，即从点 A 可作 BC 的一条垂綫 AD（或一条平行綫 AD'），并且只可以作一条垂綫（或平行綫）．

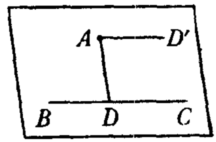


图 2.

例二　不在同一个平面内的三条直綫，若其中的兩条都平行于第三条，那末前兩条也互相平行．

設 AB、CD、EF 是空間的三条直綫①，如图 3，$AB \parallel EF$，$CD \parallel EF$．作平面 P 垂直于 EF，因 $AB \parallel EF$，所以 $AB \perp$ 平面 P（在互相平行的兩条直綫中，若有一条垂直于一个平面，那末另外一条也垂直于这个平面）．同理，$CD \perp$ 平面 P，所以 $AB \parallel CD$（垂直于同一个平面的兩条直綫互相平行）．

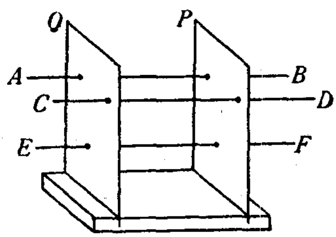


图 3.

2．不相同的性質　我們既然把平面几何图形推广到了空間几何图形，这里面当然有許多不相同的性質，下面兩个例子是最簡單的：

例一　空間的兩条直綫，若不平行，那末有时相交于一点，有时不相交．

① 注意这三条直綫不是完全在同一个平面内．

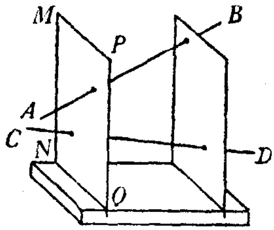


图 4.

在平面几何学中，兩条直綫若不平行，那就一定要相交于一点；但在空間几何学中，除掉这兩条直綫恰巧在同一个平面內时，才能相交外，一般都如图4所示，既不平行，又不相交①．这是人們由生活当中可以体驗出来的一条公理，用不到我們去另加証明．

例二 从一条空間直綫上的一点，可作这直綫的垂綫，但所作的条数是无穷的．

設 AB 是一条空間直綫，O 是这直綫上的一点，如图5．因为"經过一条直綫可以作平面，但可作的个数是无穷的"，所以过 AB 可作平面 P、Q、R……，数目无穷．在平面 P 內，过 O 可作 AB 的一条垂綫 OC．虽然在这个平面內只可以作 OC 一条垂綫，但在平面 Q、R……內，过 O 又可作 AB 的垂綫 OD、OE……，所以可作的垂綫是无穷的．

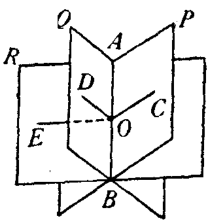


图 5.

3．相类的性質 在立体几何学中，有很多的定理是和平面几何学中的互相类似的．把某些平面几何定理中的点换作直綫，所有的直綫或某几条直綫换作平面……，就可得到一些相类的立体几何定理．下面略举几个实例：

例一 从平面几何知道"兩条直綫的相交处是一个点"，

① 在这一幅图里的兩条空間直綫，是分别画作从兩块对立的木板內穿过的．我們用平面观念来看这图，好象把 BA 和 DC 延長就可以相交，但在确立了空間观念以后，从图中所穿的孔的位置，就可以領会到 BA 的延長綫是斜向着左板的 PQ 一側伸展出去的，DC 却是斜向着 MN 的一側伸展，所以决不会相交．

在立体几何中有一条相类似的定理，即"兩个平面的相交处是一条直綫"。

例二　在平面几何学中，有下面一条定理：

"一直綫垂直于兩条平行綫中的一条，也垂直于另一条。"

在立体几何学中就有下列的相类定理：

"一直綫（或一平面）垂直于兩个平行平面中的一个，也垂直于另一个。"

4. 不相类的性質　也有些平面几何定理中的点換成了直綫，所有的直綫或某几条直綫換成了平面……，却不能得到相类的立体几何定理。举例如下：

例一　平面几何学中有一条定理：

"兩直綫都垂直于第三条直綫，那末这兩直綫互相平行。"

我們把这三条直綫都換作平面，写成

"兩平面都垂直于第三个平面，那末这兩平面互相平行。"

从图6的情况，知道这显然是不成立的。

图中的兩个平面 P 和 Q 都垂直于平面 MN，但平面 P 和 Q 相交于 AB，并不是平行的。

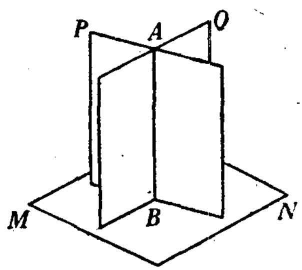


图6.

例二 从平面几何定理：

"兩直綫都平行于第三条直綫，那末这兩直綫互相平行。"

虽然把所有的三条直綫都換作平面，这定理还是成立的，但若

單把前面的兩条直綫換作兩个平面，写成

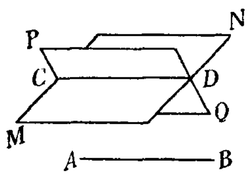
“兩平面都平行于一条直綫，那末这兩平面互相平行.”

或單把第三条直綫換作一个平面，写成

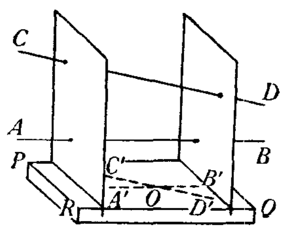
“兩直綫都平行于一个平面，那末这兩直綫互相平行.”

这些都是不成立的.

如图7的(1)，PQ 和 MN 兩个平面虽都和一条直綫 AB 平行，但 PQ 和 MN 并不一定会互相平行，如图是相交于 CD 的. 再看图7的(2)，AB 和 CD 兩条直綫虽都和一个平面 PQ 平行(其中的 AB 平行于 PQ 平面內的 $A'B'$，CD 平行于 PQ 平面內的 $C'D'$)，但 AB 和 CD 并不一定会平行，如图所示，AB 和 RQ 平行，而 CD 和 RQ 却不平行.



(1)



(2)

图7.

从图7的(1)，我們还可以知道：“从空間的一点 A，可作一直綫 AB，平行于兩个相交的平面 PQ 和 MN.” 方法很簡單，只要从 A 作一直綫，使它和兩个平面的交綫 CD 平行就得. 又从图7的(2)知道：“过空間的一点 O，可作一平面 PQ，平行于兩条不平行的直綫 AB 和 CD.” 方法是过 O 作直綫 $A'B' \parallel AB$，再过 O 作 $C'D' \parallel CD$，这兩条相交直綫 $A'B'$ 和 $C'D'$ 所决定的平面，就是所求作的平面. 这兩个推論只适用于立体几何学，若在平面几何学中，那末过一点要作一直綫平行于兩条不平行的(即相交的)直綫，就不可能了.

此外，平面图形和立体图形的性質不相同或不相类的地

方还有許多. 例如: (a)在平面几何学中,不能有三条直綫都兩兩互相垂直;但在立体几何学中是有的,象長方体上过同一个頂点的三条棱就是. (b)在平面几何学中的兩条不平行(即相交)的直綫,不能有公垂綫;但在立体几何学中,不在同一个平面內的兩条不平行的直綫是有公垂綫的. (c) 在平面几何学中,从一直綫外的一点到这直綫只能作兩条相等的斜綫;但在立体几何学中,从一平面外的一点到这平面却能作无数条完全相等的斜綫. 讀者在学习时对这些若能随时留意,不使混淆,那末在学习效果方面,自然会有較大的收获了.

最后,还得补充几句:我們既然从狹隘的平面推广到了整个的空間,那末应該把眼界拓寬起来,不再在一个平面里繞圈子,而化"四圍"(左右前后)为"六合"(左右前后上下),可以在无尽的空間翺翔,任所欲往,无远勿屆. 譬如說,圓周上各点的等距离点,若限于一平面,那末仅有一点,即圓的中心;但拓展到空間,就有无穷的点,它的軌迹是通过圓的中心而垂直于圓面的一条直綫. 又如兩点的等距离点,限于一平面时,虽为数已經无穷,軌迹是兩点連結綫的垂直平分綫;但在无尽的空間,軌迹便是这兩点連結綫的垂直平分平面了,这不是更加寬广嗎? 明了了这些例子,对学习立体几何,就可以事半功倍了.

三 怎样看图和画图

說到看图,好象人人都会,用不到編者来嘮叨. 可是,关于空間几何图形,却不一定每个人都能够看得清楚,認得正