序　言

电路的等效变换是电路理论中重要课题之一。高等学校的电路教材，由于受学时、篇幅和教学主要任务的限制，不能在等效变换方面作很多介绍。因此需要一本对这方面的先进理论作些补充介绍的书，书中还应把教材中已介绍的等效变换作些集中论述，以加深理解。本书就是根据这一设想所作的一个尝试。

书中第一章介绍电网络图论的有关概念、电路基本分析方程及变量的变换，以使后面的论述有所依循。第二章集中论述常用的电路等效变换。第三章介绍多射线星形网络和多角形网络的等效变换。第四章介绍多端口电阻网络的等效变换和短路电导矩阵的实现。

本书读者应该具有电路基本知识。书中对读者已熟知的结论和方程，不予详细推导，并尽可能给出简洁的矩阵表达式。

本书承钟佐华教授审阅，提出不少宝贵意见，谨致衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，敬希广大读者批评指正。

编　者

1988年2月于福州大学

目　录

绪　论

由于电子计算机和工程数学的发展，给电路理论研究提供了新的方法和途径；同时，由于工程中电路规模越来越大，对电路所具有的性能要求越来越高，客观上要求电路理论去回答过去未曾面对过的问题，因而扩展了电路理论研究领域的广度和深度，促使电路理论研究进入一个新的阶段，展现出一个崭新的面貌。

电路的等效变换，原来就是电路理论研究的一个课题，取得了一定成就。例如，著名的戴维南等效电路，三角形和星形网络的等效变换等，在电路理论研究和分析中都发挥了巨大的作用，历来成为电路教材中的一个组成部分。然而，随着科学技术和"黑盒子"(Black Box)概念的发展，人们对电路的研究和分析，并不是总要进行旨在确定电路中任何地方的电压和电流的计算，其兴趣往往只局限于其中某一部分的几个量，特别是网络要与外部电路连接的那些端钮上的量。因此，就外部而论，重要的是要知道它与外部连接的那些端钮上的电压和电流间的约束关系，一旦这些关系获得，网络的外部行为就容易确定了。至于与这些端钮连接的网络内部，究竟是用据以推导出这些约束关系的原网络来实现，还是用它的等效电路来实现，这对研究外部行为来说，显然是不重要的。我们更关注于寻求更简单、更易于实现的等效电路的结构和参数，而其等效电路的结构和参数应该是只要能保证这些约束

关系成立就可以了。因而，这就促进了电路等效变换理论的发展。从五十年代后期以来，等效变换理论不仅得到很大发展，而且还渗透到电路理论的一些前沿领域中去，相互促进，相互发展。例如，在电路故障诊断的研究中，就可以找到应用等效变换理论的例子。

电路中谈等效变换，不可避免地要涉及到等效电路；而一谈到电路，也不可避免地要涉及到描述它电性能的分析方程。因此，我们说这个电路与那个电路等效，那就意味着，在指定端点或指定部分，这两个电路所建立的指定分析方程是相同的。不言而喻，所谓等效电路就隐含着等效条件，这条件就把这两个电路的等效限制在指定分析方程所包含的内容上；越出这个内容就不一定等效了。譬如说，一个由 RLC 元件组成的无源一端口网络，在 50 赫兹正弦电源作用下，它的入端阻抗 $Z_i=5+j31.4$ 欧，因而它的等效电路可用一个 5 欧电阻和一个 0.1 亨电感相串联来表示。但要注意，它们的等效含义仅仅限制在 50 赫兹正弦稳态的情况下。又譬如，一个由 RLC 元件组成的二端口网络，它的等效电路可用一个Π形或 T 形电路来表示；但也要注意，它们的等效含义也仅仅限制在指定工作频率的正弦稳定状态下，仅就二端口网络方程而言是等效的。如果越出这个范围，譬如，我们探讨这两个二端口网络的端钮上的节点电压方程时，就不一定等效了。这是由于我们推导Π形或 T 形等效电路时；是以二端口网络方程为基础，并不涉及到节点电压方程，因此，对节点电压方程来说，就没有保证等效的基础。然而事情也不会统统如此，也有一种等效电路几乎不存在限制条件的。例如，象图 0-1 那样的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

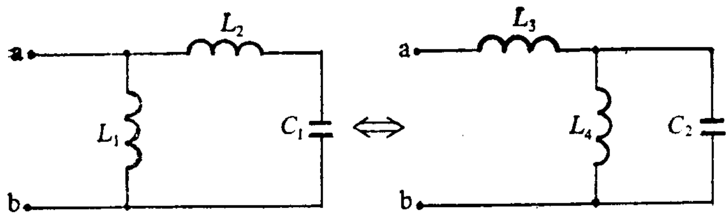


图 0-1　等效变换的举例

等效变换，可以证明，当参数间配置得合适时，这两个一端口网络的入端阻抗是无条件等效的。如果我们把有条件的等效变换统称之为等效变换的话，那么，把无条件的等效变换称之为全等效变换，也未尝不可。本书主要探讨线性电路中的等效变换。

一提到等效变换，人们往往关注于等效电路中各元件参数与原电路中各元件参数之间的关系式，亦即寻找从原电路元件参数直接求等效电路元件参数的计算式。这对某些场合是可以做得到的，但对另一些场合就很繁复、困难。事实上这无关紧要。由上述等效变换的含义可知，重要的是在指定位置上，这两个电路的指定分析方程是相同的。既然如此，这两个电路的元件参数就不一定直接挂钩，可以通过两者都要满足的指定分析方程的途径，来寻求等效电路元件参数的计算方法和计算式。这样，可能会给等效变换的研究带来更积极的意义。

第一章　电路基本分析方程和变量的变换

§1-1　电路的拓扑图及图的运算

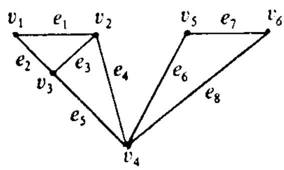
一个电路，所以具有某种电性能，除了取决于组成该电路的各个元件本身的电性能之外，还取决于这些元件互相之间是如何连接的，亦即该电路的结构。电路的拓扑图正是这种结构的体现。在电路教材中，已叙述了图、连通图、有向图、路径、回路、树、割集、基本回路和基本割集等，现再补充一些后面要用到的术语。

子图(Subgraph)和子图的补图 (Complement of a Subgraph) —— 若图 G_i 的边集 E_i 和顶点集 V_i，分别是图 G 的边集 E 和顶点集 V 的子集合，则图 G_i 是图 G 的一个子图。子图 G_i 的补图 G_i' 是包含所有在 G 中而不在 G_i 中边的集合。

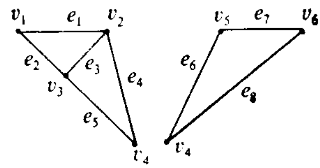
割点 (Cut-Vertex)，块 (Block) 和可分图 (Separable Graph)——若将连通图 G 中的一个顶点和与之关联的边移去后，剩下来的图成为不连通的，则这个顶点称为割点，又叫分离点。含有割点的连通图称为可分图；否则，就称为不可分图。图 G 中不含有割点的最大连通子图，叫做块。

图 1-1(a)是一个可分图，因为它具有割点 v_4；将它分离

后就形成两个部分，如图(b)所示。每一部分都不具有割点，因此这两部分都是图(a)G的块。图 1-2 不具有割点，所以它是不可分图。



(a) 具有割点的图 G



(b) 将(a)中割点 v_4 分离

图 1-1 可分图

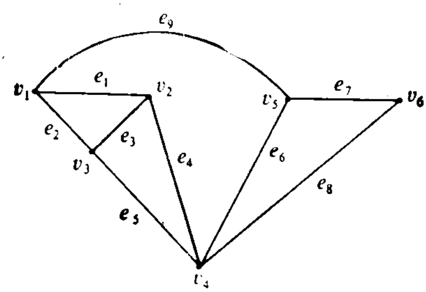
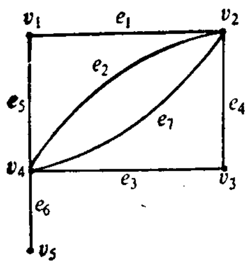


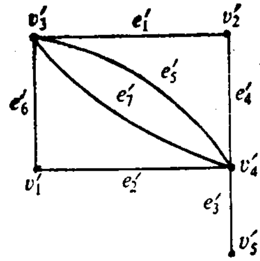
图 1-2 不可分图

同构(Isomorphism)——若图 G_1 和图 G_2 同构，则必须满足：(1)它们有相同数目的顶点；(2)它们有相同数目的边；(3)G_1 的顶点和边之间的关联关系，同 G_2 的顶点和边之间的关联关系，一一对应。

图 1-3 示出同构的两个图，它们顶点之间对应关系为：v_1—v_2'，v_2—v_3'，v_3—v_1'，v_4—v_4'，v_5—v_5'。它们边之间对应关系为：e_1—e_1'，e_2—e_5'，e_3—e_2'，e_4—e_6'，e_5—e_4'，e_6—e_3'，e_7—e_7'。同时看出，v_3 和 v_4 之间有边 e_3 关联，与此对应的是，v_1' 和 v_4' 之间有边 e_2' 关联。如此等等。



(a) 图 G_1

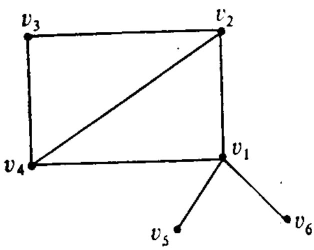


(b) 图 G_2

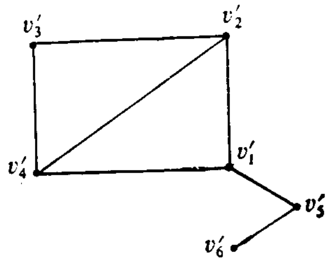
图 1-3 同构的举例

1- 同构 (1-Isomorphism)——图 G_1 和图 G_2 原来不同构，若通过将割点分离的办法使之成为同构，则称 G_1 和 G_2 为 1-同构。

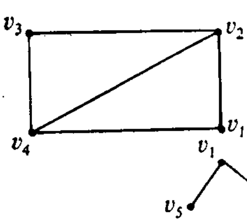
示于图 1-4(a)和(b)的 G_1 和 G_2 原来是不同构的，但若



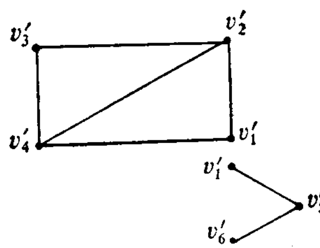
(a) G_1



(b) G_2



(c) 割点 v_1 分离后的 G_1



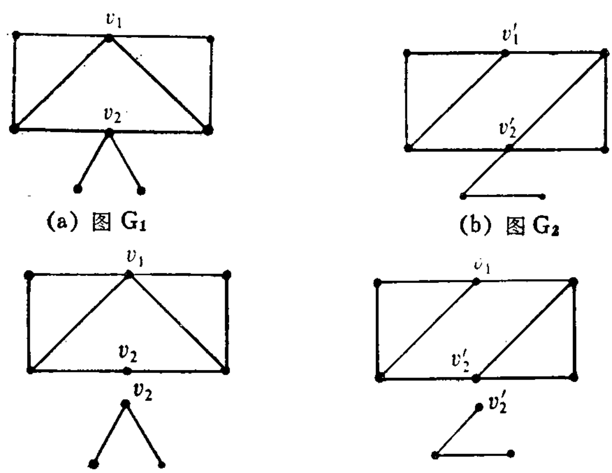
(d) 割点 v_1' 分离后的 G_2

图 1-4 1-同构举例

分别将割点 v_1 和割点 v_1' 分离，则得图（c）和图(d)，显然，这两个图就同构了。因此，G_1 和 G_2 是 1-同构。

2-同构（2-Isomorphism）—— 图 G_1 和图 G_2 原来不同构，若通过下述运算使之成为同构，则称 G_1 和 G_2 为2-同构：(1)将割点分离；(2)若其中有一个图，譬如说 G_1，具有两个子图 G_1' 和 G_1''，这两个子图恰好有两个公共的顶点 v_1 和 v_2（亦即 G_1' 和 G_1'' 通过这两个顶点连通），先将这两个顶点分离，再交换顶点对接之，又使 G_1' 和 G_1'' 连通（亦即将一个子图倒转后再与另一子图接通）。

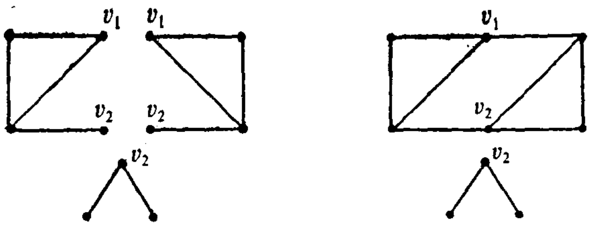
示于图 1-5(a)和(b)的 G_1 和 G_2 原来是不同构的，若将 G_1 和 G_2 的割点 v_2 和 v_2' 分离，则成图(c)和(d)；再将图(c)的上部分在公共顶点 v_1 和 v_2 处分离成两个子图，见图（e)；又将右边子图倒转后再与左边子图接起来，则成图（f）。显然，图(d)和图(f)是同构的。因此，G_1 和 G_2 是 2-同构。



(a) 图 G_1　　(b) 图 G_2

(c) 将 G_1 中割点 v_2 分离　　(d) 将 G_2 中割点 v_2' 分离

图 1-5　2-同构举例



(e) 将图(c)中的顶点 v_1 和 v_2 分离　　(f) 将图(e)中右边子图倒转后再接通之

图 1-5　2-同构举例(续)

§1-2　图的矩阵及矩阵间的关系

1】一个图表征了电路的结构，体现了基尔霍夫电流定律(KCL)和电压定律(KVL)对电路的约束关系。电路教材中介绍了一些矩阵来描述这些约束关系，归纳起来大致如下。

对一个连通有向图 G，当用 **A** 表示关联矩阵，**B** 表示回路矩阵(也称独立回路矩阵)，**I** 表示支路电流列向量，**V** 表示支路电压列向量，$\mathbf{V}_n$ 表示节点电压列向量，$\mathbf{I}_l$ 表示回路电流列向量，则有

$$\mathbf{A}\mathbf{I}=0 \tag{1-1}$$

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}^T\mathbf{V}_n \tag{1-2}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{V}=0 \tag{1-3}$$

$$\mathbf{I}=\mathbf{B}^T\mathbf{I}_l \tag{1-4}$$

当用 $\mathbf{B}_f$ 表示基本回路矩阵（也称单连支回路矩阵），$\mathbf{Q}_f$ 表示基本割集矩阵(也称单树支割集矩阵)，$\mathbf{V}_l$ 表示连支电压列向量，$\mathbf{V}_t$ 表示树支电压列向量，$\mathbf{I}_l$ 表示连支电流列向量，$\mathbf{I}_t$ 表示树支电流列向量，则有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\mathbf{B}_f = [1 \vdots \mathbf{B}_t]$$

或者 $$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_t \vdots 1] \tag{1-5}$$

$$\mathbf{Q}_f = [1 \vdots \mathbf{Q}_l]$$

或者 $$\mathbf{Q}_f = [\mathbf{Q}_l \vdots 1] \tag{1-6}$$

由于 $$[1 \vdots \mathbf{B}_t] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_l \\ \cdots \\ \mathbf{V}_t \end{bmatrix} = 0$$

因此有 $$\mathbf{B}_t \mathbf{V}_t = -\mathbf{V}_l \tag{1-7}$$

根据 $\mathbf{Q}_f$ 的含义，可有下式成立

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{I} = 0 \tag{1-8}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_f^T \mathbf{V}_t \tag{1-9}$$

由于 $$[1 \vdots \mathbf{Q}_l] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_t \\ \cdots \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = 0$$

因此有 $$\mathbf{Q}_l \mathbf{I}_l = -\mathbf{I}_t \tag{1-10}$$

如果所选的割集不是基本割集，而是任意一组独立割集 **Q**，则有

$$\mathbf{Q}\mathbf{I} = 0 \tag{1-11}$$

2】 下面，我们来研究这些矩阵之间的一些关系。

对于一个连通有向图 G，若令关联矩阵 **A**、回路矩阵 **B** 和割集矩阵 **Q** 的列所代表的支路是相同的，根据 **A** 和 **B** 的含义，不难理解有下式成立

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^T = 0$$

或 $$\mathbf{B}\mathbf{A}^T = 0 \tag{1-12a}$$

同理可得

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = 0$$

或 $$\mathbf{Q}\mathbf{B}^T = 0 \tag{1-12b}$$

上式的正确性可通过图 1-6 来校验。若按图 G 中所标支路号排列，并选节点 v_4 为参考点，则它的关联矩阵 **A** 为

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A}= \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

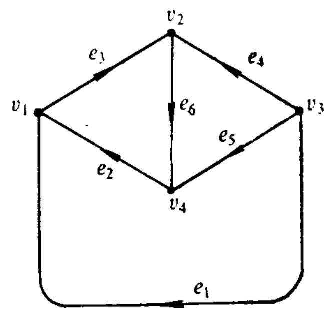


图 1-6 图G

任选三个独立回 路，譬 如 取：$v_1 \to e_3 \to v_2 \to e_6 \to v_4 \to e_5 \to v_3 \to e_1 \to v_1$；$v_1 \to e_3 \to v_2 \to e_6 \to v_4 \to e_2 \to v_1$ 和 $v_2 \to e_6 \to v_4 \to e_5 \to v_3 \to e_4 \to v_2$ 三个回路，则这回路矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B}= \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

再任选三个独立割集，譬如：第 1 个割集(e_1, e_2, e_3)，取 e_3 的方向为割集方向；第 2 个割集(e_1, e_5, e_4)，取 e_1 的方向为割集方向；第 3 割集(e_1, e_2, e_6, e_4)，取 e_6 为割集方向，则这割集矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{Q}= \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

按式(1-12)，可校验出

$$\mathbf{AB}^T=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{BQ}^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

对于一个连通有向图 G，当选定一个树 T 后，可按连支和树支分类编排 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}_f$ 和 $\mathbf{Q}_f$ 中的列，因而，可得具有相同列的三个矩阵

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_t \vdots \mathbf{A}_l]$$

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{B}_t \vdots \mathbf{1}]$$

$$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{1} \vdots \mathbf{Q}_l]$$

由式(1-1)可得

$$[\mathbf{A}_t \vdots \mathbf{A}_l]\begin{bmatrix} \mathbf{I}_t \\ \cdots \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

即
$$\mathbf{I}_t=-\mathbf{A}_t^{-1}\cdot\mathbf{A}_l\cdot\mathbf{I}_l \tag{1-13}$$

由于 $\mathbf{A}_t$ 的列对应于一个树，它是非奇异的方阵，所以上式成立。由式(1-12a)可得

$$[\mathbf{A}_t \vdots \mathbf{A}_l]\begin{bmatrix} \mathbf{B}_t^T \\ \cdots \\ \mathbf{1}^T \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

亦即 $$\mathbf{B}_t^T = -\mathbf{A}_t^{-1} \cdot \mathbf{A}_l \tag{1-14}$$

又据式(1-12b)，可得

$$[1 \vdots \mathbf{Q}_l]\begin{bmatrix}\mathbf{B}_t^T \\ \cdots \\ 1^T\end{bmatrix}=0$$

亦即 $$\mathbf{Q}_l = -\mathbf{B}_t^T$$
或 $$\mathbf{B}_t = -\mathbf{Q}_l^T$$
$$\left.\right\}(1-15)$$

由上面式子可得出三个重要结论：

(1) 若对一个图 G 获得 $\mathbf{A}_t$ 和 $\mathbf{A}_l$，则 $\mathbf{B}_f$ 和 $\mathbf{Q}_f$ 也就获得了。

(2) 若 $\mathbf{B}_f$ 获得，则 $\mathbf{Q}_f$ 也获得了，反之亦然。

(3) 式(1-15)说明了：对于一个连通有向图G，当选定一个树后，一个单树支割集所包含的树支和连支是什么关系呢，不是别的，这些连支恰好就是含有这个树支的各个单连支回路的连支。换句话说，一个单树支割集中除一条树支外，可包含多个连支，而由这些连支所组成的各个单连支回路中必然包含有这条树支。这个结论，反过来也成立，即一个单连支回路所包含的连支和树支是什么关系呢，不是别的，这些树支恰好就是含有这条连支的各个单树支割集的树支所组成。换句话说，一个单连支回路中除一条连支外，可包含有多条树支，而由这些树支所组成的各个单树支割集中必然包含这个连支。

了解这些结论，对电路的分析是非常有用的。

§1-3 电路量的表征和支路特性方程

1】从这节开始，将介绍电路的基本分析方程。要建立方

程，除了应用上述表征电路拓扑关系的各个矩阵外，还要用到电路的物理量和参数量。这些量的表征，随着电路的工作状态的不同，而有不同的含义。对直流稳态电路来说，电流、电压、电流源、电压源、受控源以及电路元件的参数等，可用实数表征；对正弦稳态电路来说，这些量可用复数或复阻抗表征；对动态电路来说，这些量可用象函数或运算阻抗表征。尽管这些情况不同，写出这些量时或用实数，或用复数，或用象函数，但是基本关系以及基本方程的矩阵形式都是类似的，只不过其中的各个元素的含义不同而已。因此，本书对不同工作状态下，同一个量的表征均用同一符号，如：I，V，U_s，Z，Y…等。请读者注意。

2】 电路分析最基本的单元是支路，我们对支路采用复合支路（或称标准支路、一般支路）的记法。一条不含受控源的复合支路如图 1-7 所示，其中 U_{sk} 或 I_{sk} 可以为零或同时为零。根据图上标示的参考方向，可写出电路中的第 k 条支路的方程

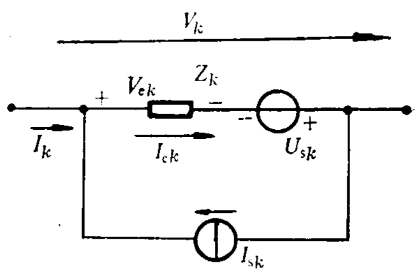


图 1-7 不含受控源的复合支路

$$V_k = Z_k I_{sk} - U_{sk} \tag{1-16a}$$

$$I_{ek} = I_k + I_{sk} \tag{1-16b}$$

整理之得

$$V_k = Z_k(I_k + I_{ak}) - U_{sk} \tag{1-17a}$$

或者

$$I_k = Y_k(V_k + U_{sk}) - I_{sk} \tag{1-17b}$$

其中 $Y_k=1/Z_k$，按此规定，可写出同上式完全相似的其它各条支路的特性方程。只不过 $k=1, 2, \cdots, n$ 而已。若一个电路中共有 b 条支路，则可用矩阵表示支路的特性方程

$$\mathbf{V}=Z(\mathbf{I}+\mathbf{I}_s)-\mathbf{U}_s \tag{1-18a}$$

或者

$$\mathbf{I}=\mathbf{Y}(\mathbf{V}+\mathbf{U}_s)-\mathbf{I}_s \tag{1-18b}$$

其中 $\mathbf{V}=[V_1\ V_2\ \cdots\ V_b]^T$ 为支路电压列向量，

$\mathbf{I}=[I_1\quad I_2\quad \cdots\quad I_b]^T$ 为支路电流列向量，

$\mathbf{U}_s=[U_{s1}\ U_{s2}\ \cdots\ U_{sb}]^T$ 为电压源列向量，

$\mathbf{I}_s=[I_{s1}\ I_{s2}\ \cdots\ I_{sb}]^T$ 为电流源列向量，

$\mathbf{Z}=\mathrm{diag}[Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_b]$为支路阻抗矩阵，

$\mathbf{Y}=\mathrm{diag}[Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_b]$为支路导纳矩阵。

各电流之间和各电压之间的关系为

$$\mathbf{I}_e=\mathbf{I}+\mathbf{I}_s \tag{1-19a}$$

$$\mathbf{V}_e=\mathbf{V}+\mathbf{U}_s \tag{1-19b}$$

其中 $\mathbf{V}_e=[V_{e1}\ V_{e2}\ \cdots\ V_{eb}]^T$ 为支路阻抗元件上的电压列向量，

$\mathbf{I}_e=[\mathbf{I}_{e1}\ \mathbf{I}_{e2}\ \cdots\ \mathbf{I}_{eb}]^T$ 为支路阻抗元件上的电流列向量。

必须说明，这里阻抗元件参数 Z_k，若是指运算阻抗，则可认为，元件上电流或电压的初始值为零。在必需计及初始值的情况下，可将附加电源归入 U_{sk} 或 I_{sk}。这样，支路特性方程式(1-18)的形式仍然不变。

3】 若电路中含有互感，则没有互感作用的支路特性方程不变，仍为式(1-17)所示；而有互感作用的一些支路特性方程稍有不同。设第 1 支路和第 2 支路有互感，如图 1-8 所示，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com