

788 C141.6
328/1

数学建模方法

主 编 杨学桢
副主编 王培光
张建辉
吴冬生

河北大学出版社

责任编辑 韩建民 马 力

封面设计 赵 谦

责任印制 李晓敏

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法 / 杨学桢等著. — 保定: 河北大学出版社, 2000. 10

ISBN 7-81028-487-8

I. 数… II. 杨… III. 建立模型 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 75479 号

出版: 河北大学出版社(保定合作路 1 号)

经销: 全国新华书店

印制: 河北省〇五印刷厂

规格: 1/32(850mm×1168mm)

印张: 13

字数: 326 千字

印数: 1001~3500 册

版次: 2000 年 10 月第 1 版

版次: 2001 年 6 月第 2 次印刷

定价: 18.00 元

前 言

当前,随着科学技术和计算机的迅速发展,数学向各个领域的广泛渗透已日趋明显,数学不仅在传统的物理学、电子学和工程技术等领域继续发挥着重要作用,而且在经济、人文、体育等社会科学领域也成为必不可少的解决问题的工具。这样,尽快提高学生的数学素质和应用数学知识解决实际问题的能力已是摆在数学教育中的一个重要课题。近年来数学建模(数学模型的建立与分析)课程的设立和全国大学生数学建模竞赛的开展对提高学生的数学素质和能力,培养应用型人才是十分有益的。

目前,数学建模教学及竞赛前的辅导、培训已在全国蓬勃开展,而满足辅导培训需要不同类型、不同特色的教材,尤其是参加竞赛的学生大部分是二、三年级的学生,他们来自不同的系(专业),其所学的数学知识又不能很好地适应应用型人才的需要,因此编写适应建模需要的教材,不仅是建模竞赛的需要,而且也丰富了数学的教学内容和数学应用的领域。鉴于这种情况,我们编写了这本《数学建模方法》。

本书具有以下几个特点:

1. 用较短篇幅介绍了数学建模竞赛中一些必要的数学知识及有关方法。

2. 根据每一章介绍的数学内容,列举了一些不同领域中的建模实例,使学生尽快地将有关数学知识和数学建模联系在一起。部分章节重点强调了如何分析问题和建立模型的方法。

3. 结合我们的体会,对建模中应注意的有关问题做了必要的说明。

全书共分十章,第一、二、三章由王培光执笔,第四、五章由吴冬生执笔,第六、七、八章由杨学桢执笔,第九、十章由张建辉执笔,最后由杨学桢、王培光对全书进行统稿。

由于我们的水平有限,书中难免有不妥、错误之处。敬请各界朋友及同仁们批评指正。

编者

1999.12

目 录

第一章 绪 论	(1)
§ 1.1 模型与数学模型	(1)
§ 1.2 数学模型的分类	(3)
§ 1.3 数学建模举例	(3)
§ 1.4 建立数学模型的方法与步骤	(9)
§ 1.5 建模能力的培养	(11)
习 题	(12)
第二章 微分方程方法建模	(13)
§ 2.1 预备知识	(14)
2.1.1 微分方程的基本概念	(14)
2.1.2 线性微分方程的基本定理	(16)
2.1.3 一阶微分方程	(17)
2.1.4 二阶常系数线性微分方程	(24)
2.1.5 微分方程的稳定性简介	(28)
§ 2.2 建模实例	(30)
2.2.1 小船行走路线问题	(30)
2.2.2 飞向月球问题	(31)
2.2.3 溶液混合问题	(34)
2.2.4 人口问题	(35)
2.2.5 军事战争问题	(41)
2.2.6 宣传运动的效果研究问题	(45)

2.2.7	关于诊断糖尿病的问题	(48)
2.2.8	家用电器销售问题	(52)
习 题		(54)
第三章	差分方程方法建模	(57)
§ 3.1	预备知识	(57)
3.1.1	差分的概念	(57)
3.1.2	差分方程的基本概念	(59)
3.1.3	线性差分方程的基本定理	(60)
3.1.4	一阶常系数线性差分方程	(61)
3.1.5	二阶常系数线性差分方程	(65)
3.1.6	差分方程的稳定性简介	(68)
3.1.7	离散量与连续量的对应关系	(69)
§ 3.2	建模实例	(71)
3.2.1	弦受集中荷载时的位移问题	(71)
3.2.2	生产和库存系统问题	(73)
3.2.3	银行复利问题	(73)
3.2.4	换热器系列的最优设计问题	(74)
3.2.5	市场价格的形成问题	(76)
习 题		(82)
第四章	概率方法建模	(84)
§ 4.1	预备知识	(84)
4.1.1	概率的定义及性质	(84)
4.1.2	随机变量及其分布	(89)
4.1.3	随机变量的数字特征	(94)
4.1.4	大数定律与中心极限定理	(98)
4.1.5	建模中常用的几个分布	(99)
§ 4.2	建模实例	(105)

4.2.1	粒子运动问题	(105)
4.2.2	随机徘徊问题	(107)
4.2.3	彩票问题	(109)
4.2.4	企鹅后代个数问题	(111)
4.2.5	花店老板的进货问题	(112)
4.2.6	病人排队时间问题	(115)
4.2.7	一个更换问题	(118)
4.2.8	建厂问题	(120)
习 题		(124)
第五章	统计方法建模	(127)
§ 5.1	预备知识	(127)
5.1.1	基本概念及统计学中的重要分布	(127)
5.1.2	参数的估计理论	(131)
5.1.3	参数及模型的假设检验	(137)
5.1.4	回归分析方法	(143)
5.1.5	单因子方差分析方法	(145)
§ 5.2	建模实例	(147)
5.2.1	钓鱼问题	(147)
5.2.2	新药药效问题	(148)
5.2.3	婴儿出生时刻问题	(151)
5.2.4	质量控制问题	(152)
5.2.5	运动成绩预测问题	(155)
5.2.6	灯丝材料问题	(158)
5.2.7	蠓虫识别问题	(161)
习 题		(164)
第六章	规划方法建模	(167)
§ 6.1	预备知识	(167)

6.1.1	线性规划	(167)
6.1.2	整数规划	(187)
6.1.3	非线性规划	(198)
§ 6.2	建模实例	(206)
6.2.1	资源最优利用问题	(206)
6.2.2	生产任务的分配问题	(209)
6.2.3	生产力布局问题	(213)
6.2.4	赛事举例	(222)
习 题		(227)
第七章	层次分析法建模	(235)
§ 7.1	预备知识	(235)
7.1.1	AHP 的基本方法和步骤	(235)
7.1.2	不完全判断信息下的排序问题	(241)
7.1.3	群组决策	(245)
§ 7.2	建模实例	(247)
7.2.1	过河的代价与效益分析	(248)
7.2.2	企业留成的分配问题	(255)
7.2.3	农民卖水果问题	(259)
7.2.4	最佳食品搭配问题	(263)
习 题		(267)
第八章	图论方法建模	(269)
§ 8.1	图的基本概念	(269)
§ 8.2	E 图和 H 图	(276)
8.2.1	E 图	(276)
8.2.2	H 图	(277)
8.2.3	建模实例	(278)
§ 8.3	树	(285)

8.3.1	最小树	(286)
8.3.2	有向图	(289)
8.3.3	有根树	(289)
8.3.4	建模实例	(291)
§ 8.4	最短路	(292)
8.4.1	图中某点到其他顶点的最短路	(293)
8.4.2	图中任意两点间的最短路	(297)
8.4.3	建模实例	(299)
§ 8.5	最大流	(302)
8.5.1	最大流与最小割集	(303)
8.5.2	Fold - Fulkerson 标号法	(308)
§ 8.6	匹配	(311)
8.6.1	最大匹配	(311)
8.6.2	建模实例	(314)
§ 8.7	边染色与顶点染色	(315)
8.7.1	基本知识	(315)
8.7.2	建模实例	(317)
§ 8.8	最小复盖、最小控制集、极大独立集	(318)
8.8.1	基本知识	(318)
8.8.2	建模实例	(323)
习 题		(325)
第九章	量纲分析法建模	(330)
§ 9.1	预备知识	(330)
9.1.1	量纲	(330)
9.1.2	单位制与物理定律	(332)
9.1.3	量纲相互独立的充要条件	(333)
9.1.4	量纲分析建模的一般方法	(335)
§ 9.2	建模实例	(339)

9.2.1	考虑空气阻力的单摆周期问题	(339)
9.2.2	航船的阻力问题	(341)
9.2.3	点热源的热扩散问题	(343)
9.2.4	量纲分析法建模的一般步骤	(345)
§ 9.3	方法总结	(346)
习 题		(348)
第十章	其他方法建模	(349)
§ 10.1	变分法建模	(349)
10.1.1	变分法的基本知识	(349)
10.1.2	建模实例	(358)
§ 10.2	对策方法建模	(371)
10.2.1	对策论的基本知识	(371)
10.2.2	建模实例	(379)
§ 10.3	动态规划方法建模	(388)
10.3.1	动态规划的基本知识	(388)
10.3.2	建模实例	(394)
习 题		(400)
参考文献		(404)

第一章 绪 论

随着科学技术的迅速发展,数学与其他学科之间的新的联系不断涌现,数学模型已越来越受到人们的关注,成为人们对各门科学进行量化分析的一个主要手段。例如,在技术领域,从卫星到核电站,从天气预报到家用电器,高技术中的高精度、高自动、高质量、高效率等特点,都是通过数学模型和数学方法并借助计算机的计算控制来实现的。在社会领域,对于当前人类面临的五大问题:(1) 人口问题,(2) 工业化资金问题,(3) 粮食问题,(4) 不可再生的资源问题,(5) 环境污染问题。如何提出相应的对策予以解决,同样需要借助建立数学模型加以论证,为决策者提供理论依据。

本章主要介绍模型及数学模型的概念及大致分类,通过实例说明建立数学模型的一般步骤和方法。

§ 1.1 模型与数学模型

模型通常是指按比例、形态或其他特征制成的同实物相似的物体,或者是指用一定数学结构作为某种形式语言的解释。它具有以下三方面特点:

1. 它是实际事物的一部分属性的抽象或模仿,而不是全部属性的复制;

2. 它由与被分析的问题有关的要素构成;

3. 它体现了有关要素之间的特殊关系。

模型可以分成形象模型和抽象模型两类。

根据实物,设计或设想,按比例、形态或其他特征制成的看起

来和客观实体基本相似的模型叫做形象模型。例如,教学用建筑模型,人体模型,航海模型等。

借助于符号,图表等来描述客观事物的模型叫做抽象模型。例如,电路图,建工图纸等。

利用变量、等式和不等式以及数学运算等数学符号和语言规则来描述事物的特征及内在联系的模型叫做数学模型。

数学模型的特征是:

1. 它是某事物为实现一种特殊目的而作出的一个抽象化、简单化的数学结构表达式。

2. 它是数学上的抽象,在数值上可以作为公式应用,可以推广到与原物相近的一类问题。

3. 可以作为某事物的数学语言,可以译成算法语言,编写程序进入计算机。

数学模型应用十分广泛的原因是因为在自然界和社会事物中,一种事物或现象,与另一些事物或另一些现象之间,存在着数量(依附某种性质)关系。人们利用数学模型把这种数量(性质)关系刻画出来,用以研究它所反映的特性。例如,爱因斯坦的著名公式 $E = mc^2$, 就是一个反映两种形式的宇宙能之间数量关系的数学模型。它表示包含在物质内部的能量 E , 等于其质量 m 乘以作为另一种形式宇宙能的放射现象所具有的极限均匀速度 c 的平方。

数学模型除了在物理、化学、天文等自然科学领域的广泛应用外,目前也正在越来越多的应用于经济学、管理学、人口学等社会科学领域。例如,马克思的再生产公式就是一个描述社会再生产的经济数学模型:

$I(v + m) = IIc$ 说明在简单生产条件下,两大部类之间所必须保持的一种数量关系。

$I(v + m) > IIc$ 或写成 $I(v + m) = II(c + \triangle c)$ 说明在

扩大再生产的条件下,两大部类间所必须保持的一种数量关系。

§ 1.2 数学模型的分类

数学模型可以按照不同的方式分类,下面简介几种分类方法:

1. 按变量性质分类:根据变量是确定的还是随机的可分为确定性模型和随机性模型。

根据变量是连续的还是离散的可分为连续模型和离散模型。

2. 按时间关系分类:有静态模型和动态模型。

3. 按研究方法分类:有初等模型,微分方程模型,优化模型,运筹模型,概率模型等。

4. 按研究对象所在领域分类:有人口模型,经济模型,社会模型,生态模型,交通模型等。

5. 按研究对象的内部结构和性能的了解程度分类:有白箱模型,灰箱模型和黑箱模型。

模型的分类问题并没有什么重要意义,因为问题本身以及解决问题的方法,依照人们的各种不同分法,它既可属于这个类型又可属于那个类型,重要的是有效地解决问题。本课程主要讨论数学模型的建立及求解问题。

§ 1.3 数学建模举例

欧几里德几何,牛顿的万有引力定律都是极为成功的数学建模的典型范例,我们还可以举出成百上千成功的数学建模实例,本节给出两个建立数学模型的实际例子,说明从现实对象到数学模型的过程,以便对数学模型全貌的了解有个初步认识。

例 1 贷款买房问题。

房地产已经进入市场,随着住房改革的深入,人人都要考虑买

房。然而,多数人不可能有这么多钱能一次付清,必须贷款买房,从而也就成为我们家庭面临的许多经济决策问题之一。目前市场上不断有各种售房广告出现,人们看到这样的广告之后,除了能知道自己是否有能力去买这样的房子这样的反应之外,也许更多的是提出问题:房子有多大,如果一次付清要多少钱,银行贷款的利率多大等等。为分析这些问题,我们不妨把问题具体化,以便于建立模型分析、解决问题:

小李夫妇为买房要向银行借款6万元,月利率是0.01,贷款期为25年。小李夫妇要知道每个月要偿还多少钱(设为常数),才能决定自己有无能力来买房。这里假设小李夫妇每月能有900元的节余。

解: 设 A_0 ($= 6$ 万元) 为向银行的贷款额, $R = (0.01)$ 为月利率, N 表示第 N 个月(时间变量), A_N 表示第 N 个月尚欠银行的款, x 表示 25 年 ($= 300$ 月) 还清本息每月应还的钱。

这里要求的是 x , 因而将 x 看成因变量, A_0, R 看成参数, N 看成自变量。本问题的数学模型可这样建立:

A_0 (一开始借多少钱),

$A_1 = A_0(1 + R) - x$ (一个月后欠银行的钱数, 即本金加利息减去每月要还的钱数)

显然第 N 个月尚欠银行的钱数为:

$$A_N = A_{N-1}(1 + R) - x \quad (1.3.1)$$

其中 A_0 已知。这就是本问题的数学模型。(数学上, (1.3.1) 称为(线性) 差分方程的初值问题)。

将 $A_{N-1}, A_{N-2}, \dots, A_1$ 的表达式依次代入(1.3.1), 即得

$$\begin{aligned} A_N &= A_0(1 + R)^N - x[(1 + R)^{N-1} + (1 + R)^{N-2} + \dots \\ &\quad + (1 + R) + 1] \\ &= A_0(1 + R)^N - \frac{x}{R}[(1 + R)^N - 1] \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

当 $N = 300$ 时, $A_{300} = 0$ 就表示还清贷款, 由此得到

$$0 = 60000 \times (1.01)^{300} - \frac{x}{0.01} [(1.01)^{300} - 1]$$

从而解得: $x \approx 632$ 元。这就是说每月要拿出 632 元交付银行。所以, 小李夫妇还是有能力买房的, 但他们的节余减少了, 应急能力降低了。

如果在此时, 某借贷公司针对上述情况出了一个广告: “本公司能帮助您提前三年还清借款, 只要: ① 每半个月向公司还一次钱, 钱数为 $\frac{632}{2}$ 元; ② 由于文书工作增多, 要求您预付三个月的钱, 即预付 1896 元”。提前三年还清。这当然是吸引人的, 条件似乎也不苛刻, 但人们仍有疑惑: 该借贷公司是在从事慈善事业呢, 还是在赚钱? 为此我们对该公司的两个“只要”(孤立地) 进行分析, 就可作出决断。

分析(1) 此时主要是还款周期变了, 从一个月变为半个月, 因而可设 $R = \frac{0.01}{2} = 0.005$, $x = 316$, $A_0 = 60000$, 这时要求的是使 $A_N = 0$ 的 N (表示半个月的数目)。由(1.3.2) 可知

$$N = \frac{\ln(\frac{x}{x - A_0 R})}{\ln(1 + R)} \quad (1.3.3)$$

从而求得 $N \approx 598$ (半个月) $= 299$ 月 ≈ 24.92 年, 即最多只能提前一个月还清。如果只有这一条该借贷公司真的成了慈善机构了。

分析(2) 预付 1896 元表示借贷人只借了 $A_0 = 60000 - 1896 = 58104$ 元, 而 $R = 0.005$, $x = 316$, 要求的是使 $A_N = 0$ 的 N 。由(1.3.3) 求得 $N \approx 505$ (半月) $= 252.5$ 月 $= 21.04$ 年, 即提前四年就还清了, 相当于该借贷公司至少可收入 $632 \times 12 = 7584$ 元。

由上述分析, 小李夫妇明白了, 可以一开始就少借一点钱, 同时也可看到算计(数学) 在家庭经济决策中的重要作用。

由公式(1.3.2),我们也可以在假定了 R 后大致推算出在本例一开始的广告中,如果一次付清应付多少款。

本例只是一个简化的例子,实际的借贷要复杂,因而更证明数学建模的分析的重要性。

例 2 放射性废物的处理问题。

环境污染是人类面临的一大公害,放射性污染对人类生命安全和地球上的生物存在严重的威胁,所以特别为人们所关注。和平利用原子能可为人类造福,但是核废料处置不好,又将对人类是一大危害。核废料如何处置为好,必须进行科学论证。

过去一段时间,美国原子能委员会为了处理浓缩的放射性废物,他们把废物装入密封的圆桶,然后扔到水深为 300 英尺的海里。一些生态学家和科学家为此表示担心,圆桶是否会在运输过程中破裂而造成放射性污染?美国原子能委员会向他们保证:“圆桶绝不会破裂”。并作了许多种试验证明他们的说法是正确的。然而又有几位工程师提出了如下的问题:圆桶扔到海洋中时是否会因与海底碰撞而发生破裂?美国原子能委员会仍保证说:“决不会”。

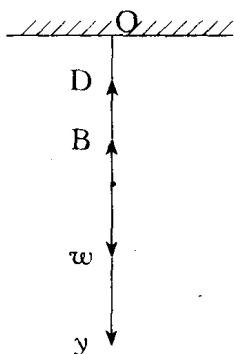


图 1.3.1

这几位工程师进行了大量的实验以后发现:当圆桶的速度超过 40 英尺/秒时,就会因碰撞而破裂。为此我们需计算圆桶同海底碰撞时的速度,是否会超过 40 英尺/秒?

解:如图 1.3.1 选取坐标系, w 表示圆桶重量,使圆桶向下, $w = 527.436$ 磅, $w = mg$, m 表示质量, g 表示重力加速度, $g = 32.2$ 英尺/秒²。

B 表示水作用在圆桶上的浮力,推圆桶向上。原子能委员会使用的是 55 加仑的圆桶,体积为 $7.35(\text{英尺})^3$, $1(\text{英尺})^3$ 海水重量为 63.99 磅。所以 $B = 63.99 \times 7.35 = 470.327$ 磅。

D 表示水作用在圆桶上的阻力,它阻碍圆桶在水中运动,与物体运动方向相反,通常与速度 v 成正比。 $D = cv$, $c > 0$ 为常数。通过大量实验得出如下结论:圆桶方位对于阻力影响甚小,可以忽略不计。且 $D = 0.08v$ 磅·秒/英尺。则作用在圆桶上的力为

$$F = w - B - cv$$

由牛顿第二定律: $F = ma$, 而 $a = \frac{d^2y}{dt^2}$, 可得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{m}(w - B - cv) = \frac{g}{w}(w - B - cv) \quad (1.3.4)$$

(1.3.4) 是一个二阶常微分方程。

将 $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ 代入(1.3.4), 得

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{cg}{w}v = \frac{g}{w}(w - B) \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (1.3.5)$$

解上述一阶线性非齐次方程, 得其解为

$$v(t) = \frac{w - B}{c} [1 - e^{-\frac{cg}{w}t}] \quad (1.3.6)$$

由(1.3.6) 式可知, 圆桶的速度为时间 t 的函数, 要确定圆桶同海底的碰撞速度, 就必须算出桶碰到海底所需的时间 t 。但作为 y 的显函数求出 t 是困难的, 所以不能用(1.3.5) 来求圆桶同海底的碰撞速度。但由(1.3.5) 我们可以得到圆桶的极限速度 v_T , 当 t

$$\rightarrow \infty \text{ 时, } v_T = \frac{w - B}{c}。$$

显然有 $v(t) \leq v_T$, 如果极限速度小于 40 英尺/秒, 那么圆桶就不可能因同海底碰撞而破裂。然而

$$v_T = \frac{w - B}{c} = 713.86 \text{ 英尺/秒}$$

这个数值太大了, 还不能断定 $v(t)$ 究竟是否能超过 40 英尺/秒。

下面将速度 v 作为位置 y 的函数 $v(y)$ 来考虑。