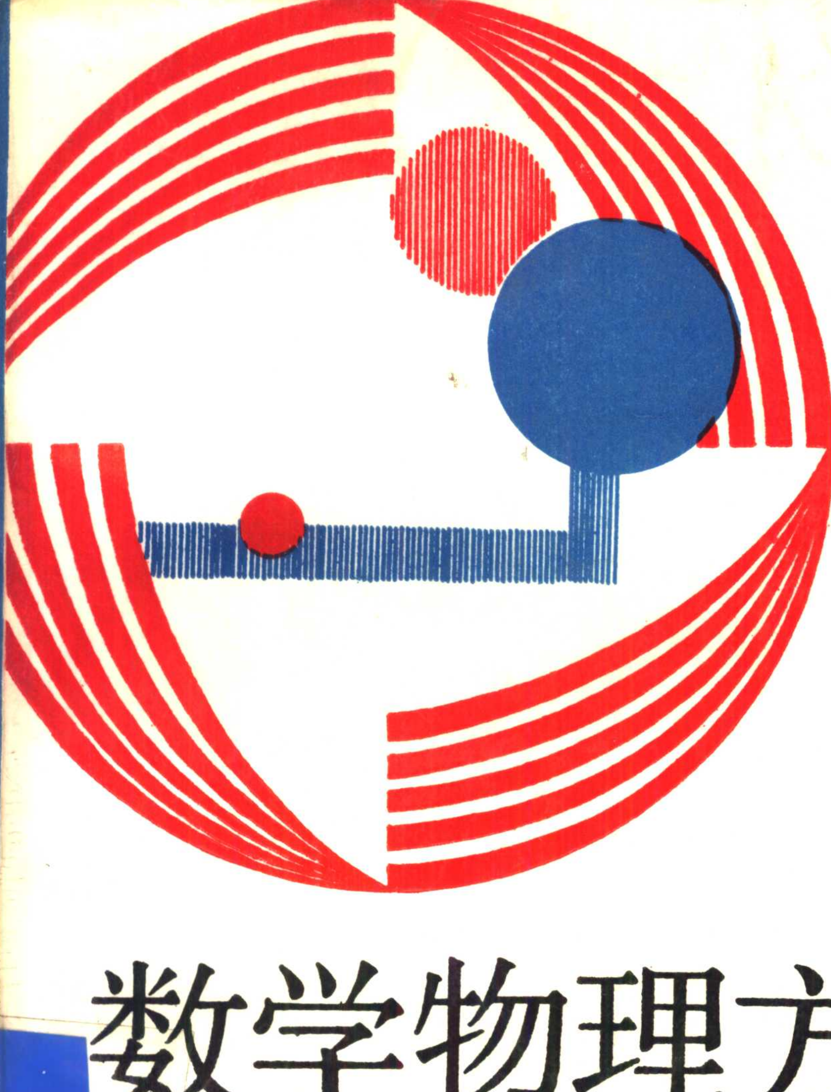

SHU XUE WU LI FANG FA

数学物理方法

邵惠民 编

南京大学出版社

内容简介

本书系统地阐述了数学物理方法的基础理论及其在物理学、工程技术上的应用。重点不是一般数学理论，而是尽量为读者提供与数学物理方法有关的基本概念、基本原理和解题的各种方法和技巧。本书涉及的尽管是一些传统内容，但在取材的深度和广度上都比以往教科书有所加强。此外，本书另一特色是：读者不仅可从本书的逻辑结构中获得简化和统一的数学基础，而且可从书内例题上看到独特的、简捷的、实用性很强的解题方法。

本书可作大学非数学专业的数学物理方法课程的教材，也可供广大科技人员参考。

责任编辑　李曾沛

数学物理方法

邵惠民　编

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　江苏阜宁印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 19.625　字数 505千

1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷

印数　1－1500

ISBN 7－305－00561－4

O·32　定价　6.20元

前　言

数学物理方法在物理学、工程技术和其他科学的许多领域都有着十分广泛的应用。主要原因是，在上述研究领域中经常出现很多描述某些物理规律的数学物理方程，通过对这些方程的求解，一方面可以得到极有实用价值的结论，另一方面又可促进这些领域的发展。

数学物理方法既可作为一门纯数学学科来研究，也可作为一门应用数学学科来研究。显然，对广大科技工作者及理科学生来说，学习数学物理方法的目的在于应用。因此，本书为了适合这些读者的需要，从选材上就有侧重，主要涉及的不是一般数学理论，而是尽量为读者提供与数学物理方法有关的基本概念、基本原理和解题的各种方法和技巧。

数学物理方法涉及到的数学基础知识面较广，如果将所涉及到的基础知识分别插入到相应的解法中去叙述，这样的结构安排松散、零乱。但是，如果将它们统统集中安排在前面叙述，这样学起来又会感到枯燥无味。为此，在内容安排上，本书既保持了各章节的独立，又计及到它们之间的前后呼应与关联，力争做到层次清晰、结构紧凑。

本书的正确使用方法是，先大体浏览，以求获得一般概念，然后逐章研读。如果对某些概念，需要详细了解时，再回过头来仔细查阅那一章的内容。

本书的前五章对复变函数理论及其应用作了清晰而简明的阐述，它主要为以后学习提供必要的复变函数的概念和定理。

第六章及第七章是为第十五章作准备的。但傅里叶分析和第四章的幂级数展开法都是函数分析的重要手段。其次，这两章涉

及到的复变函数的概念较多，所以将这两章提前安排到前面。

第二篇是本书的重点。第八章阐述如何建立描述物理现象的数学模型，并导出三类基本方程——波动方程、热传导方程与拉普拉斯方程，导出这些方程仅起一个示范作用。

第九章阐述了两个自变量的二阶偏微分方程的分类及其特征。以后数章着重阐述求解数学物理方程几个常用的分析解法。第十章阐述了一类比较简单的方程的通解求法，并突出在行波问题上的应用。

分离变量法是求解数学物理方程最简单而应用最广泛的方法之一。第十一章阐述了分离变量法的基本概念及应用这个方法所必需的、可分离的条件，并强调指出了这个方法的理论依据是：以本征问题为核心，以本征函数展开为解题的关键。第十二、十三、十四章是围绕分离变量法中常用的特殊函数——勒让德函数、贝塞耳函数来阐述的。这几章内容可以和第十一章穿插起来学，分开编排是为了给读者对这些特殊函数有一个完整的系统的概念。

第十五章阐述傅里叶变换和拉普拉斯变换在求解中的特点及技巧。对半无界非稳态的问题，拉普拉斯变换可获得在短时间内能很快收敛的解。

第十六章阐述求解边值问题的格林函数法，而对非稳态问题，应用格林函数可把第十一章分离变量法得到的各种解，表达成更一般、更紧凑的形式。但格林函数本身的求得又与第十一章中介绍的各种解的形式直接有关。

第十七章阐述保角变换法。对于平面场的拉普拉斯方程或泊松方程的边值问题的解析求解，它是一种最为有效的方法。因为与其他解析方法相比，保角变换法能够处理边界形状复杂得多的问题，所以这方法具有较大的实用价值。

对于一个给定问题，可以有很多种求解方法，但若想选用一种最直捷、最简便的方法，读者就得熟悉各种求解方法。为此，除

了要理解课文内容之外，更重要的是多练习、多思考、多总结，这样才能达到得心应手的程度。

在本书编写过程中，姚希贤教授细致审阅了全部初稿，并提出很多宝贵意见；在本书试用过程中，张贻瞳同志曾给予很大帮助和支持。在此，仅向他们致以深切谢意。

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，殷切希望读者批评指正。

编　　者

1987年8月于南京

目　录

第一篇　复变函数论及傅里叶分析

第一篇

复变函数论及傅里叶分析

第一章　复变函数

§1.1 复数的概念

在解代数方程时，我们知道i是方程

$$x^2+1=0$$

的一个根，即$i^2=-1$，并记作$i=\sqrt{-1}$，称i为虚数单位。

此外，以前我们在解二次方程$x^2=1$时，通常定义它有两个根，即$x=\pm 1$或$x_1=1$，$x_2=-1$两个根。若解高于二次以上的方程$x^n=1(n>2)$，一般来说应有n个根。如果我们不引入复数，连这类简单的问题也无法解决。

下面我们介绍与复数概念有关的几个定义：

1.1.1 复数的定义

形如$Z=x+iy$的数称为复数。其中x,y均为实数,i为虚数单位,$i^2=-1$，而实数x与y分别称为复数Z的实部及虚部，并记为

$$x=\mathrm{Re}Z \tag{1.1.1}$$

$$y=\mathrm{Im}Z \tag{1.1.2}$$

务需注意：按上述定义，复数的虚部是一个实数。

1.1.2 复数的相等

若两个复数，$Z_1=x_1+iy_1$与$Z_2=x_2+iy_2$，有

$$x_1=x_2$$

及

$$y_1=y_2$$

则我们称

$$Z_1=Z_2 \tag{1.1.3}$$

特别是一个复数等于零，不是意味着一个条件，而是意味着两个条件，即所给复数的实部与虚部两者都为零。

1.1.3 复数的共轭

若两个复数仅当它们的虚部相差一个正负号时，那末其中任何一个称为另一个的共轭。一个复数Z的共轭通常记作$\bar{Z}$或Z^*，所以

$$\bar{Z}=\overline{x+iy}=x-iy \tag{1.1.4}$$

这样定义之后，复数的算术运算满足实数算术运算的一般规律，并且复数的运算法则施于实数时(因为实数是复数的特例)，能够和实数运算的结果相符合。

复数没有大小之分，因此两个复数不能比较大小。但复数的实部及虚部均为实数，因此复数的实部和虚部可以比较大小。

§1.2 复数的几何表示法

复数一般可采用两种几何表示法，即采用复数平面（用平面上的点来表示复数，这个平面称为复数平面）或复数球面（用球面上的点来表示复数，这个球面称为复数球面）。

1.2.1 复数平面

（1） 直角坐标表示法（或称代数表示法）

复数 $Z=x+iy$ 可用直角坐标系平面中的坐标(x, y)的点来表示，因此复数平面上每一个点都与一个复数 $Z=x+iy$ 对应；反过来，也成立。所以全部复数与平面上的点构成一一对应的关系（图1.1(a)）。

必须注意：不可用符号(x, iy)来表示复数。

（2） 矢量表示法

在复数平面上可引入一个从原点出发指向点(x, y)的矢量来表示复数 $Z=x+iy$，如图1.1(b)所示。矢量的长度称为复数 Z 的模，记为$|Z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$。显然$|x|\leqslant|Z|$，$|y|\leqslant|Z|$，而

$|Z| \leqslant |x| + |y|$；矢量与x轴的夹角称为复数的幅角，记为$\mathrm{Arg}Z = \theta$。

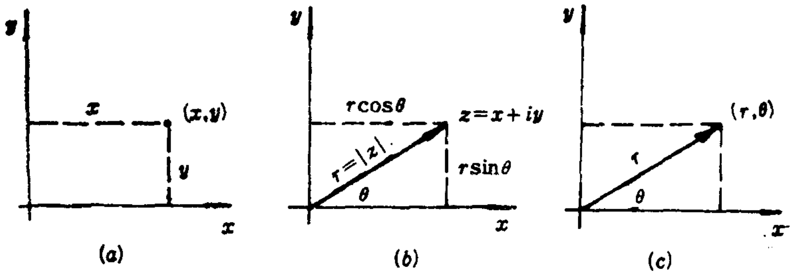

图1.1 复数的几何表示

（3）三角表示法（或称极坐标表示法）（图1.1c）

因为

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad (1.2.1)$$

则复数Z可以表示为

$$Z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1.2.2)$$

其中r为复数的模，即

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2.3)$$

θ称为复数的幅角，即

$$\theta = \mathrm{Arg}Z \qquad (1.2.4)$$

当复数$Z=0$时，则模$|Z|=0$，但它的幅角$\mathrm{Arg}Z$没有确定值（或者说没有意义，因而不能说$Z=0$的幅角等于多少）。

当复数$Z\neq0$时，则模$|Z|$是唯一确定的，但其幅角$\mathrm{Arg}Z$可以取无穷多个值，而这些值之间可相差2π的整数倍，因此任何一个非零的复数Z都有无穷多个幅角值。设θ_0是其中的一个，则下面公式

$$\theta = \mathrm{Arg}Z = \theta_0 + 2k\pi \quad (k\text{为任意整数}) \tag{1.2.5}$$

给出复数Z的全部幅角。在复数Z的幅角中，若取 θ_0 满足

$$0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi \tag{1.2.6}$$

则 θ_0称为幅角的主值，记为$\theta_0 = \arg Z$，并可表示成

$$\begin{matrix}\theta_0 = \arg Z = \\ (Z \neq 0)\end{matrix} \begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & \text{当}Z\text{在第 I 象限} \\ \mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{当}Z\text{在第 II 象限} \\ \mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{当}Z\text{在第 III 象限} \\ \mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x} + 2\pi & \text{当}Z\text{在第 IV 象限} \end{cases} \tag{1.2.7}$$

其中主值$\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$定义为

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2} \tag{1.2.8}$$

（4） 指数表示法

$Z = re^{i\theta}$的形式称为Z的指数表示式。利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.2.9}$$

就可将复数Z的三角表示式化为指数形式，因此欧拉公式是它们之间的纽带。特别是 $i = e^{i\pi/2}$，$-1 = e^{i\pi}$，e 与 π 是超越实数，i 是虚数，而e、π、i、1 这四个似乎毫无关系的数，却极其美妙地结合在一起。因此，这公式反映了欧拉公式的深刻内涵意义。

1.2.2 复数球面

复数球面上的点也可以与复数构成一一对应关系，因而也可采用复数球面（又称黎曼球面）上的点来表示。

取一个球心在原点，半径为 1 的单位球面（图 1.2所示），作竖直轴，使得它与平面上已给出的直角坐标平面 oxy 相垂直，