

「美」L·米罗维奇 著

结构动力学 计算方法

陈幼明 沈守正 译

国防工业出版社

结构动力学计算方法

〔美〕L. 米罗维奇 著

陈幼明 沈守正 译

国防工业出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了结构动力学的分析原理和计算方法。该书将结构模拟为离散、连续和离散化系统，推导了各类系统的运动方程，给出了振动问题的精确解与近似解法，讨论了经典的瑞利-里兹法和近代的有限元素法、子结构综合法、高阶系统的阶数缩减法等。全书围绕模态分析中的基本问题即特征值问题进行详尽的定性分析与求解运算。为了帮助读者理解书中内容，介绍了有关线性代数的基础知识，并在各章列举许多实例与习题。

本书可供机械、建筑、运输、造船、航空、航天等部门，从事结构工程的科学技术人员和有关高等院校师生参考。

Computational Methods in
Structural Dynamics
L. Meirovitch
Sijthoff & Noordhoff 1980

*

结构动力学计算方法

〔美〕L. 米罗维奇 著
陈幼明 沈守正 译

*

国防工业出版社出版

北京市惠爱西街老虎庙7号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 $1/32$ 印张 16 $1/2$ 364 千字

1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷 印数：00,001—3,800册

ISBN7-118-00215-1/V20 定价：3.35元

序 言

近几十年来结构动力学已取得了惊人的进展，这个进展应归功于有限元素法和子结构综合法等新的分析方法的出现以及数字计算机的应用。这些新的分析方法使得从事结构分析的人员能够描述十分复杂的问题，而计算机又能够使它们得到这些问题的数值解。因此，结构动力学领域的重点已逐渐转向研究计算方法。此外，为了对推导复杂结构运动方程的方法和对求解这些方程所需的计算方法有很好的理解，从事结构动力学工作的人员迫切要求进修数学。本书给出了在结构动力学方面的新成就，同时提供了各种模拟方法和运算方法所需的数学基础知识。本书可作为结构动力学研究生的教科书，还可作为已具备振动学基础知识（例如学过一般力学和结构振动方面的基本课程），并从事结构动力学研究工作的人员的参考书。

结构动力学的一个重要方面是数学模拟。数学模型可按照所描述系统性质的参数的空间分布来分类。它们有离散参数模型和连续参数模型两大类，一般很少遇到部分离散和部分连续的混合系统。离散系统通常用常微分方程组来描述，而连续系统通常用偏微分方程组来描述。实际上大多数动力学系统是连续的，而且除了某些简单的经典例子外，求得响应问题的精确解一般是极其困难的。上述论点表明要用近似解来代替精确解，这相当于用离散模型代替连续模型求解，则称此为空间离散化。而在用离散系统近似模拟连续系统的

过程中, 阶数的截尾问题是一个重要问题。当然, 我们所研究的目标是要得到一个相当低阶的、具有合适精度的、又能模拟连续系统的离散模型。

本书由三部分组成: 离散系统、连续系统和离散化系统。通过以下各章的简要介绍, 我们能很好地了解本书的内容。由于目前离散系统的振动计算必须大量地应用线性代数知识, 所以在第一章介绍了振动问题中特别感兴趣的线性代数概念, 如矢量空间和矩阵。第二章主要论述离散系统的自由振动, 并推导了各类动力学系统的运动方程, 讨论自由振动问题自然导致线性代数中一个最基本的问题即特征值问题或称本征值问题。推导响应问题所广泛采用的所谓模态分析法是基于解特征值问题的。第二章是三、四、五章的基础。实际上, 第三章讨论了代数特征值问题的一般性问题, 而第四章定性的研究了特征解的性质。在第四章中给出了瑞利原理、极大-极小原理和蕴含原理等一些非常有效和广泛应用的原理。在第五章中, 重点从定性分析转到定量分析。并主要研究代数特征值问题的算法, 包括最新的代数特征值问题的算法。第六章讨论了在任意激振下离散系统的响应问题。给出由线性理论求解联立常微分方程组的各种方法。我们希望任意激振下的响应能在数值计算机上模拟, 为此, 本章还介绍了运动方程的时间离散化概念。在第七章中着重研究连续参数系统的振动。讨论振动问题的精确解并且给出一种经典的表达式, 目的之一在于给出一大类连续参数系统(即自伴系统的振动问题)的解所共有的重要性质, 不管其解用已知函数可否推导, 这些性质都可获得。第八章指出, 解的这些性质在求近似解中起主要作用。在第八章所讨论的近似方法中, 瑞利-里兹法在结构动力学中占有特殊的地位。第九

章指出，有限元素法本身实际上可以认为是一种瑞利-里兹法。必须注意，第八章和第九章讨论的方法本质上是离散化过程。复杂结构要求复杂的数学模型，在数学模拟的意义上它意味着要用大量的微分方程。第十章主要论述降低系统阶数的方法，给出一种子结构综合法，它既可以认为是模拟的方法又可认为是一种缩减方法。在第十一章中进一步列举了子结构综合法中的各种不同的方法。

目 录

第一章 线性代数的基本概念	1
1.1 引言	1
1.2 线性矢量空间	1
1.3 线性相关	4
1.4 矢量空间的基底和维数	5
1.5 内积与正交矢量	7
1.6 格兰姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化过程	9
1.7 矩阵	13
1.8 矩阵的基本运算	15
1.9 行列式	19
1.10 矩阵的求逆	23
1.11 矩阵的分块	25
1.12 线性方程组	27
1.13 矩阵的范数	32
第二章 离散系统的自由振动	34
2.1 引言	34
2.2 系统的运动方程	34
2.3 绕平衡点的微小运动	36
2.4 能量原理	46
2.5 自由振动与特征值问题	48
第三章 特征值问题	59
3.1 概述	59
3.2 一般特征值问题	59
3.3 实对称矩阵的特征值问题	66

3.4	特征值问题的几何解释	73
3.5	埃尔米特 (Hermitian) 矩阵	77
3.6	两个非正定实对称矩阵的特征值问题	80
3.7	实非对称矩阵的特征值问题	82
第四章 特征解的性质		86
4.1	引言	86
4.2	瑞利原理	86
4.3	约束系统的瑞利原理	99
4.4	特征值的极大-极小特性	103
4.5	蕴含原理	105
4.6	埃尔米特矩阵的正定准则	110
4.7	两个埃尔米特矩阵和的特征值	112
4.8	格施戈林 (Gerschgorin) 定理	116
4.9	特征值问题的一阶扰动	119
第五章 特征解的计算方法		129
5.1	概述	129
5.2	高斯消去法	130
5.3	用基本行运算简化成三角形形式	135
5.4	相应于已知特征值的特征矢量计算	141
5.5	运用幂法的矩阵迭代	144
5.6	霍塔林 (Hotelling) 压缩法	150
5.7	威伊兰特 (Wielandt) 压缩法	156
5.8	乔列斯基 (Cholesky) 分解	158
5.9	雅可比 (Jacobi) 法	162
5.10	吉文斯 (Givens) 法	171
5.11	豪斯霍尔德 (Householder) 法	177
5.12	三对角对称矩阵的特征值问题 斯图姆 (Sturm) 定理	184
5.13	QR 方法	191
5.14	乔列斯基 (Cholesky) 算法	203

5.15 三对角矩阵的特征矢量	207
5.16 迭代法	208
第六章 离散系统的响应	216
6.1 引言	216
6.2 线性系统 叠加原理	217
6.3 脉冲响应 卷积积分	219
6.4 离散时间系统	227
6.5 无阻尼非回转系统的响应	235
6.6 无阻尼回转系统的响应	242
6.7 阻尼系统的响应	250
6.8 一般动力学系统的响应	259
6.9 一般动力学系统的离散时间型	264
6.10 在平衡点附近运动的稳定性	266
第七章 连续系统的振动	273
7.1 引言	273
7.2 连续系统的拉格朗日方程 边值问题	274
7.3 特征值问题	285
7.4 自伴系统	289
7.5 非自伴系统	301
7.6 杆、轴和弦的振动	305
7.7 梁的弯曲振动	313
7.8 二维问题	318
7.9 特征值的变分特性	328
7.10 特征值问题的积分公式	334
7.11 响应问题	338
第八章 连续系统的离散化	342
8.1 引言	342
8.2 瑞利-里兹法	343
8.3 假设模态法	359

8.4	加权残数法	361
8.5	悬臂机翼的颤振	375
8.6	加权残数法的积分公式	385
8.7	应用影响系数的集总参数法	388
8.8	求解系统响应的近似法	389
第九章 有限元素法		396
9.1	引言	396
9.2	二阶问题 线性元素	398
9.3	高次元素 插值函数	409
9.4	四阶问题	418
9.5	二维域问题	422
9.6	特征值与特征函数的误差问题	442
9.7	非一致质量矩阵	443
第十章 具有大自由度数目的系统		447
10.1	引言	447
10.2	静态凝聚	448
10.3	质量凝聚	449
10.4	同时迭代	452
10.5	子空间迭代法	457
10.6	截段法	461
第十一章 子结构综合法		465
11.1	概述	465
11.2	分量模态综合法	465
11.3	分支模态分析法	473
11.4	分量模态置换法	477
11.5	子结构综合法	485
参考文献		494
习题		500

第一章 线性代数的基本概念

1.1 引言

我们知道，线性离散系统的振动取决于线性常微分方程组，通过线性变换使其成为独立的方程组便可容易地获得方程的解。探索这种线性变换的目的，在于如何把联立微分方程组的求解变为联立代数方程组的求解问题。后者称为特征值问题，它是线性代数的一个重要问题。因此，有必要对线性代数中某些有关概念作简要的讨论。特别是矢量空间以及与其密切相关的问题，例如行列式和矩阵等。这些讨论对我们是十分有益的。

1.2 线性矢量空间

在讨论矢量空间时，为了方便，引进域的概念。我们把域定义为具有某种代数性质的标量的集合。因此，实数构成一个域，复数也构成一个域。

我们研究这样一些元素的集合 F ，使得在 F 上的任何两个元素 α 和 β 都能用来定义另外两个属于 F 的唯一元素：其一记为 $\alpha + \beta$ ，称为 α 与 β 的和；其二以 $\alpha\beta$ 表示，称为 α 与 β 的积。如果这两种运算满足下列五个必要条件，则集合 F 称为域。

1. 交换律 对于 F 上的所有 α 和 β ，有

$$(1) \alpha + \beta = \beta + \alpha; \quad (2) \alpha\beta = \beta\alpha.$$

2. 结合律 对于 F 上的所有 α ， β 和 γ ，有

$$(1) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

$$(2) (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

3. 分配律 对于 F 上的所有 α 、 β 和 γ ，有

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

4. 恒等元素 在 F 上存在有元素 0 和 1 ($0 \neq 1$)，它们分别称为零元素和恒等元素。对于 F 上的所有 α ，有

$$(1) \alpha + 0 = \alpha; (2) 1\alpha = \alpha.$$

5. 逆元素

(1) 对于 F 上的每个元素 α ，存在唯一的一个所谓 α 的加法逆元素记作 $-\alpha$ ，且 $\alpha + (-\alpha) = 0$ 。

(2) 对于 F 上的每个元素 α ($\alpha \neq 0$)，存在唯一的一个所谓 α 的乘法逆元素记作 α^{-1} ，且 $\alpha\alpha^{-1} = 1$ 。很明显，所有实数的集合满足上述五个必要条件。

下面，我们讨论线性矢量空间的概念。线性矢量空间也称线性空间和矢量空间。令 L 是元素为矢量的集合，而 F 是一个标量域。如果 L 和 F 是按照矢量加法和标量乘法这两种运算来定义的，则矢量集和这两个运算一起称为在 F 域上的矢量空间 L 。对于 L 中的每两个元素 x 和 y ，它满足必要条件：

$$1. \text{ 加法交换律 } x + y = y + x;$$

$$2. \text{ 加法结合律 } (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$3. \text{ 在 } L \text{ 中存在一个唯一的矢量 } 0, \text{ 使得 } x + 0 = 0 + x = x;$$

$$4. \text{ 对于 } L \text{ 中每个矢量 } x, \text{ 存在一个唯一的矢量 } -x, \text{ 使得 } x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

因此，矢量加法的规则与普通代数相似。此外，对于 L 中任何矢量 x 和 F 上任何标量 α 可确定一个唯一的标量积 αx ，它

也是 L 中的一个元素。标量乘法必须使 F 上所有的 α 与 β 和 L 中所有的 x 与 y 满足下列必要条件:

5. 乘法结合律 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ 。

6. 乘法分配律 (1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;

(2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ 。

7. $1x = x$, 其中 1 为单位标量, 而 $0x = 0$ 。我们对 n 维矢量空间 L 特别感兴趣。所谓 n 维矢量空间, 就是这个空间的矢量包含 F 域上 n 个元素。下面写出 L 中的任何两个这样的矢量:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

并称它们为 n 维矢量。所有 n 维矢量的集称为矢量空间 L^n 。另外, 这两个矢量的加法定义为

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots\dots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

如果 α 为 F 上的一个标量, 则标量和矢量的积定义为

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots\dots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

令 S 为矢量空间 L 的一个子集, 如果下列条件成立, 则 S 为 L 的子空间:

1. 如 x 和 y 在 S 中, 则 $x+y$ 也在 S 中;
2. 如 x 在 S 中而 α 在 F 上, 则 αx 也在 S 中。

1.3 线性相关

我们观察线性空间 L 中矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的集合和域 F 上标量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的集合, 则由式

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (1.4)$$

给出的矢量 x 为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性组合。如果关系式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (1.5)$$

只有在平凡解的情况, 即只有在系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 都等于零时才满足, 则称矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为线性无关。假定满足关系式 (1.5) 且系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 至少有一个不等于零, 则称矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为线性相关, 并意味着任一个矢量是其余 $n-1$ 个矢量的线性组合。

如果 L 包含有所有矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性组合, 则 L 的子空间 S 称为矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 生成的子空间。如 $S = L$, 则 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 认为是生成 L 的矢量。

例1.1 已知三维空间中两个独立的矢量:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

所有 x_1 和 x_2 的线性组合的集合均构成一个平面, 该平面通过原点以及 x_1 和 x_2 的端点。由于 x_3 落在 x_1 和 x_2 所构成的平面内, 所以三个矢量

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (b)$$

构成同样的平面, 因此三个矢量为线性相关。容易证明,

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad (c)$$

因此, x_3 实际上就是 x_1 和 x_2 (图 1.1) 的线性组合。

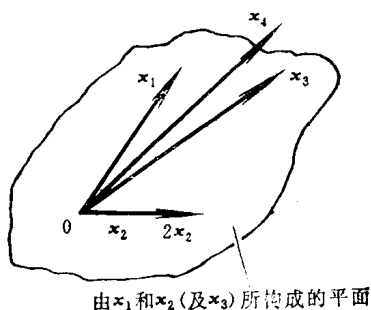


图 1.1

反之, 三个矢量

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (d)$$

因为对不等于平凡解的所有情况有

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 \neq 0 \quad (e)$$

所以这三个矢量是线性无关的。这三个矢量构成一个三维空间。

1.4 向量空间的基底和维数

如果存在生成 L 的矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的有限个集合, 且 L 中的任意矢量是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性组合, 则称域 F 上的矢量空间 L 为有限维的。

令 L 是域 F 上的矢量空间, 则生成 L 的矢量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的集合称为 L 的生成系统, 如 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是线性无关并且生成 L , 则该生成系统称为 L 的一个基底。

如果 L 为一个有限维矢量空间, 对于 L 的任何两个基底

包括有同样数目的矢量，则该基底可以认为是坐标系统概念的推广。

令 L 为域 F 上的有限维矢量空间， L 的维数就是指 L 上的任何一个基底的矢量数，这个整数用 $\dim L$ 表示。例如矢量空间 L^n 表示由 n 个线性无关的矢量生成的，因此 $\dim L^n = n$ 。

研究在 L^n 中任意一个具有分量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 维矢量 x ，并引入一个 n 维矢量集合：

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

矢量 x 可用矢量 e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示，即

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (1.7)$$

由此得出 L^n 是由矢量 e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的集合所生成的，因此矢量 e_i 构成了 L^n 的生成系统。矢量 e_i 的集合可以证明是线性无关的，而且通常称它们为 L^n 的标准基底。

例1.2 例题 1.1 中的矢量 x_1, x_2 和 x_4 生成一个三维矢量空间的基底。在 L^3 中任何一个矢量 x 只可唯一地写成 x_1, x_2 和 x_4 的线性组合。例如，可以证明矢量

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (a)$$

表示成下列形式：

$$x = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \quad (b)$$

同一个矢量 x 也可按照 L^3 标准基底 e_1, e_2, e_3 来表示。事实上可容易得到，

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad (\text{c})$$

1.5 内积与正交矢量

对于二维和三维空间中的一些概念，例如矢量的长度和正交性，它们均可推广到 n 维空间。这样就要引进附加的定义。

令 L^n 为一个在标量域 F 上的 n 维矢量空间，如果在 L^n 中的每一对矢量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ ，由域 F 唯一地对应于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 内积的标量所确定，则称 L^n 为内积空间。该矢量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 也可以是复数，在这种情况下用 $\bar{\mathbf{x}}$ 和 $\bar{\mathbf{y}}$ 表示其复共轭，用 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示内积，而且必须满足下列必要条件：

1. 对于在 L^n 中的所有 $\mathbf{x}$ 有 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ，并且，只有当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时才有 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ；
2. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ ；
3. 在 F 上所有的 λ 有 $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，而且 $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda^{\ominus}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ；
4. 对于在 L^n 中的所有 $\mathbf{x}$ ， $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 有 $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 。

复内积一般定义为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n. \quad (1.8)$$

它表示一个复数，定义在复数域上的内积空间称为酉空间。

当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为实矢量时，方程 (1.8) 简化为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \quad (1.9)$$

它定义为实内积，是一个实数。在实标量域上的有限维内积空间称为欧几里德 (Euclidean) 空间。

⊖ 原文误写成 $\bar{\lambda}$ 。——译者