高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学习题全解

[上 册]

同济·高等数学(三、四版)

陈小柱　陈敬佳/编 著

GAODENG SHUXUE XITI QUANJIE

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学习题全解

（上册）

同济高等数学（三版、四版）

陈小柱　陈敬佳　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解(上、下册)/陈小柱,陈敬佳编著.—大连:大连理工大学出版社,2002.8

高等学校数学学习辅导教材

ISBN 7-5611-1990-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②陈… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047405 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 字数:382 千字 印张:12
印数:1—10000 册
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:杜 娟
封面设计:王福刚

定价:25.00 元(上册 12.50)

卷首赠言

著名教育家钱令希院士指出:“学习如同在硬木头上钻螺丝钉,开头先要搞正方向,锤它几下,然后拧起来就顺利了。否则钉子站得不稳不正,拧起来必然歪歪扭扭,连劲也使不上。求学之道慎起步啊!”

——摘自《中国科学院院士自述》

著名数学家北京大学教授姜伯驹院士指出:“高等数学最重要的概念是什么,有相当一部分同志对这个问题看法是:高等数学这个课程中最重要、最基本的概念是极限,我不是太赞成这个看法”,“你要说高等数学,那首先是微分、积分这些概念弄清楚,并且会用,我觉得高等数学的重点首先应该是这个”。

——摘自《数学的实践与认识》1997.4

前言

高等数学课的重要性是众所周知的。在高等数学的教学过程中，正面临着一个**无法回避却日益突出**的**矛盾**：一方面，高等数学课的学时普遍减少，另一方面，期末考试、后续专业课程及考研对学生学习这门课又有较高的要求。

正是为了解决这一问题，我们编写了这本具有工具书性质的《高等数学习题全解》(上、下册)。

对于想更进一步学好高等数学这门课程的学生是大有益处的。

由于同济四版教材只对三版教材每章末增加了总习题，其他习题基本上沿用了第三版，故本书既适合第三版的读者，也适合第四版的读者。每道题我们都选用了较好的解题思路，但限于篇幅，一题多解的工作只好留给读者。

为了给尽可能多的读者提供便利，本书三部分分别是：同济大学主编《高等数学》(上、下册)第三版、第四版习题全解、第四版第一章～十二章总习题全解及考研资料。

每章又分三部分：导学、本章知识结构、习题全解。“导学”不同于一般的“内容提要”或“本章小结”。“导学”呈献给读者的是教学实践中的“抑扬顿挫”，“起承转合”和“弦外之音”。我们渴望初学者学得更轻松。

本书由姜乃斌教授担任主审，参加审稿的有刘晓东教授及王志平副教授。

限于编者水平，加之时间仓促，不妥之处一定存在，希望广大读者提出批评和指正。

编　者

2002年4月

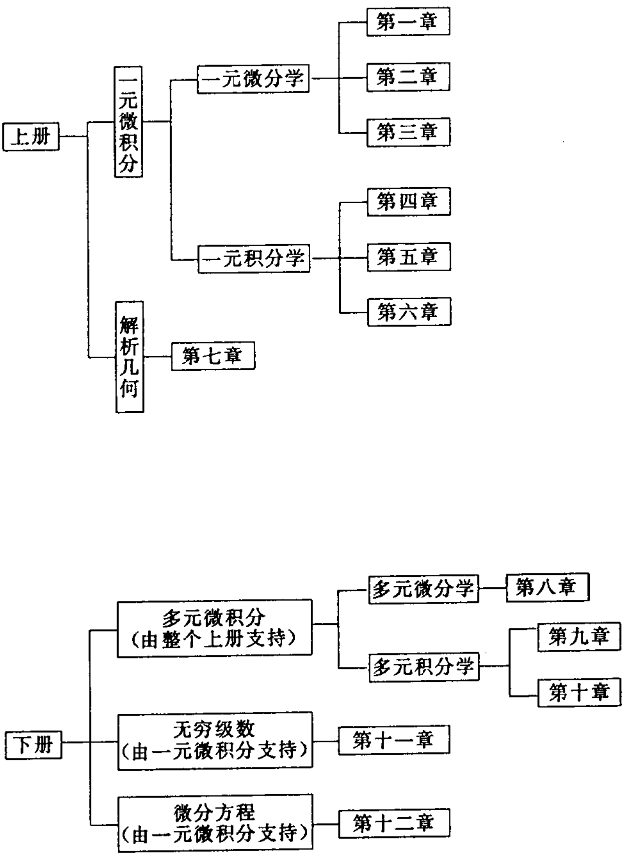
目 录

第二部分

第三部分*

* 关于全部历届考研数学真题及其分类全解(含理工类:数学一、数学二;经济类:数学三、数学四)和由科学研究而划分出的通用教材中的考研命题敏感区,请参阅大连理工大学出版社《考研数学真题全解及考点分析》系列教材。

全课程知识框架


上册
一元微积分
一元微分学
第一章
第二章
第三章
一元积分学
第四章
第五章
第六章
解析几何
第七章
下册
多元微积分
（由整个上册支持）
多元微分学
第八章
多元积分学
第九章
第十章
无穷级数
（由一元微积分支持）
第十一章
微分方程
（由一元微积分支持）
第十二章

第一章　函数与极限

万丈高楼平地起，打好基础最要紧。

——陈景润

一、导　学*

超越高考，新同学登上了新高度。大学是人生的基础。

本章是全课程的开端。学习第一节和第二节是对中学数学的复习、巩固和提高。第一次课下来，几十页书要消化。大学阶段的学习与中学阶段有了显著的不同，探索出适合于自己的学习方法，迫在眉睫！

教材难度陡增于第三节和第四节：用 ε-N 和 ε-δ 语言定义的极限，是全课程最难的知识点，相当重要。自牛顿(1665 年，23 岁)与莱布尼兹各自独立地发现了微积分以来的数百年间，美妙的"微积分音符"早已"鸣奏"于浩如烟海的科技典籍中。早期，人们怀疑微积分自身的严密性，未来的新兴学科仍需借助这一工具进行表述。

极限是整个高等数学大厦的基石：连续，导数，定积分，偏导数，重积分，曲线积分，曲面积分和无穷级数等等，均建立在极限定义的基础上。而用 ε-N 和 ε-δ 定义的极限十分严密，从而消除了人们的疑虑。

ε-N 和 ε-δ 语言是锤炼思维严密性的绝佳范例，但不可能被"轻而易举"地理解！

经验表明：许多初学者在这里被拒之门外，从而动摇了学好这门重要课程的自信心。

向初学者进言：对于一些同学，一时理解不透极限的定义，可以暂时搁置，跟上课程进度，通过后面的学习再回过头来体会；对于能透彻理解极限定义的同学，不要松劲，本课程入门的标志是第二章的"初等函数求导"！

教材得出"基本初等函数在它们的定义域内都是连续的"这一结论的过程，

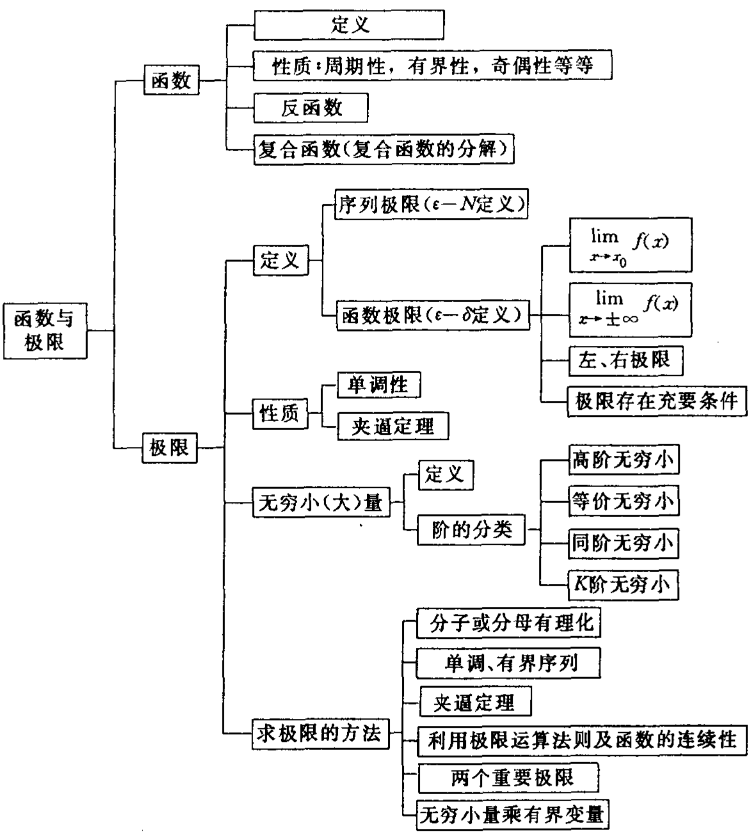
* 精读"导学"，再回到教材中；在阅读教材时，又多回想"导学"，多次反复，效果更佳。

是发人深思的。先解决**有限个**基本初等函数的连续性，再解决四则运算与连续的关系、复合运算与连续的关系，最后得出**无限个**初等函数的连续性。这种“有限个⇒无限个”的思路，在导数、不定积分、定积分以及后面章节，百用不厌。层层递进，简单明了，框架结实无比！一种整体的逻辑力量跃然纸上。

宁慢勿贪，反复斟酌课本（一课之本）中的内容，要“吃透”，抓住本质；要善于总结，抓住大的知识构架。把握好看书、听课、做题三者的关系，要跟上进度，切忌掉队。

把金榜题名的喜悦心情，化为脚踏实地的理智行动，快把心收回来！

二、本章知识结构



三、习题全解

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$；(2) $x\geqslant 0$(3)；$x^2<9$；(4) $|x-3|\leqslant 4$

解 (1) $(2,6]$；(2) $[0,+\infty)$；(3) $(-3,3)$；(4) $[-1,7]$

2. 求函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

的定义域和值域。

解 定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$[-1,1]$

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

解 (1)不同。因为两者定义域不同。

(2)不同。因为两者对应法则不同，$x<0$ 时，$g(x)=-x$

(3)相同。因为两者定义域、对应法则均相同。

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}$

(5) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(6) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(8) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

解 (1) $1-x\neq 0, x\neq 1$　定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(2) $3x+2\geqslant 0, x\geqslant -\dfrac{2}{3}$　定义域为 $[-\dfrac{2}{3},+\infty)$

(3) $1-x^2\neq 0, x\neq\pm 1$　定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(4) $x^2-4\geqslant 0, |x|\geqslant 2$　定义域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(5) 由于 $1-x^2$ 为分母且 $x+2$ 要开平方，要求：$1-x^2\neq 0$　且　$x+2\geqslant 0$

即 $x\neq\pm 1$ 且 $x\geqslant -2$　定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(6) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 即 $x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$　定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$

(7) $4-x^2>0, |x|<2$　定义域为$(-2,2)$

(8) $x^2-3x+2\neq 0, x\neq 1$ 且 $x\neq 2$

定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

5. 用描点法作出函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图形。

解　(略)。

6. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{1}{a}), f(x_0), f(x_0+h)$

解　$f(0)=\sqrt{4+0}=2$　　　$f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$

$$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$f(\frac{1}{a})=\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}$$

$$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2}, f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$$

7. 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f(\frac{1}{t})$

证明：$f(\frac{1}{t})=2(\frac{1}{t})^2+\frac{2}{(\frac{1}{t})^2}+\frac{5}{\frac{1}{t}}+5\,\frac{1}{t}$

$$=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

8. 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{\pi}{6}),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(-\frac{\pi}{4}),\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的函形。

解　$\because\ |x|=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，$\therefore\ \varphi(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$，同理 $\varphi(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2},\varphi(-2)=0$$

综合：$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{3}\\ -\sin x, & -\frac{\pi}{3}<x<0\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$

$y=\varphi(x)$的图形为

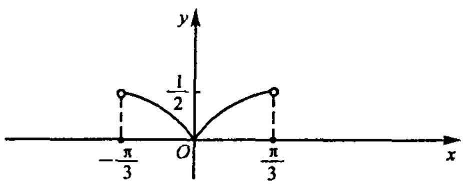


图 1-1

9. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

解　(1)$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$

$f(x)$为偶函数；

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$且$\neq -f(x)$

$f(x)$既非奇函数又非偶函数；

(3) $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$

$f(x)$为偶函数；

(4)$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$

$f(x)$为奇函数；

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$且$\neq -f(x)$

$f(x)$既非奇函数又非偶函数；

(6) $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}=f(x)$

$f(x)$为偶函数。

10. 设$f(x)=2x^2+6x-3$，求$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及$\Psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出$\varphi(x)$及$\Psi(x)$中哪个是奇函数？哪个是偶函数？

解　$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\varphi(x)$，计算可得

$\varphi(x)=2x^2-3$，$\therefore$ $\varphi(x)$是偶函数；

同理$\Psi(x)=6x$是奇函数。

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间$(-l,l)$上的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数，偶函数与奇函数的积是奇函数；

(3)定义在对称区间$(-l,l)$上任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证明　(1)设$f_1(x)$，$f_2(x)$均为偶函数，则$f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$，令

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

用$-x$替换x，得

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$$

故$F(x)$为偶函数。

设$g_1(x)$，$g_2(x)$均为奇函数，则$g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$，令

$$G(x)=g_1(x)+g_2(x)$$

用$-x$替换x，得

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$$

故$G(x)$为奇函数。

(2)设$f_1(x)$，$f_2(x)$均为偶函数，则$f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$，令

$$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

用$-x$替换x，得　$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x)$

故$F(x)$为偶函数。

设$g_1(x)$，$g_2(x)$为奇函数，则$g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$

令 $$G(x)=g_1(x)g_2(x)$$

用 $-x$ 替换 x,得

$$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x)$$

故 $G(x)$ 为偶函数。

设 $f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,则 $f(-x)=f(x)$,$g(-x)=-g(x)$,令

$$H(x)=f(x)g(x)$$

用 $-x$ 替换 x,得

$$H(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x)$$

故 $H(x)$ 为奇函数。

(3)设 $f(x)$ 为定义于 $(-l,l)$ 上的任意一个函数,构造函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

因为 $$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$$

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数。

令 $$\Psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

因为 $$\Psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\Psi(x)$$

所以 $\Psi(x)$ 为奇函数。

又因为 $$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\Psi(x)$$

所以 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和。

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=x^2$, $(-1,0)$;

(2) $y=\lg x$, $(0,+\infty)$;

(3) $y=\sin x$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

解 (1)$\forall\ x_1,x_2\in(-1,0)$ 且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$