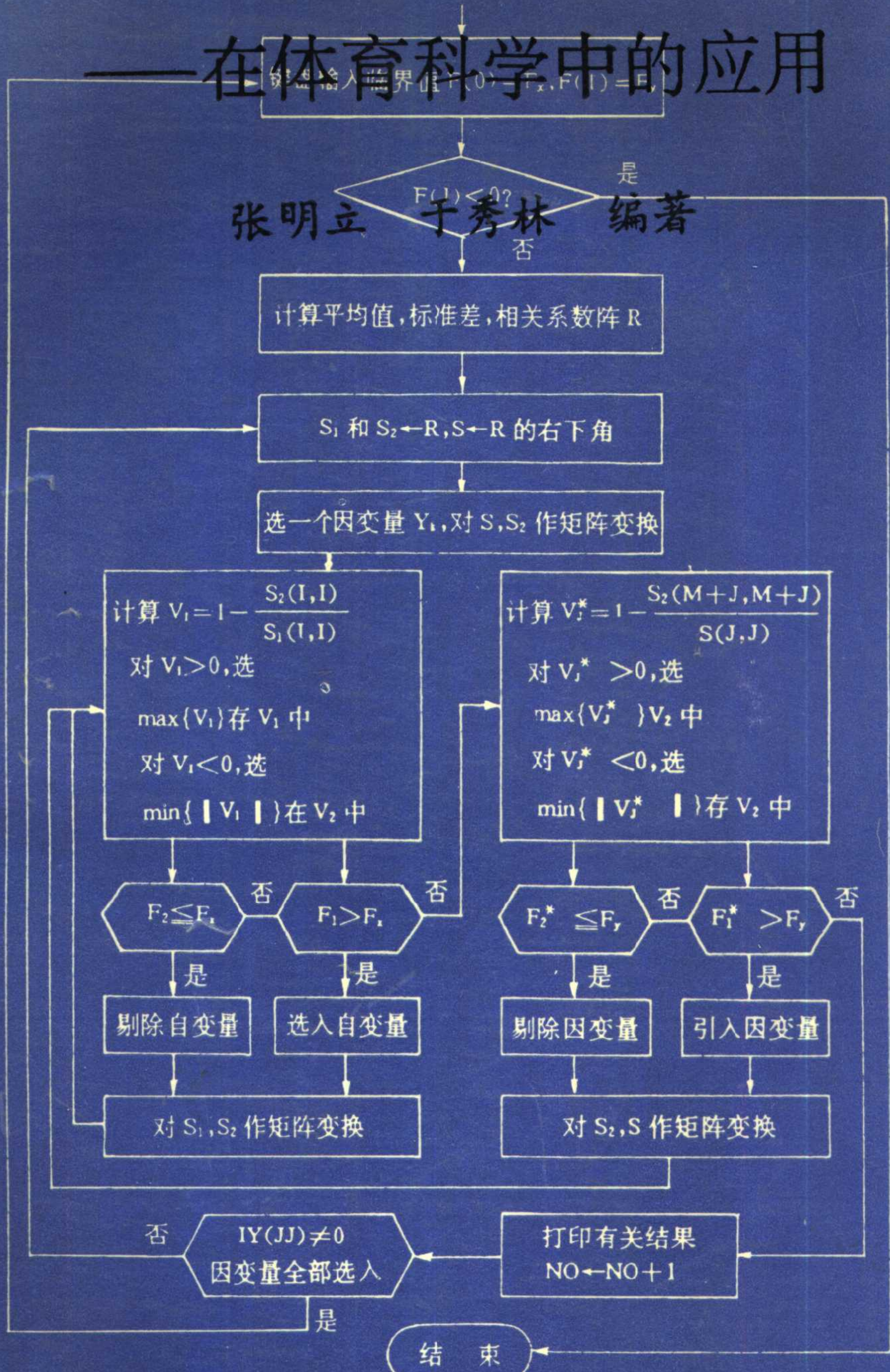
多元统计分析方法及程序

——在体育科学中的应用

张明立 于秀林 编著



北京体育学院出版社

多元统计分析方法及程序

——在体育科学中的应用

张明立　于秀林　编著

北京体育学院出版社

责任编辑
封面设计 叶莱

多元统计分析方法及程序

——在体育科学中的应用

张明立　于秀林编著

北京体育学院出版社出版发行　　新华书店总店北京发行所经销
（北京西郊圆明园东路）　　北京市顺义县小店印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/16　印张：14.75 定价：4.25元(压膜装)
1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷　印数：2000册
ISBN 7—81003—454—5/G·345
（凡购买本版图书因装订质量不合格本社发行部负责调换）

内容简介

本教材主要介绍多元统计分析方法，这些方法是：回归分析、判别分析、聚类分析、主成分分析、因子分析、对应分析、典型相关分析等。为了便于读者使用，对每个方法都给出了 BASIC 程序。本书是针对体育专业而编，故所举实例都是体育科学方面的，但无疑这些方法和程序在地质、气象、环境、医学、生物、经济等各个领域也都有广泛的应用。

为了更好地掌握这些方法和程序，我们对每个方法的数学原理作了简要的论述。本书是体育专业研究生和生物学科本科生专用教材，也适合于实际工作者使用，或作为体育科技工作者以及大专院校有关专业的学生学习多元统计分析的教材或参考书。

序　言

多元统计分析是数理统计中在理论和方法这两方面都很活跃的一个分支。由于实际工作中很少只是处理一个单一的指标，因此在某种意义上说，多元统计分析是应用面最广泛的统计方法。在我国，气象部门在60年代就已经开始使用了，地质部门在70年代初期开始注意这一方法，几年之后，就形成了一支拥有相当数量人员的队伍。在体育方面，尽管在国际上，早在70年代、甚至60年代就已经有人使用这些方法来分析过去的资料、提出较科学的训练计划，……等等；在我国，真正将这些方法用于体育训练、分析资料，还是在70年代末，80年代初的时候，起步是比较晚的。这几年来，由于体育运动的迅猛发展、迫切要求在训练、科研、管理等方面提高理论水平，要求从经验的、定性的、感性的、直觉的状态下摆脱出来，向科学的、定量的、有理论指导的、能进行分析的、自觉的状态过渡。广大的体育工作者认识到数理统计方法是一个很好的工具，特别是多元统计分析，更是可以科学地综合分析许多资料的方法。

很明显，多元统计分析是不易学会的，它要求学习的人具有较好的高等数学的训练，特别是线性代数的知识，也就是说，它的“门槛”比较高。然而，实践证明，不少体育工作者通过自学，也已经掌握了不少方法，并能解决一些实际的课题，这就告诉我们，这个困难也不是无法克服的。当然，如果能有一本适合体育工作者一般的数学水平、又能介绍各种常用的多元统计方法的教材，对于减少这一困难是很有帮助的。张明立、于秀林两位同志合写的这本书正是适应这一要求而编著的。

这本书系统地介绍了多元统计分析中的一些常用的方法，如回归分析、判别分析、因子分析、典型相关分析……等。不仅介绍了有关的统计方法，并且还尽可能地给出体育方面的实例，还给出计算的程序，对于真正想解决实际问题的人来说，这些都是必需的，而往往在一般的教材中是不写的。这本书是在作者们对体育统计工作者培训时编写的讲义上，再加工修改而成的，是经过了实际教学的考验、被学员所肯定的教材。可以期望，这本书的出版会很好地促进体育统计的发展。无论如何，这还是第一本结合体育工作编写的多元统计分析的书，希望随着体育科研事业的发展，将来会出版这一类型的第二本、第三本教材……。万事开头难，我衷心祝愿这一本书能受到广大体育工作者的欢迎。

张尧庭

1986年2月

前　言

多元统计分析是研究多个变量(指标或因素)之间关系的一种数理统计方法。近 20 多年来,随着电子计算机的发展,多元统计分析方法很快地应用到各个领域。特别是近几年来,多元统计分析方法也逐渐地应用于体育科学领域,并取得了一定的成绩。目前许多体育工作者希望能够结合体育中的实际问题，介绍一些多元统计分析方法。正是为了适应这种需要而编写了这本教材。

全书共分十章,第一章向量和矩阵;第二章基本概念，这两章是为学习多元统计分析方法而设的预备知识,所以只给出结论而不进行证明。第三章多对一回归分析;第四章多对多回归分析;第五章判别分析;第六章聚类分析;第七章主成分分析；第八章因子分析;第九章对应分析;第十章典型相关分析。以上各章重点介绍了方法的具体应用,并对各种方法作了简要的理论说明,目的是使开课的研究生和本科生从中学习到一些相应的理论,便于更好地掌握和使用各种方法,同时,也可作为其它高等院校研究生和高年级学生学习多元统计分析方法的教材或参考书。

在编写时,我们力求结合体育实际中的问题,深入浅出地介绍多元统计分析方法，为使用方便,对各种方法给出了 BASIC 程序。特别是双重筛选逐步回归分析程序，目前在其它书上我们尚未见到过,而这个程序的应用却是非常广泛的。

在本书的编写过程中,参阅了有关的书籍和论文,并引用了其中的一些材料，特别是得到了武汉大学张尧庭教授的热情关怀和大力支持，并为本书写了序言，在此，我们表示衷心的感谢。

本书第一章、第三章、第五章、第六章、第七章由张明立同志编写;第二章、第四章、第八章、第九章、第十章及各章的理论说明和程序由于秀林同志编写。 原稿是 1986 年使用的讲义,这次出版前,又作了补充和修改。

由于我们的水平有限,实践经验不足,以及编写时间仓促,书中存在不少缺点和错误,敬请读者批评指正。

编著者

1990 年 12 月于北京

目　录

第一章　向量和矩阵……………………………………………………（1）
　第一节　向量……………………………………………………………（1）
　第二节　矩阵……………………………………………………………（3）
第二章　基本概念、参数估计与检验……………………………………（9）
　第一节　常用的基本概念………………………………………………（9）
　第二节　多元正态分布…………………………………………………（10）
　第三节　均值向量与协方差矩阵的估计与检验………………………（11）
第三章　多对一回归分析………………………………………………（14）
　第一节　多对一回归分析………………………………………………（14）
　第二节　多对一逐步回归分析…………………………………………（37）
　第三节　框图及程序……………………………………………………（54）
第四章　多对多回归分析………………………………………………（61）
　第一节　多对多回归分析………………………………………………（61）
　第二节　多对多双重筛选逐步回归分析………………………………（65）
　第三节　框图及程序……………………………………………………（70）
第五章　判别分析………………………………………………………（83）
　第一节　什么是判别分析………………………………………………（83）
　第二节　判别分析方法及实例…………………………………………（83）
　第三节　理论说明………………………………………………………（102）
　第四节　框图及程序……………………………………………………（105）
第六章　聚类分析………………………………………………………（113）
　第一节　什么是聚类分析………………………………………………（113）
　第二节　距离和相似系数………………………………………………（114）
　第三节　数据变换方法…………………………………………………（118）
　第四节　系统聚类法……………………………………………………（119）
　第五节　理论说明………………………………………………………（130）
　第六节　框图及程序……………………………………………………（131）
第七章　主成份分析……………………………………………………（148）
　第一节　主成份分析及其数学模型……………………………………（148）
　第二节　主成份分析的计算步骤及实例………………………………（150）

第三节　理论说明……………………………………………………………………(152)
第四节　框图及程序……………………………………………………………………(157)
第八章　因子分析……………………………………………………………………(162)
第一节　因子分析及其数学模型……………………………………………………(162)
第二节　因子分析的计算步骤及实例………………………………………………(164)
第三节　理论说明……………………………………………………………………(171)
第四节　框图及程序…………………………………………………………………(174)
第九章　对应分析……………………………………………………………………(187)
第一节　什么是对应分析……………………………………………………………(187)
第二节　对应分析的计算步骤及实例………………………………………………(187)
第三节　理论说明……………………………………………………………………(193)
第四节　框图及程序…………………………………………………………………(196)
第十章　典型相关分析………………………………………………………………(202)
第一节　什么是典型相关分析………………………………………………………(202)
第二节　典型相关分析的计算步骤及实例…………………………………………(202)
第三节　理论说明……………………………………………………………………(207)
第四节　框图及程序…………………………………………………………………(211)
附表：
附表1　F分布表 ……………………………………………………………………(223)
附表2　χ^2 分布表………………………………………………………………(229)
参考文献………………………………………………………………………………(229)

第一章　向量和矩阵

多元统计分析是运用数理统计方法来研究多个随机变量(即随机向量)统计规律的一门数学分支。它解决问题的方法和一元统计分析相类似，只不过此时是将一个变量代之一个向量而已。因此研究多元统计分析时，向量和矩阵是不可缺少的基础知识。针对本书的需要，第一章先给出必要的预备知识——向量和矩阵。本章内容是为复习有关的知识而设的，所以只给出结论而不进行证明。熟悉这些内容的读者可以从第二章看起。但复习好第一章的内容将给以后各章的阅读带来方便。

第一节　向　　量

一、向量的定义

具有一定方向和一定数值的一组有顺序的量，称为向量。记为:

$$X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_P\end{bmatrix}=[X_1,X_2,\cdots,X_P]'$$

或称X为P维向量。其中数值 $X_1,X_2\cdots,X_P$ 称为这个向量的分量。若各分量全是0，则称为零向量，记为:

$$0=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=[0,0,\cdots,0]'$$

一个P维横向量称为向量X的转置向量。记为:

$$X'=[X_1,X_2,\cdots,X_P]。$$

一个向量X的长度称为向量的模，记为:

$$|X|=\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_P^2}\ \text{或记为}\ \|X\|$$

二、向量的运算法则

1. 向量加法

设
$$X=[X_1,X_2,\cdots,X_P]'$$
$$Y=[y_1,y_2,\cdots,y_P]'$$

称
$$X+Y=[X_1+Y_1,X_2+Y_2,\cdots,X_P+Y_P]'$$

为向量 X 与 Y 之和，显然它满足交换律和结合律，即:

(1) $X+Y=Y+X$

(2) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$, $Z=[Z_1, Z_2, \cdots, Z_p]'$

2. 数与向量相乘

设 a 是一个常数

称
$$aX=[aX_1, aX_2, \cdots, aX_p]'$$
为数与向量的相乘，显然它满足分配律，即对于常数 a, b 有:

(1) $(a+b)X=aX+bX$

(2) $a(X+Y)=aX+bY$

(3) $a(bX)=b(aX)=(ab)X$

3. 向量的数量积

称 $X \cdot Y=|X||Y|\cos(X, Y)$ 为向量 X 与 Y 的数量积，显然它满足交换、结合律与分配律，即:

(1) $X \cdot Y=Y \cdot X$

(2) $(X \cdot Y)a=X \cdot (Ya)$

(3) $(X+Y) \cdot Z=X \cdot Z+Y \cdot Z$

两向量的数量积的坐标表示法是:

若 $X=[X_1, X_2\cdots, X_p]'$ $Y=[Y_1, Y_2\cdots Y_p]'$

则
$$X \cdot Y=X_1Y_1+X_2Y_2+\cdots+X_pY_p$$

4. 向量的投影

向量 Y 在向量 $X(X \neq 0)$ 上的投影记为 $P_{rjX}Y$
$$P_{rjX}Y=|Y|\cos(X, Y)$$

三、线性相关与线性无关、向量空间

1. 线性相关与线性无关

将全体 P 维向量的集合记为 V^P，当 P 维向量的全部分量是实数时，则 $V^P=R^P$。在 V^P 中，如果存在不全为 0 的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，使向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 满足下式:
$$C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_m\alpha_m=0$$
则称向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为线性相关的，反之，如果只有当 $C_1=C_2=\cdots=C_m=0$ 时，上式才成立，则称向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的。

2. 向量空间

若向量集合 V 具有数域 F(F 中的数记为 $a, b, c, \cdots$) 且满足下列运算，则称 V 为向量空间。

(1) $X+Y=Y+X$

(2) $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$

(3) 对一切 X，有 $X+0=X$

(4) 对于给定的 X，存在对应的 θ，使 $X+\theta=0$;

(5) $C(X+Y)=CX+CY$

(6) $(C_1+C_2)X=C_1X+C_2X$

(7) $C_1(C_2X)=(C_1C_2)X$

(8) $eX=X$，(e 为 F 中的单位元)。

其中，X、Y、Z、θ、0 属于 V；C_1，C_2 属于 F。

第二节　矩　　阵

一、矩阵的定义

将 $p\times q$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,q)$ 排列成 p 行 q 列的有序阵表 A：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

称表 A 为矩阵，也称为 $p\times q$ 阶矩阵，数 a_{ij} 称为矩阵的元素。通常用大写英文字母 A，B，$C\cdots$表示矩阵，一般简写为：$A=[a_{ij}]$ 或 $\underset{(p\times q)}{A}=[a_{ij}]$ 或 $A=[a_{ij}]_{p\times q}$。

当 $p=q$ 时，称 A 为方阵。p 维向量也可以看成是一个 $p\times 1$ 阶矩阵。同样阶数的两个矩阵中，对应的元素都相等，则称两矩阵是相等的。如果 $A=[a_{ij}]$ 中的元素全部是零，则称 A 为零矩阵，用粗体 0 表示。

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

作矩阵。

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1q}+b_{1q} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2q}+b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & & a_{pq}+b_{pq} \end{bmatrix}$$

则称矩阵 C 为 A 与 B 之和，记作 $C=A+B$。

需注意：只有行数相同、列数也相同的矩阵才能相加。

类似地，可以定义两矩阵相减。

2. 矩阵与数的乘法

设数 λ，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & & a_{pq} \end{bmatrix},$$

则称矩阵

$$D=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1q}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2q}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \lambda a_{p1} & \lambda a_{p2} & \cdots & \lambda a_{pq}\end{bmatrix}$$

为数 λ 与矩阵 A 的乘积。

显然矩阵的加法及矩阵与数的乘法满足下列等式:

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $A+(-1)A=0$

(4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

(6) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

其中 λ、μ 为数，A、B、C 都是 $p\times q$ 矩阵。

3. 矩阵的乘法

矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时，两矩阵才能相乘，其积仍是一个矩阵。

设

$$\underset{(p\times q)}{A}=[a_{ij}],\ \underset{(q\times r)}{B}=[b_{jk}]$$

则

$$AB=\underset{(p\times r)}{C}=[C_{ik}]$$

其中，

$$C_{ik}=\sum_{j=1}^{q}a_{ij}\cdot b_{jk},\ (i=1,2,\cdots,p;\ k=1,2,\cdots,r)$$

显然，在一般情况下，

$$AB\neq BA$$

但有(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $A(B+C)=AB+AC$

(3) $(A+B)C=AC+BC$

三、转置矩阵

若:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq}\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq}\end{bmatrix}$$

则称 A' 为 A 的转置矩阵

显然,转置矩阵满足下列等式:

(1) $(A')' = A$

(2) $(A+B)' = A' + B'$

(3) $(AB)' = B'A'$

四、对称矩阵

设 $A = [a_{ij}]$ 为 P 阶方阵,若 $a_{ij} = a_{ji}$,则称 A 为对称矩阵。

显然,对称矩阵 A 满足下关系式:

$$A = A'。$$

五、对角矩阵与单位矩阵

设 $A = [a_{ij}]$ 为 P 阶方阵,除对角线以外之元素全为 0,则称此方阵为对角阵。

$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{pp}$ 称为主对角线元素,

当 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{pp} = 1$ 时,称 A 为单位阵,

记为 I,即:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

显然,单位阵满足关系式:

$$IA = AI = A$$

六、正交阵

一个方阵 A,若满足关系式:

$$AA' = A'A = I$$

则称 A 为正交阵。

七、行列式、代数余子式

一个 P 阶方阵 $A = [a_{ij}]$ 对应一个数,记为 $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1, j_2 \cdots j_p} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{pj_p}$$

称 $|A|$ 为 A 的行列式或记为 $\det A$。

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_p}$ 表示对所有 P 元排列求和。$\tau(j_1 j_2 \cdots j_p)$ 表示 $j_1 j_2 \cdots j_p$ 的逆序数。(在一个

排列 $i_1 i_2 \cdots i_t, \cdots, i_s \cdots i_p$ 中，若 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个序数。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数）

不难证明：

$$|A| = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} |M_{ij}|$$

其中，M_{ij} 是在 A 中去掉第 i 行、第 j 列而形成的 $p-1$ 阶方阵。称 $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}。

八、非奇异阵与奇异阵

若 $|A| \neq 0$，则称 A 是非奇异阵（或称为非退化阵）；若 $|A| = 0$，则称 A 为奇异阵（或退化阵）。

九、逆矩阵

若 A 是 P 阶非奇异方阵，唯一地存在矩阵 B 满足关系式

$$BA = AB = I$$

则称 B 为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}。不难证明：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{p1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{p2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{A_{1p}}{|A|} & \frac{A_{2p}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{pp}}{|A|} \end{bmatrix}$$

其中，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

显然，逆矩阵满足下列等式：

(1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(2) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

(3) $|A^{-1}| = (|A|)^{-1}$

若 A 是对称阵，则 A^{-1} 也是对称阵。

十、矩阵的秩与迹

一个矩阵 A 的最大的线性无关的列数称为 A 的秩，记为 $R(A)$。若 $R(A) = r$，则 A 的每 $r+1$ 阶子式必等于零。

一个 P 阶方阵 $A = [a_{ij}]$ 的主对角线上元素之和，称为 A 的迹，记为 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$。

不难验证，矩阵的迹满足下列关系式：

(1) $\operatorname{tr}A = \operatorname{tr}A'$

(2) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}A + \operatorname{tr}B$

(3) $\operatorname{tr}AB = \operatorname{tr}BA$

(4) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$。

十一、二次型与正定矩阵

称表达式：

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} X_i X_j \text{ 为二次型。}$$

其中，$a_{ij} = a_{ji}$ 是实常数，

$X_1, X_2 \cdots, X_p$ 是 P 个实变量。

若 $A = [a_{ij}]$,

$X = [X_1, X_2, \cdots, X_p]'$

则

$$Q = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} X_i X_j = X'AX。$$

若方阵 A 对一切 $X \neq 0$，都有 $X'AX > 0$，则称 A 与其相应的二次型是正定的，若对一切 X，都有 $X'AX \geqslant 0$，则称 A 与二次型是半正定的。

十二、特征值与特征向量

设 A 为 P 阶方阵，满足方程：$|A - \lambda I| = 0$ 的根，称为 A 的特征值(或特征根)，此方程称为特征方程。显然，该方程是 λ 的 P 次方程(这个方程的次数恰好等于方阵 A 的阶数)，故恰好有 P 个根，(可以有重根)。特别若 A 是对角阵时，则对角线元素就是 A 的特征值。

满足方程：$(A - \lambda I)X = 0$ 的非零向量

$$X = [X_1, X_2, \cdots, X_p]'$$

称为 A 关于特征值 λ 的特征向量。

十三、分块矩阵

对于任意一个 $p \times q$ 阶矩阵 A，可以用纵线和横线按某种需要将它们划分成若干块低阶的矩阵，也可以看作是以所分成的子块为元素的矩阵，称为分块矩阵，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

写成

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中，

$$A_{11} = [a_{ij}] \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$$
$$A_{12} = [a_{ij}] \quad (i = 1,2,\cdots m;\ j = n+1,\cdots,q)$$

$$A_{21}=[a_{ij}]\quad (i=m+1,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,n)$$
$$A_{22}=[a_{ij}]\quad (i=m+1,\cdots,p;\ j=n+1,\cdots,q)$$

矩阵的分块是相当任意的，同一个矩阵可以根据不同的需要，划分成不同的子块，构成不同的分块矩阵。

值得注意的是，在分块矩阵中，每行(列)上各个元素(指原矩阵的子块)具有相同的行(列)数(指在原矩阵中的行(列)数)。

分块矩阵也具有平常矩阵的加法，乘法等运算规律。

不难证明：

若 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$，则 $A'=\begin{bmatrix}A'_{11} & A'_{21}\\ A'_{12} & A'_{22}\end{bmatrix}$

若 A_{11},A_{22} 是方阵且是非奇异阵，

则 $|A|=|A_{11}||A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|=|A_{22}||A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$。

第二章　基本概念、参数估计与检验

第一节　常用的基本概念

一、随机向量的分布函数

由P个随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_P$ 构成的P维列向量

$$X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_P \end{bmatrix}=[X_1,X_2,\cdots,X_P]'$$

称为P维随机向量，与一个随机变量（也可以看成一维随机向量）类似，P维随机向量的统计性质完全由它的概率分布或分布函数所反映，P维随机向量的分布函数定义为：

$$F(X_1,\cdots,X_P)=P(X_1\leqslant X_1,\cdots X_P\leqslant X_P)$$

二、随机向量的均值向量

P维随机向量X的均值向量（或称期望），记为 μ。定义为：

$$\mu=EX=\begin{bmatrix} EX_1 \\ \vdots \\ EX_P \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_P \end{bmatrix}$$

是一个P维向量，其每一个分量 μ_i 是 X_i 的期望值。

三、随机向量的协方差阵（简称协差阵）

P维随机向量X的协差阵（记为Σ）定义为：

$$\Sigma=DX=E(X-\mu)(X-\mu)'$$
$$=[E(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)]=[\sigma_{ij}]_{(P\times P)}\quad(i,j=1,2,\cdots,P)$$

是一个 $(P\times P)$ 阶矩阵，这个矩阵的对角线元素 $E(X_i-\mu_i)^2=\sigma_{ii}=\sigma_i^2$ 是 X_i 的方差，而非对角线元素 $E(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)=\sigma_{ij}$ 是 X_i 与 X_j 的协方差。

随机向量X的期望和方差有下列性质：

设

$$X=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_P \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_P \end{bmatrix},\ C\text{ 为常向量，则}$$

(1) $E(C'X)=C'EX$