天骄之路大学系列

高等数学

北京大学数学科学学院
周民强教授　主编

学习辅导

下

北京邮电大学出版社

高等数学学习辅导

（下册）

周民强　主编

北京邮电大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部最新颁布的全国工科院校高等数学教学大纲的要求编写的，也是编者多年来在北京大学教学、辅导工作的结晶，旨在帮助学生吃透教材的重点和难点，巩固基础知识，并形成数学各种应用能力的突破。

本书可作为工科大学生、电大、职大、民办大学学员、自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材，也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/周民强主编．—北京：北京邮电大学出版社，1999.10
ISBN 7-5635-0401-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．周…　Ⅲ．高等数学-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 62353 号

北京邮电大学出版社出版发行
(北京市海淀区西土城路 10 号)
(邮政编码 100876)
各地新华书店经售
中国农业出版社印刷厂印刷

850 毫米×1168 毫米　32 开本　14 印张　610 千字
1999 年 10 月第 1 版　1999 年 10 月第 1 次印刷

全套定价：30.00 元　本册定价：15.00 元

编写说明

经各家名师的苦心构思和精心编写，各位编辑的层层推敲和点点把关，一套与高等数学最新现行教材同步配套的新型教学辅导书与全国广大大学生和教师见面了。

本书是通过对基础知识的巩固、重难点的剖析、例题的分析、讲解、提问、小结等方式提供辅导的。例题、习题的选择均符合全国工科院校高等数学课程教学的基本要求。因此，不管读者使用什么样的工科类教材，都能使用此书。

该书编写思路与众不同，它博采众长，匠心独运，有的放矢，注重实效，它融入了近几年高等数学教学科研最新成果，体现 90 年代以来教学改革的最新特点，遵循教、学、练、考的整体原则，每一单元结构均设计成“基础知识导学”、“重点难点突破”、“解题技巧导引”、“同步强化训练”、“能力提高测试”、“参考答案提示”六大板块。

基础知识导学主要抓住教材内容中的知识要点、考点，概括和阐述力求精练、解释清晰、视角广阔；

重点难点透视对部分内容繁杂的“重点”、“难点”、“误点”进行整理和提炼，做到举一反三，触类旁通；

解题技巧导引注重启发性和培育兴趣原则，讲究“题眼”布局，有助于形成正确的解题思路，把握解题技巧；

同步强化训练精心设计题型，不搞题海战术，务求实效性、典型性和启发性，意在培养学生的学科思想与悟性；

能力提高测试供有实力和时间的读者使用，所选习题有一定程度的拔高，以提高对学科知识点、规律性的整体掌握水平，以及灵活运用知识的学科能力；

参考答案提示对同步强化训练中的大部分习题及能力提高测试中的每个习题，其答案中均附有解题提示或分析，大大提高了资料的利用率及效果。

这套丛书是由多年工作在教学第一线的北京大学数学科学学院的教授编写的。他们不但精熟自己所执教的学科内容，善于精析教材中的重点和难点，而且对高等数学有过深入的研究。

读者在使用本书时，我们建议先看一下每节的基础知识导学部分及例题分析的题目，自己想一想，动手算一算，然后再去看例题分析，这样帮助会大些。

需要说明的是，为照顾广大学生的实际购买能力，使他们能在相同价位、相同篇幅内能汲取到比其它书籍更多的营养，本书采用了小五号字和紧缩式排版，如有阅读上的不便，请谅解。

检验本丛书质量的唯一标准是广大师生使用本书的实践，作为教研领域的最新成果，我们期盼它的社会效益，也诚挚地希望广大师生的批评指正。读者对本书如有意见及建议，请来信寄至：(100080)北京大学燕园教育培训中心大厦1408室　天骄之路大学系列丛书编委会收。相信您一定会得到满意的答复。

本丛书在编写过程中，得到了北京邮电大学出版社有关领导的大力支持，丛书的统稿及审校工作得到了北京大学有关专家教授的协助和热情支持，在此一并谨致谢忱。

编　者

1999年10月于北京大学燕园

目　　录

第七章　空间解析几何与向(矢)量代数

§1　行列式和线性方程组

〔基础知识导学〕

1. 二阶行列式

定式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

2. 三阶行列式

定义：
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

定义中右端共有$3! = 6$项，其中三项为正号，三项为负号；每项都是三个数的乘积，它们取自不同的行、不同的列.

性质

(1) 行、列依次对调，行列式的值不变.

即：
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) 两行(列) 互换，行列式变号，例如：
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

(3) 某行(或某列) 的元素有公因子 k，k 可提于行列式外，例如：
$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4) 行列式中有两行(或两列) 的元素对应成比例，行列式等于零，例如：

$$\begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(5) 某行(或列)的元素都是两项之和,则该行列式可以分解成为两个相应的行列式的和,分解时其它行(列)均保持不动,例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6) 某行(或列)的所有元素乘以同一倍数 λ(λ 为任何常数),加到另一行(或列)的对应元素上,行列式的值不变,例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + kc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

代数余子式及行列式按一行(或列)的展开式:

代数余子式:设 x 是行列式中位于第 i 行、第 j 列的元素,在这个行列式中,去除 x 所在的第 i 行及第 j 列元素后,剩下的元素构成的行列式乘以 $(-1)^{i+j}$,称为 x 的代数余子式,记作 X,例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot b_1 \text{ 的代数余子式:}$$

$$B_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

按一行(或列)的展开式:

行列式的值等于其任一行(或列)的元素与它们的代数余子式两两乘积之和.例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$

行列式的任一行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式

的两两乘积之和为零,例如:

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0,$$
$$b_1A_2+b_2A_2+b_3A_3=0.$$

3. **高阶行列式**

四阶和四阶以上的行列式称为高阶行列式,高阶行列式无对角线展开法,但按某行(或列)的展开法仍适用.例如:四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$
$$+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

三阶行列式的性质对高阶行列式均成立.

〔重点难点突破〕

1° 性质(2)、(3)、(6)合并起来应用时,可以把行列式化为阶梯形(只是这时前面还要乘一个因子),而阶梯形行列式的值很容易计算,因此性质(2)、(3)、(6)非常有用.

如下列公式成立

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots\ \ddots & \ddots\ \vdots \\ 0\cdots 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2° 对于特殊的高阶行列式可利用按某行(或列)的展开法进行计算.例如:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

〔解题方法导引〕

【例 1】 计算下列行列式：

1° $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　　2° $\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix}$

3° $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$

分析　除直接计算行列式外，一般可利用性质展开定理计算，这使计算简便得多，而且计算途径也是多种多样的，这里首先要观察行列式中各行(或列)的对应元素间是否有某种规律性，使利用性质计算，达到预期的效果.

解答　1°　直接计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - (7 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 6)$$

$$= 45 + 84 + 96 - (105 + 72 + 48)$$

$$= 225 - 225 = 0.$$

用性质计算

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}\xlongequal{(6)}\begin{vmatrix}1&2&1\\4&5&1\\7&8&1\end{vmatrix}\xlongequal{(6)}\begin{vmatrix}1&1&1\\4&1&1\\7&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{(4)}0.$$

等号上的数字表示利用了第几条性质,例如$\xlongequal{(4)}$表示此等号利用了性质(4).

2° 直接计算

$$\begin{vmatrix}n&n+1&n-1\\n+1&n-1&n\\n-1&n&n+1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=n(n-1)(n+1)+(n+1)n(n-1)\\&\quad+(n-1)(n+1)n-[(n-1)^3+(n+1)^3+n^3]\\&=3n^3-3n-3n^2-6n=-9n.\end{aligned}$$

用性质计算

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}n&n+1&n-1\\n+1&n-1&n\\n-1&n&n+1\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{(6)}\begin{vmatrix}3n&n+1&n-1\\3n&n-1&n\\3n&n&n+1\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{(3)(6)}3n\begin{vmatrix}1&n+1&n-1\\0&-2&1\\0&-1&2\end{vmatrix}\\
&=3n\cdot1\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\-1&2\end{vmatrix}=-9n.\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}n&n+1&n-1\\n+1&n-1&n\\n-1&n&n+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n+0&n+1&n-1\\n+1&n-1&n\\n-1&n&n+1\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{(5)}\begin{vmatrix}n&n+1&n-1\\n&n-1&n\\n&n&n+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&n+1&n-1\\1&n-1&n\\-1&n&n+1\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{(3)}n\begin{vmatrix}1&n+1&n-1\\1&n-1&n+0\\1&n+0&n+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&n+1&n-1\\1&n-1&n+0\\-1&n+0&n+1\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\xlongequal{(5)} n\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + n\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ n\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -3n - 3n - 3n = -9n.$

3° 显然,当 $\sin x = 0$ 或 $\cos x = 0$ 时,有

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix} = 0.$$

故设 $\sin x \neq 0$ 及 $\cos x \neq 0$,且注意到 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \mathrm{cox}^2 x - \sin^2 x$, $1 = \sin^2 x + \cos^2$ 的事实,则

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)} \frac{1}{\cos x\sin x}\begin{vmatrix} 2\sin x\cos x & \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin x\cos x & -\cos^2 x & \cos^2 x \\ \cos x\sin x & \sin^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(6)} \frac{1}{\cos x\sin x}\begin{vmatrix} 2\sin x\cos x & \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ 2\sin x\cos x & \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin x\cos x & \sin^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(4)} 0.$$

【例 2】 利用性质计算下列行列式:

1° $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

2° $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

分析 一般计算行列式的主要思路是:利用性质(6),将某行(或列)中元素尽可能多的消成零,再以该行(或列)元素展开,降为低阶行列式计算.

解答 1° 法一:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

(每列中均有两元素相同,可将一个消成零.)

$$\underline{\underline{(6)}} \begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

(虽然第一列中还有两相同元素 c,但消成零对展开好处不多,应在已有的零所在的行(或列)中尽可能多的将非零元素消成零.)

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ c+a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\underline{(6)} (a+b+c)\begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ -(a+b+c) & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\underline{(3)} (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

法二:由观察知三列对应元素之和均为 $2a+2b+2c$,故可如下计算:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\underline{(6)} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\underline{(3)} 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\underline{(6)} 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3.$$

2° 计算 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

法一:第三行元素均为 1,显然易于消成零,然后按第三行展开,计算如下:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(6)} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)} (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

法二:第二、三行中,第三列元素的两倍恰好是第一列与第三列对应元素之和,故可计算如下:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(6)} \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2 \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

指出下列计算错误的原因.

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(6)} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-a^2 & b^2-ab \\ 2a-2b & b-a & b-a \\ 0 & 0 & \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

【例 3】 证明下列恒等式:

1° $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$

2° $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明 1° 法一:直接计算两边的行列式,证明等式成立(留给读者).

法二:利用性质证明:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(5)} \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 \\ b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)(5)} \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_1\alpha_2 \\ a_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1\beta_2 \\ a_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \beta_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1\alpha_2 \\ b_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \beta_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_1\beta_2 \\ b_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(4)(3)}\alpha_1\beta_2\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}-\alpha_2\beta_1\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$$

2° $$\begin{vmatrix}a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ 2a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ 2a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)}2\begin{vmatrix}a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_1 & b_1+c_1 & c_1\\ a_2 & b_2+c_2 & c_2\\ a_3 & b_3+c_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

【例 4】 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 8 & -7 & -10\end{vmatrix}$$

分析 对于上面的行列式我们可以把它化成阶梯形行列式,这要利用行列式性质(2)、(3)、(6).

解答

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\ -2 & 5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 8 & -7 & -10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & -13 & 25 & 17\\ 0 & 26 & -34 & -26\\ 0 & 26 & -33 & -24\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & -13 & 25 & 17\\ 0 & 0 & 16 & 8\\ 0 & 0 & 17 & 10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & -13 & 25 & 17\\ 0 & 0 & 16 & 8\\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}$$

$$=-(-13)\cdot 16\cdot\frac{3}{2}=312$$

总结 在计算具体的数值行列式时,通常可采用上述例 4 方法,特别是在利用电子计算机来计算行列式时,这更是一个常用方法;另一方面,如果针对每个行列式的特点,灵活地运用行列式的性质,则可使某些行列式计算大大简化.

【例 5】 证明平面上三点 $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ 共线的充要

条件为：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

分析　本题目的关键在于对 Cramer 法则的应用.

证明　必要性：设 M_1, M_2, M_3 共线，其所在的直线方程为 $Ax + By + C = 0$，其中 A, B 不全为零，则有

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0, \\ Ax_3 + By_3 + C = 0. \end{cases} \quad (*)$$

由于 A, B 不全为零，故以 A, B, C 为未知量的方程组($*$)有非零解，由 Cramer 法则知

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

充分性：已知 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$,

即
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$
$$= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0,$$

即
$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1).$$

若 $x_1 = x_2$，则或 $y_2 = y_1$，此时(x_1, y_1)和(x_2, y_2)是一个点，和已知条件矛盾；或 $x_3 = x_1$，则 $x_1 = x_2 = x_3$，三点在一条平行于 y 轴的直线上.

若 $x_1 \neq x_2$，则 $x_3 \neq x_1$(否则(x_1, y_1)和(x_3, y_3)是同一个点)，则

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},$$

即 $K_{M_1, M_2} = K_{M_1, M_2}$，因此 M_1, M_2, M_3 在一条直线上.

〔同步强化训练〕

1. 证明下列恒等式.