高等学校试用教材

高等微积分

GAO DENG WEI JI FEN

赵显曾

高等教育出版社

高等学校试用教材

高等微积分

赵显曾

高等教育出版社

内 容 提 要

本书注重理论，兼顾应用，不仅包括了传统微积分的理论部分和经典方法，而且还注意了微积分的现代处理方法，并增加了一些国内外现行同类书中不多见的有趣的新颖材料．全书共有六章，内容富有启发性；习题配置丰富，类型较多，有利于加强基础训练和学生能力的培养．

本书可作为把数学分析课程分成两个阶段进行教学的第二阶段的教材或教学参考书，也可供数学工作者与数学爱好者、工程技术人员参考．

高等学校试用教材

高等微积分

赵显曾

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 16.75　字数 400 000

1991年3月第1版　19　年3月第1次印刷

印数 0 001—1 905

ISBN 7-04-003243-0/O·988

定价 6.00 元

序　　言

1981年秋，东南大学应用数学专业的数学分析课分成初等微积分和高等微积分两个阶段进行讲授，这一尝试取得了满意的结果.

1984年，我写出了《高等微积分》油印讲义，它就是本书的前身. 这次修改，除删去原讲义的部分内容外，主要是根据教学实践，对于某些章节进行了调整、充实，并介绍了外微分的概念.

本书宗旨有三，其一是要求学生在学习了初等微积分(即一元函数与极限、一元微积分的概念及其基本运算)后，不能满足于"知其然"，还要"知其所以然"；其二是要把一元微积分推广到多元函数的情况；其三，还要学习新问题. 高等微积分是微积分的主要部分，它进一步揭示了微积分学的实质，是学习现代数学所必须的基础.

我认为，高等教育在向学生传授知识的同时，要十分注重对学生能力的培养；而能力的培养，又必须寓于知识的传授之中. 虽说微积分是一门成熟的学科，但是"成熟"同时也意味着它曾有过曲折的发展过程. 因此，我希望把自己在教学中的点滴体会，尽可能多地反映在本书中，以便抛砖引玉，尽早培养学生的创新能力.

本书不仅包括了传统微积分的理论部分和经典方法，而且还注意了现代处理方法(特别是引进了代数方法)，同时增加了一些国内外现行同类书中所不多见的有趣的新颖材料，大多是笔者自己的研究成果. 例如，由于极限运算的需要，引进了无限大的概念，自然要问，有限极限的运算法则能否搬到无限极限中去？定积分的 Riemann 定义中有"两个任意性"，其实质是什么？对于重积分又会怎样？微分中值定理的中点具有内点性，积分中值定理的中

点是否也具有内点性呢？D'Alembert 判别法和 Cauchy 根值判别法是级数中两个基本判别法，由前者推广得到了 Raabe 判别法和 Gauss 判别法，那么 Cauchy 根值判别法的推广形式应该如何？还有，Dirichlet 判别法和 Abel 判别法究竟哪一个更强，是否还有比它们更细致的判别法？等等．所有这些问题，在本书中都作了明确回答．

习题是本书不可缺少的一个组成部分．本书习题丰富，类型较多，有利于加强基础训练和学生能力的培养．例题证明详尽，富有启发性，便于自学．

正文中带星号的部分，是进一步学习其它学科的基础，讲授(或初学)时可以酌情删减，不影响传统微积分的系统性．带星号的习题，大多是新的，具有一定的难度，是为学有余力的学生准备的，目的是激励学生独立思考问题，开阔学生视野．

本书可作为把数学分析课程分成两个阶段进行教学的第二阶段的教材或教学参考书，也可供数学工作者与数学爱好者、工程技术人员参考．

由于本人水平所限，错误之处在所难免，欢迎读者批评与指正。

衷心感谢我校的戴昌国教授，王元明教授，周荣富副教授，王文蔚副教授，吉联芳副教授，他们仔细地审阅了本书的初稿，提出了许多建设性的意见．

衷心感谢清华大学的孙念增教授，西安交通大学的游兆永教授，国防科技大学的李运樵教授，他们不但提了许多宝贵的修改意见，而且热情促成本书的出版．

最后，还要感谢本书的编辑同志，正是他们的辛勤劳动，才使本书能得以问世．

赵显曾

1989 年 9 月　于南京

目　　录

第一章　实数论及极限与一元微积分论

学习了初等微积分，虽然对一元函数、极限、微分与积分等重要概念有了初步认识，并且掌握了一些有效的运算，同时也进行了某些理论研究，但是从根本上说，只解决了“知其然”方面，而对于“知其所以然”方面，还没有认真学习．为了把微积分建立在牢固的逻辑结构基础上，更深入地研究一些问题，必须学习本章的内容．在以后各章，我们还要把一元微积分推广到多元函数的情况，进一步学习新问题．

§1　实数理论

在初等微积分中，使用了“单调有界数列收敛”、有限闭区间上连续函数的“三个性质”、“连续函数是可积的”等命题的结论．而这些命题的证明，都离不开实数理论．

“实数”这个概念，有着漫长的发展过程．尽管人们早就在用它，然而什么是实数呢？由于数学家们长期地努力，直到十九世纪后半叶，才为实数理论建立起可靠的逻辑基础，使这个问题得以解决．从有理数出发，定义实数（特别是无理数）有许多方法，归纳起来不外乎两种：一种是以 Cantor 为代表的，用基本有理数列来定义的；另一种是我们下面要介绍的 Dedekind 方法．

1. Dedekind分划与无理数的定义

对于有理数，大家已经熟悉了，这里不再重复．我们知道，有理数域对于极限运算和科学度量来说，已经不够用了．例如

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

是有理数列，它的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$ 却不是有理数；再如

$$x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

也是有理数列，它的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 也不是有理数.

若在一条直线上取定一个方向（如向右为正）及原点 O 和度量单位 1，则称该直线为一**直线轴**. 这样一来，就可以用纯几何作图的方法，确定出端点 A 在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$，等等的间隔 OA. 照此，每一个有理数 a，在直线轴上都对应于一个点 A，称为有理点，即它的坐标为 a，间隔 OA 的长度为 $|a|$. 然而用这个方法定义的间隔的长度，并非每一个都可用有理数来度量. 例如，边长为 1 的正方形的对角线的长度 $\sqrt{2}$，就不能用有理数表示. 也就是说，直线轴上的点多于有理点.

为了使极限运算通行无阻，建立"数"与直线轴上点的一一对应关系，就要进一步扩充有理数的概念. 用 Dedekind 方法定义无理数，是以有理数的分划为基础的.

定义 1 若将有理数的全体分成两个非空的集合 A 和 A'，对任意的 $a\in A, a'\in A'$，都有 $a<a'$，则称 A 和 A' 构成一个**有理数的分划**，记为 $A|A'$；A 和 A' 分别称为分划的**下集**和**上集**.

由定义可知，分划 $A|A'$ 只是把全体有理数按大小分成了 A 和 A' 两个集合，它们不仅是非空的，而且不相交；比下集 A 内的数 a 小的有理数也在 A 内，比上集 A' 内的数 a' 大的有理数也在 A' 内.

例 1 设一切满足不等式 $a<1$ 的有理数 a 组成集 A，一切满足不等式 $a'\geqslant 1$ 的有理数 a' 组成集 A'，那么由定义可知，A 和 A'

就构成了一个有理数的分划 $A|A'$. 这里，A' 中有最小数 1；而 A 中无最大数，因为对于任意的 $a\in A$，都有 $a<1$，由于有理数的稠密性，必存在有理数 $a_1\in A$，使 $a<a_1<1$. 这里 $a'=1$ 是 A 与 A'之间的分界数.

例 2 设一切满足不等式 $a\leqslant 1$ 的有理数 a 组成集 A，一切满足不等式 $a'>1$ 的有理数 a' 组成集 A'，则 A 和 A' 组成一个有理数的分划，并且 A 中有最大数 1，而 A' 中无最小数. 这里 $a=1$ 是分界数.

例 3 设一切满足不等式 $a'^2>2$ 的正有理数 a' 组成集 A'，其它所有有理数组成集 A，则 A 和 A' 构成一个有理数分划. 这里，不仅 A 中无最大数，而且 A' 中也无最小数. 因此，这时没有有理数作为分界数.

事实上，由于没有一个有理数的平方等于 2，因而 A 与 A' 确是把所有的有理数分成了两个集，根据定义，它们构成了一个有理数的分划. 要证明 A 中无最大数，就要证明：对任意的 $a\in A$，必存在 $a_1>a$ 且 $a_1\in A$. 由于当 $a\leqslant 0$ 时，结论显然成立，所以不妨假设 $a>0$ 且 $a^2<2$. 此时令 $a_1=a+\frac{1}{n}$，n 为某个自然数，要让 $a_1\in A$，必须使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2$$

即

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2$$

因为

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2a+1}{n}$$

所以只要使

$$\frac{2a+1}{n}<2-a^2$$

即取$n>\frac{2a+1}{2-a^2}$即可. 根据 Archimedes 公理(即对任意有理数 $a>0$ 及 b, 都有自然数 n, 使 $na>b$)可知, 这是一定办得到的. 因此下集 A 中没有最大数. 同理可证,在上集 A' 中没有最小数。又$\sqrt{2}$不是有理数,所以此分划没有有理数的分界数.

从几何上看, 上述分划是很清楚的. 如果我们把所有的有理数按其增加的顺序在直线轴上排列好, 令 P 为直线轴上的任意一点,则点 P将其两边的有理点分成两个集: 一个是位于点 P 的左边的半直线上的全体有理点的集 A, 另一个是位于点 P 的右边的半直线上的全体有理点的集 A'. 当且仅当 P 为有理点时,点 P 或归入 A 或归入 A',二者必居其一. 这样, 就得到了一个有理数的分划 $A|A'$,无论何时它都确定了一个分界点 P; 换言之,借助于有理数的分划可以确定直线轴上的任何点 P. 当 P 为有理点, 有一分界数 r(有理数)与之对应; 否则, 分界点没有有理数的分界数与之对应.

这样,有理数的分划 $A|A'$ 仅能有三种情况:

(1) 下集 A 内无最大数,而上集 A' 内有最小数 r;

(2) 下集 A 内有最大数 r,而上集 A' 内无最小数;

(3) 下集 A 内无最大数,上集 A' 内无最小数.

在前两种情况下, 则说分划 $A|A'$ 定义了有理数 r. 为了确定起见,今后我们约定: 凡说到定义了有理数 r 的分划 $A|A'$ 时,总认为 $r\in A'$. 在第三种情况下, 分划不能定义出任何有理数. 因此, 就要引入新的数——无理数.

定义 2 设 $A|A'$ 为一个有理数的分划. 若 A 中无最大数, A' 中无最小数,则称 $A|A'$ 定义了一个**无理数** α.

例如, 在例 3 中的分划 $A|A'$ 就定义了一个无理数$\sqrt{2}$.

2. 实数及其顺序性和稠密性

定义 3 全体有理数和全体无理数,统称为**实数**.

在前述约定(若分划 $A|A'$ 定义有理数 r,则 $r\in A'$)之下,任意一个实数 α,都可理解为一个定义它的有理数的分划 $A|A'$. 这样,就可用有理数的分划来定义实数的大小了.

定义 4 设有理数分划 $A|A'$ 及 $B|B'$ 分别定义实数 α 及 β. 若 $A=B$,则称这两个**分划相等**. 当且仅当两个分划相等时,称 α 与 β **相等**,记为 $\alpha=\beta$.

定义 5 设有理数分划 $A|A'$ 及 $B|B'$ 分别定义实数 α 及 β,当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$ 时,称 α **小于** β(或 β **大于** α),记为 $\alpha<\beta$(或 $\beta>\alpha$).

现在来证明,实数满足以下两条顺序公理:

1°. 任意二实数 α、β,必有下列关系之一:

$$\alpha=\beta、\alpha>\beta、\alpha<\beta.$$

证 设 α、β 分别由分划 $A|A'$,$B|B'$ 所定义,则下集 A、B 之间必有下面三种关系之一:

若 $A=B$,则 $\alpha=\beta$;

若 $A\supseteq B$ 且 $A\neq B$,则 $\alpha>\beta$;

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则 $\alpha<\beta$.

2°. 若 $\alpha<\beta$,$\beta<\gamma$,则 $\alpha<\gamma$.

证 设 α、β、γ 是由分划 $A|A'$、$B|B'$、$C|C'$ 来确定的. 若 $\alpha<\beta$,则 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$; 又由 $\beta<\gamma$,得 $B\subseteq C$ 且 $B\neq C$. 因此,$A\subseteq C$ 且 $A\neq C$,即 $\alpha<\gamma$. ▌

其实,实数也满足顺序公理的其它条款:

3°. 若 $\alpha<\beta$,则 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

4°. 若 $\alpha<\beta$ 且 $\gamma>0$,则 $\alpha\gamma<\beta\gamma$.