

高等学校试用教材

# 高等微积分

GAO DENG WEI JI FEN

赵显曾



高等教育出版社

高等学校试用教材

# 高等微积分

赵显曾

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书注重理论,兼顾应用,不仅包括了传统微积分的理论部分和经典方法,而且还注意了微积分的现代处理方法,并增加了一些国内外现行同类书中不多见的有趣的新颖材料。全书共有六章,内容富有启发性;习题配置丰富,类型较多,有利于加强基础训练和学生能力的培养。

本书可作为把数学分析课程分成两个阶段进行教学的第二阶段的教材或教学参考书,也可供数学工作者与数学爱好者、工程技术人员参考。

高等学校试用教材

高等微积分

赵显曾

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 16.75 字数 400 000

1991年3月第1版 1991年3月第1次印刷

印数 0 001—1 905

ISBN 7-04-003243-0/O·988

定价 6.00 元

## 序 言

1981年秋,东南大学应用数学专业的数学分析课分成初等微积分和高等微积分两个阶段进行讲授,这一尝试取得了满意的结果.

1984年,我写出了《高等微积分》油印讲义,它就是本书的前身.这次修改,除删去原讲义的部分内容外,主要是根据教学实践,对于某些章节进行了调整、充实,并介绍了外微分的概念.

本书宗旨有三,其一是要求学生在学习了初等微积分(即一元函数与极限、一元微积分的概念及其基本运算)后,不能满足于“知其然”,还要“知其所以然”;其二是要把一元微积分推广到多元函数的情况;其三,还要学习新问题.高等微积分是微积分的主要部分,它进一步揭示了微积分学的实质,是学习现代数学所必须的基础.

我认为,高等教育在向学生传授知识的同时,要十分注重对学生能力的培养;而能力的培养,又必须寓于知识的传授之中.虽说微积分是一门成熟的学科,但是“成熟”同时也意味着它曾有过曲折的发展过程.因此,我希望把自己在教学中的点滴体会,尽可能多地反映在本书中,以便抛砖引玉,尽早培养学生的创新能力.

本书不仅包括了传统微积分的理论部分和经典方法,而且还注意了现代处理方法(特别是引进了代数方法),同时增加了一些国内外现行同类书中所不多见的有趣的新颖材料,大多是笔者自己的研究成果.例如,由于极限运算的需要,引进了无限大的概念,自然要问,有限极限的运算法则能否搬到无限极限中去?定积分的 **Riemann** 定义中有“两个任意性”,其实质是什么?对于重积分又会怎样?微分中值定理的中点具有内点性,积分中值定理的中

点是否也具有内点性呢? D'Alembert 判别法和 Cauchy 根值判别法是级数中两个基本判别法,由前者推广得到了 Raabe 判别法和 Gauss 判别法,那么 Cauchy 根值判别法的推广形式应该如何?还有,Dirichlet 判别法和 Abel 判别法究竟哪一个更强,是否还有比它们更细致的判别法?等等.所有这些问题,在本书中都作了明确回答.

习题是本书不可缺少的一个组成部分.本书习题丰富,类型较多,有利于加强基础训练和学生能力的培养.例题证明详尽,富有启发性,便于自学.

正文中带星号的部分,是进一步学习其它学科的基础,讲授(或初学)时可以酌情删减,不影响传统微积分的系统性.带星号的习题,大多是新的,具有一定的难度,是为学有余力的学生准备的,目的是激励学生独立思考问题,开阔学生视野.

本书可作为把数学分析课程分成两个阶段进行教学的第二阶段的教材或教学参考书,也可供数学工作者与数学爱好者、工程技术人员参考.

由于本人水平所限,错误之处在所难免,欢迎读者批评与指正.

衷心感谢我校的戴昌国教授,王元明教授,周荣富副教授,王文蔚副教授,吉联芳副教授,他们仔细地审阅了本书的初稿,提出了许多建设性的意见.

衷心感谢清华大学的孙念增教授,西安交通大学的游兆永教授,国防科技大学的李运樵教授,他们不但提了许多宝贵的修改意见,而且热情促成本书的出版.

最后,还要感谢本书的编辑同志,正是他们的辛勤劳动,才使本书能得以问世.

赵显曾

1989年9月 于南京

# 目 录

<b>第一章 实数论及极限与一元微积分论</b> .....	1
§ 1 实数理论 .....	1
1. Dedekind 分划与无理数的定义 .....	1
2. 实数及其顺序性和稠密性 .....	5
3. 实数域的连续性 .....	7
4. 数集的确界 .....	8
习题一 .....	10
§ 2 实数连续性各等价命题 .....	11
1. 实数连续性各等价命题 .....	11
*2. Stolz 定理 .....	21
习题二 .....	23
§ 3 连续函数的性质的证明 .....	25
1. 一致连续的概念 .....	25
2. 连续函数的性质的证明 .....	26
习题三 .....	29
§ 4 上极限与下极限 .....	31
1. 数列的上极限与下极限的定义 .....	31
2. 上极限与下极限的性质 .....	32
3. 几个命题 .....	39
4. 极限点及其极限点集 .....	42
习题四 .....	44
§ 5 凸函数 .....	46
1. 凸函数的定义 .....	46
2. 凸函数的性质 .....	47
3. 凸函数的判别法 .....	52
4. 凸函数的应用举例 .....	53
习题五 .....	55
§ 6 定积分存在的充要条件 .....	57
1. 定积分存在的充要条件 .....	57
2. 定积分定义的注记 .....	62

3. 可积函数类 .....	62
4. 三个命题的一般化 .....	65
5. 积分第一中值定理 .....	69
6. Abel 引理和积分第二中值定理 .....	70
习题六 .....	74
§ 7 曲线弧长与有界变差函数 .....	76
1. 曲线的弧长 .....	76
2. 有界变差函数与曲线可求长的充要条件 .....	81
习题七 .....	84
§ 8 广义积分 .....	85
1. 无限区间上的广义积分 .....	85
2. 无限区间上广义积分的收敛判别法 .....	89
3. Dirichlet 收敛准则与 Abel 收敛准则 .....	90
4. 无界函数的广义积分 .....	95
5. 广义积分的 Cauchy 主值 .....	101
习题八 .....	101
<b>第二章 多元函数及其微分学</b> .....	<b>105</b>
§ 1 $R^2$ 中的拓扑知识 .....	105
1. 开集和闭集 .....	106
2. $R^2$ 的完备性 .....	111
3. $R^2$ 的紧性 .....	113
4. 区域 .....	115
习题一 .....	116
§ 2 多元函数及其连续性 .....	118
1. 多元函数的概念 .....	118
2. 多元函数的极限 .....	119
3. 多元函数的连续性 .....	122
习题二 .....	127
§ 3 偏导数和全微分 .....	130
1. 多元函数对于向量的导数 .....	130
2. 方向导数和偏导数 .....	132
3. 全微分 .....	136
4. 复合函数求导法 .....	141
习题三 .....	145

§ 4 隐函数存在定理	150
1. 一个方程的情形	150
2. 方程组的情形	153
习题四	157
§ 5 Taylor 公式与极值	159
1. Taylor 公式	159
2. 极值	163
3. Lagrange 乘数法	169
习题五	175
* § 6 Jacobi 行列式的性质、函数相关性和多元凸函数	176
1. Jacobi 行列式的性质	176
2. 函数相关性	178
3. 多元凸函数	182
习题六	183
§ 7 曲线和曲面	184
1. 空间曲线的切线及法平面	184
2. 曲面	186
3. 曲面和曲线的隐表示	189
习题七	191
<b>第三章 多元函数积分学</b>	<b>193</b>
§ 1 二重积分	193
1. 零面积集	194
2. 二重积分的定义	197
3. 二重积分存在的充要条件	198
4. 二重积分的等价定义	199
5. 关于集函数	205
习题一	207
§ 2 可积函数类和二重积分的性质	208
1. 可积函数类	208
2. 二重积分的性质	211
习题二	214
§ 3 二重积分的计算	215
1. 化二重积分为累次积分	215
2. 二重积分的换元积分法	221



3. 曲面面积	230
习题三	234
§ 4 广义二重积分	237
1. 无界区域上的广义二重积分	237
2. 无界函数的广义二重积分	243
习题四	245
§ 5 三重积分和 $n$ 重积分	246
1. 化三重积分为累次积分	247
2. 三重积分的换元积分法	250
3. $n$ 重积分	254
4. 重积分的物理应用举例	258
习题五	260
§ 6 曲线积分和曲面积分	264
1. 第一型曲线积分	264
2. 第一型曲面积分	267
3. 第二型曲线积分	269
4. Green公式	271
5. 第二型曲面积分	273
6. Gauss公式和 Stokes公式	278
7. 微分与曲线积分的关系	284
习题六	289
§ 7 场论初步	293
1. 数量场的等值面和梯度	294
2. 向量场的散度和旋度	297
*3. 有势场	303
*4. 无源场	306
习题七	308
* § 8 外微分形式的积分	309
1. 外微分形式	309
2. 外微分形式的微分	312
3. 外微分形式的积分	313
习题八	314
<b>第四章 无穷级数</b>	<b>315</b>
§ 1 数项级数	315

1. 无穷级数的概念	315
2. 级数的基本性质	317
3. 正项级数的收敛判别法	321
4. 任意项级数的收敛判别法	337
5. 绝对收敛与条件收敛级数的性质	341
6. 级数的乘法	346
*7. 级数收敛性的改进	351
习题一	354
* § 2 无穷乘积	359
1. 无穷乘积的概念	359
2. 无穷乘积的性质	361
3. 无穷乘积的收敛判别法	362
4. 无穷乘积的绝对收敛性	366
习题二	368
§ 3 函数项级数	370
1. 收敛域	370
2. 一致收敛的定义	373
3. 一致收敛的判别法	378
4. 一致收敛级数的和的性质	390
习题三	396
§ 4 幂级数	399
1. 幂级数的收敛半径	400
2. 幂级数的性质	404
3. 函数展为幂级数	408
*4. 母函数	418
习题四	422
§ 5 逼近定理	425
1. 用多项式一致逼近连续函数	425
2. 用三角多项式一致逼近连续函数	430
习题五	431
<b>第五章 含参变量积分</b>	<b>433</b>
§ 1 含参变量的常义积分	433
1. 积分限是常数的情形	433
2. 积分限含参变量的情形	435

习题一	439
§ 2 含参变量的广义积分	440
1. 一致收敛的定义	440
2. 一致收敛的判别法	443
3. 一致收敛积分的性质	447
4. 两个重要的广义积分	454
习题二	457
§ 3 $\Gamma$ 函数和 $\beta$ 函数	459
习题三	465
* § 4 大参数积分的渐近式	466
1. 分部积分法	466
2. $\Gamma$ 函数的渐近式	468
3. 局部化方法	471
习题四	472
<b>第六章 Fourier 级数</b>	474
§ 1 Fourier 级数	475
1. Fourier 级数	475
2. Dirichlet 积分	477
3. Riemann 引理	480
4. 收敛判别法	484
5. 把周期函数展开成 Fourier 级数	488
6. Fourier 级数的复数形式	492
习题一	495
§ 2 Fourier 级数的均值求和	496
1. 均值求和	496
2. Fejér 定理	498
习题二	502
§ 3 最佳均方逼近	503
1. Fourier 系数的最小性质	503
2. Parseval 等式	505
3. Fourier 级数的逐项积分与微分	510
习题三	511
* § 4 Fourier 变换	512
1. Fourier 积分公式	512

2. 收敛定理.....	514
3. Fourier 变换.....	517
习题四 .....	522
<b>参考书目</b> .....	<b>523</b>

# 第一章 实数论及极限与一元微积分论

学习了初等微积分,虽然对一元函数、极限、微分与积分等重要概念有了初步认识,并且掌握了一些有效的运算,同时也进行了某些理论研究,但是从根本上说,只解决了“知其然”方面,而对于“知其所以然”方面,还没有认真学习. 为了把微积分建立在牢固的逻辑结构基础上,更深入地研究一些问题,必须学习本章的内容. 在以后各章,我们还要把一元微积分推广到多元函数的情况,进一步学习新问题.

## §1 实数理论

在初等微积分中,使用了“单调有界数列收敛”、有限闭区间上连续函数的“三个性质”、“连续函数是可积的”等命题的结论. 而这些命题的证明,都离不开实数理论.

“实数”这个概念,有着漫长的发展过程. 尽管人们早就在用它,然而什么是实数呢? 由于数学家们长期地努力,直到十九世纪后半叶,才为实数理论建立起可靠的逻辑基础,使这个问题得以解决. 从有理数出发,定义实数(特别是无理数)有许多方法,归纳起来不外乎两种:一种是以 Cantor 为代表的,用基本有理数列来定义的;另一种是我们下面要介绍的 Dedekind 方法.

### 1. Dedekind分划与无理数的定义

对于有理数,大家已经熟悉了,这里不再重复. 我们知道,有理数域对于极限运算和科学度量来说,已经不够用了. 例如

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

是有理数列, 它的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$  却不是有理数; 再如

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

也是有理数列, 它的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  也不是有理数.

若在一條直線上取定一個方向(如向右為正)及原點  $O$  和度量單位 1, 則稱該直線為一**直線軸**. 這樣一來, 就可以用純幾何作圖的方法, 確定出端點  $A$  在  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ , 等等的間隔  $OA$ . 照此, 每一個有理數  $a$ , 在直線軸上都對應於一個點  $A$ , 稱為有理點, 即它的坐標為  $a$ , 間隔  $OA$  的長度為  $|a|$ . 然而用這個方法定義的間隔的長度, 並非每一個都可用有理數來度量. 例如, 邊長為 1 的正方形的對角線的長度  $\sqrt{2}$ , 就不能用有理數表示. 也就是說, 直線軸上的點多於有理點.

為了使極限運算通行無阻, 建立“數”與直線軸上點的一一對應關係, 就要進一步擴充有理數的概念. 用 Dedekind 方法定義無理數, 是以有理數的分劃為基礎的.

**定義 1** 若將有理數的全体分成兩個非空的集合  $A$  和  $A'$ , 對任意的  $a \in A, a' \in A'$ , 都有  $a < a'$ , 則稱  $A$  和  $A'$  構成一個有理數的分劃, 記為  $A|A'$ ;  $A$  和  $A'$  分別稱為分劃的下集和上集.

由定義可知, 分劃  $A|A'$  只是把全体有理數按大小分成了  $A$  和  $A'$  兩個集合, 它們不僅是非空的, 而且不相交; 比下集  $A$  內的數  $a$  小的有理數也在  $A$  內, 比上集  $A'$  內的數  $a'$  大的有理數也在  $A'$  內.

**例 1** 設一切滿足不等式  $a < 1$  的有理數  $a$  組成集  $A$ , 一切滿足不等式  $a' \geq 1$  的有理數  $a'$  組成集  $A'$ , 那麼由定義可知,  $A$  和  $A'$

就构成了一个有理数的分划  $A|A'$ . 这里,  $A'$  中有最小数 1; 而  $A$  中无最大数, 因为对于任意的  $a \in A$ , 都有  $a < 1$ , 由于有理数的稠密性, 必存在有理数  $a_1 \in A$ , 使  $a < a_1 < 1$ . 这里  $a' = 1$  是  $A$  与  $A'$  之间的分界数.

**例 2** 设一切满足不等式  $a \leq 1$  的有理数  $a$  组成集  $A$ , 一切满足不等式  $a' > 1$  的有理数  $a'$  组成集  $A'$ , 则  $A$  和  $A'$  组成一个有理数的分划, 并且  $A$  中有最大数 1, 而  $A'$  中无最小数. 这里  $a = 1$  是分界数.

**例 3** 设一切满足不等式  $a'^2 > 2$  的正有理数  $a'$  组成集  $A'$ , 其它所有有理数组成集  $A$ , 则  $A$  和  $A'$  构成一个有理数分划. 这里, 不仅  $A$  中无最大数, 而且  $A'$  中也无最小数. 因此, 这时没有有理数作为分界数.

事实上, 由于没有一个有理数的平方等于 2, 因而  $A$  与  $A'$  确是把所有的有理数分成了两个集, 根据定义, 它们构成了一个有理数的分划. 要证明  $A$  中无最大数, 就要证明: 对任意的  $a \in A$ , 必存在  $a_1 > a$  且  $a_1 \in A$ . 由于当  $a \leq 0$  时, 结论显然成立, 所以不妨假设  $a > 0$  且  $a^2 < 2$ . 此时令  $a_1 = a + \frac{1}{n}$ ,  $n$  为某个自然数, 要让  $a_1 \in A$ , 必须使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

即

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$$

因为

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2a+1}{n}$$

所以只要使

$$\frac{2a+1}{n} < 2-a^2$$

即取  $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$  即可. 根据 Archimedes 公理 (即对任意有理数  $a > 0$  及  $b$ , 都有自然数  $n$ , 使  $na > b$ ) 可知, 这是一定办得到的. 因此下集  $A$  中没有最大数. 同理可证, 在上集  $A'$  中没有最小数. 又  $\sqrt{2}$  不是有理数, 所以此分划没有有理数的分界数.

从几何上看, 上述分划是很清楚的. 如果我们把所有的有理数按其增加的顺序在直线轴上排列好, 令  $P$  为直线轴上的任意一点, 则点  $P$  将其两边的有理点分成两个集: 一个是位于点  $P$  的左边的半直线上的全体有理点的集  $A$ , 另一个是位于点  $P$  的右边的半直线上的全体有理点的集  $A'$ . 当且仅当  $P$  为有理点时, 点  $P$  或归入  $A$  或归入  $A'$ , 二者必居其一. 这样, 就得到了一个有理数的分划  $A|A'$ , 无论何时它都确定了一个分界点  $P$ ; 换言之, 借助于有理数的分划可以确定直线轴上的任何点  $P$ . 当  $P$  为有理点, 有一分界数  $r$  (有理数) 与之对应; 否则, 分界点没有有理数的分界数与之对应.

这样, 有理数的分划  $A|A'$  仅能有三种情况:

- (1) 下集  $A$  内无最大数, 而上集  $A'$  内有最小数  $r$ ;
- (2) 下集  $A$  内有最大数  $r$ , 而上集  $A'$  内无最小数;
- (3) 下集  $A$  内无最大数, 上集  $A'$  内无最小数.

在前两种情况下, 则说分划  $A|A'$  定义了有理数  $r$ . 为了确定起见, 今后我们约定: 凡说到定义了有理数  $r$  的分划  $A|A'$  时, 总认为  $r \in A'$ . 在第三种情况下, 分划不能定义出任何有理数. 因此, 就要引入新的数——无理数.

**定义 2** 设  $A|A'$  为一个有理数的分划. 若  $A$  中无最大数,  $A'$  中无最小数, 则称  $A|A'$  定义了一个无理数  $\alpha$ .

例如, 在例 3 中的分划  $A|A'$  就定义了一个无理数  $\sqrt{2}$ .



## 2. 实数及其顺序性和稠密性

**定义 3** 全体有理数和全体无理数, 统称为实数.

在前述约定(若分划  $A|A'$  定义有理数  $r$ , 则  $r \in A'$ )之下, 任意一个实数  $\alpha$ , 都可理解为一个定义它的有理数的分划  $A|A'$ . 这样, 就可用有理数的分划来定义实数的大小了.

**定义 4** 设有有理数分划  $A|A'$  及  $B|B'$  分别定义实数  $\alpha$  及  $\beta$ . 若  $A=B$ , 则称这两个分划相等. 当且仅当两个分划相等时, 称  $\alpha$  与  $\beta$  相等, 记为  $\alpha = \beta$ .

**定义 5** 设有有理数分划  $A|A'$  及  $B|B'$  分别定义实数  $\alpha$  及  $\beta$ , 当且仅当  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$  时, 称  $\alpha$  小于  $\beta$  (或  $\beta$  大于  $\alpha$ ), 记为  $\alpha < \beta$  (或  $\beta > \alpha$ ).

现在来证明, 实数满足以下两条顺序公理:

1°. 任意二实数  $\alpha, \beta$ , 必有下列关系之一:

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \alpha < \beta.$$

**证** 设  $\alpha, \beta$  分别由分划  $A|A', B|B'$  所定义, 则下集  $A, B$  之间必有下面三种关系之一:

若  $A=B$ , 则  $\alpha = \beta$ ;

若  $A \supseteq B$  且  $A \neq B$ , 则  $\alpha > \beta$ ;

若  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$ , 则  $\alpha < \beta$ .

2°. 若  $\alpha < \beta, \beta < \gamma$ , 则  $\alpha < \gamma$ .

**证** 设  $\alpha, \beta, \gamma$  是由分划  $A|A', B|B', C|C'$  来确定的. 若  $\alpha < \beta$ , 则  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$ ; 又由  $\beta < \gamma$ , 得  $B \subseteq C$  且  $B \neq C$ . 因此,  $A \subseteq C$  且  $A \neq C$ , 即  $\alpha < \gamma$ . ■

其实, 实数也满足顺序公理的其他条款:

3°. 若  $\alpha < \beta$ , 则  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ .

4°. 若  $\alpha < \beta$  且  $\gamma > 0$ , 则  $\alpha\gamma < \beta\gamma$ .