高等学校教材

导波中不连续性问题

张 钧 编著

国防科技大学出版社

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1986—1990年编审出版规划，由电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论教材编审小组征稿，推荐出版，责任编委饶克谨教授。

本教材由国防科技大学张钧教授编著，北京理工大学楼仁海教授担任主审。

本教材是为电磁场与微波技术专业及电子学与通信类的其它专业的研究生课程编写的，也可作为本科生高年级选修课使用。本课程的参考学时为40～60学时。其主要内容为分析导波不连续性问题的各种解析法，也涉及一些与解析法有紧密联系的数值解法。为了便于读者系统地掌握导波不连续性这类边值问题的各种解析法，全书按照解法分章阐述，包括了近代分析这类边值问题的主要常用方法。第一章是导波不连续性问题的基本概念和各种解法评述。第二章是格林函数法。第三章是场分量匹配法。第四章是准静场法。第五章是变分法。第六章是积分变换法和威纳——霍普法。第七章是简正波法。第八章是积分方程法。第九章是谱域法。为了便于学习和掌握，本书力求对各种解法的基本概念作到深入浅出的阐述，并注意理论联系实际。书中配有一定比重的例题和习题。

本书是在作者多年教学经验和科研实践的基础上写成，并经过多次使用与修改。这次定稿，主审楼仁海教授和编审小组其他同志对本书提出许多宝贵建议与意见，这里表示诚挚的感谢。作者对教研室同事们与国防科技大学出版社同志们的帮助

与支持表示深切的谢意。责任编辑张序君、何晋两同志在加工本书时在文字和编排上作了不少润色，这里也一并致谢。由于作者水平有限，书中难免还存在不少缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

张　钧

1990年1月于国防科技大学

目　录

第一章

绪　论

1.1 波导中不连续性的基本概念

在电磁场理论和微波技术基础课程中，讨论了规则波导理论。规则波导一般是指无限长的直波导，在沿波导的轴线方向（即纵方向）上，波导的参数（指横截面几何形状和尺寸，以及媒质的分布等）都不改变。但在实际工程应用中，除了规则波导以外，还经常遇到完成一定功能的复杂波导元件和装置。在这些波导元件和装置中，波导的参数沿纵向变化，称为波导中的不规则性，也常称为波导中的不连续性。研究波导中的不连续性问题，不但发展了规则波导理论，而且更重要的是，它具有了工程实用价值。正是由于在波导中引入各种类型的不连续性，才使设计者构成了能完成各种功能的实用导波系统。

规则波导可分为封闭波导和开波导两种类型。封闭波导具有封闭金属屏蔽结构（如常见的同轴线，矩形或圆形波导），在其内可能存在无穷多个离散波型，一般包括有限个传输波型（非消失波）和无穷多个非传输波型（消失波）。开波导不具有封闭金属屏蔽结构（如介质波导，H形波导），因此，在开波导中并不存在无穷多个离散波型，而只存在着有限个离散的传输波型和具有连续谱的散射场波型。尽管规则的封闭波导和开波导中存在的波型不同，但规则波导都有一个共同的特点，即在其内存在的一系列波型中，各波型之间都是彼此独立的，它们

之间不存在耦合。但在波导中引入不连续性后，这些波型就不再单独存在了，而是通过不连续性引起各波型之间的相互耦合。也就是说，此时在不连续性处将产生一系列波型，总场只有用所有波型的组合来描述，这样才能满足不连续性处的边界条件。所以，波导中的不连续性问题是电磁场边值问题的一个重要领域。求解电磁场边值问题是一个十分复杂的问题，涉及到许多方法和应用数学问题，这是本书研究的主题，以后将详细讨论。

以上简述了波导中的不连续性问题本质上就是一个电磁场边值问题。但从波导的作用是传输能量的观点来看，在波导中引入不连续性后，将使整个波导传输特性发生变化。从应用观点来看,如果我们只需要考虑不连续性对传输波的影响,那么我们可以将此波导用一等效传输线来表示，而不连续性对传输波的影响就可以在此等效传输线上加入适当的等效网络来表示。这样做的目的，不仅仅是使所研究的问题比较形象和直观，更重要的是想通过此等效网络模型的建立，使我们有可能利用已有的网络分析和综合理论来分析和设计各类波导元件。大家知道，对于较复杂的波导元件（例如微波滤波器、宽带阻抗匹配器等）来说，只利用电磁场理论来研究它是困难的，因此还经常利用熟知的网络理论(即路的方法)进行分析和设计。为此，就必须将波导元件和系统等效为网络。例如，对只有一个端口的波导元件,当只有主模是传输波时,则需要知道其输入阻抗。对于具有二个端口的波导元件，则需要等效为一个四端网络。

确定波导中不连续性的等效网络参量的主要方法有二：一是用实验的方法，通过测量技术来确定。二是用场的方法，即通过解电磁场边值问题来确定。初看起来，后一方法似乎又回到原来问题了，但这种情况与开始提到的单纯用场方法不同。

因为对一个较复杂的波导元件或系统来说，它可能是由若干波导中的不连续性组合构成的，对这样的系统完全用场的方法来分析和设计是困难的。但是，如果我们将此系统分解为由若干较简单的波导不连续性组成，每一个较简单的波导不连续性是较易通过场的方法来确定其等效网络的，然后再利用网络理论来分析和综合若干个等效网络所组成的复杂网络，从而完成对复杂波导元件的分析和设计。所以说，波导元件的分析和设计是将各种可能的方法（场和路的方法，实验法，物理概念的判断等等）巧妙地结合起来。而本书的任务就是研究用场的方法求波导中的不连续性的等效网络参量。

波导中不连续性的结构形式很多，很难用一种标准确切地划分出它们的类型。目前，一种比较常用，而又能包括各种形式的不连续性的划分方法是，按不连续性的等效网络形式来划分。这样，波导中不连续性可划分为二端网络，四端网络和2N端网络（$N=3,4,\cdots$）。按此还可以进一步划分为线性和非线性网络，无耗和有耗网络，互易和非互易网络等等。如果按波导不连续性所构成的波导元件功能来划分，那么划分的种类就更多了，也很难罗列全面，这里仅举一些例子。例如，连接两段波导的连接元件有拐角，扭转弯曲和旋转关节等。用作匹配和组成复杂元件（如滤波器等）的元件有膜片，销钉，阶梯过渡，填充金属或介质障碍物等。用作波型变换的元件有矩-圆变换，同轴线-波导变换，微带线-波导变换和介质波导-波导变换等。用作改变传输波幅度和相位的元件有移相器（常用波导中加介质片或其它方法构成）、衰减器（常用波导中加吸收片构成）和隔离器（在波导中加铁氧体构成）等。以上这些元件基本上都可等效为四端网络。用作功率分配的元件包括各种波导分支（如T形分支，魔T、环行分支等）、定向耦合器

（常用波导之间开小孔或缝构成）和环行器（在波导分支中加入铁氧体构成）等。显然，这些元件都等效为$2N$端网络，例如微波技术中常用的魔T就等效为八端网络。还可按波导中不连续性沿纵向变化的特点划分为单突变，双突变，多重突变和渐变过渡等，这种划分对用场的方法来分析不连续性是有利的，下面我们将较为仔细地讨论。

在图1.1上图(a)和(b)示出的是二个单突变的实例，图(a)是在矩形波导$z=0$处放置一无限薄的金属膜片，图(b)是在矩形波导$z=0$处存在E面阶梯过渡。它们的共同特点是在$z>0$和$z<0$的两个区域都是规则波导，即为均匀区域，而不连续性仅发生在$z=0$处。也就是说处理这类边值问题，只要写出两边规则波导可能存在的所有波型组合的总场，再利用两边的电场和磁场切向分量在$z=0$平面应当满足的边界条件，则根据唯一性定理就可唯一地确定出所有波型的模系数，即解出总场。这是不连续性的最基本形式。在图(c)上示出了它们的等效网络，由于图(a)膜片两边波导相同，所以两边的等效传输线特性阻抗（或特性导纳）相同，即$z_{c1}=z_{c2}$.

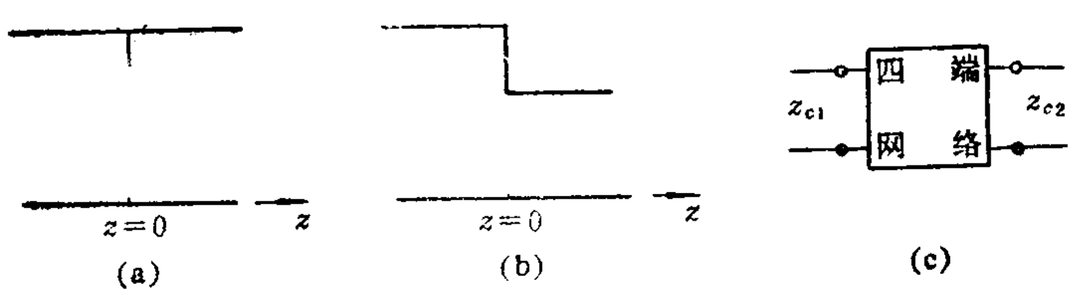

图 1.1 单突变不连续性的举例及其等效网络

图1.2示出了双突变的两个实例。图(a)是在矩形波导中放置有限厚度的膜片，图(b)是在矩形波导中放置一介质片。双突变是不连续性发生在两个面上，它将整个区域分成三个均匀区

域。如果在每段波导中仅有主模能传输，通常处理这类边值问题有二种方法。一种方法是分别写出三个均匀区域各自可能存在的所有波型组合，然后分别利用 $z=0$ 和$z=L$ 的边界条件列出方程，再解这两个联立方程组，得到如图1.3(a)所示的等效网络。此时，膜片或介质片段已由一个等效四端网络来代替。这样处理是比较严格的，但计算复杂。另一种近似处理方法是，当长度 L 足够大，使在$z=0$处不连续性产生的各个非传输的高次型波的衰减分布场在 $z=L$ 处已很小时，我们就可以忽略两个不连续性处高次模的相互影响。在这个前提下，双突变问题就可以分别用两个单突变来处理，而得到如图1.3(b)所示的等效级联网络，总的传输特性可用网络理论来计算。这样处理可以避免解两个联立方程组的困难，使计算简化。

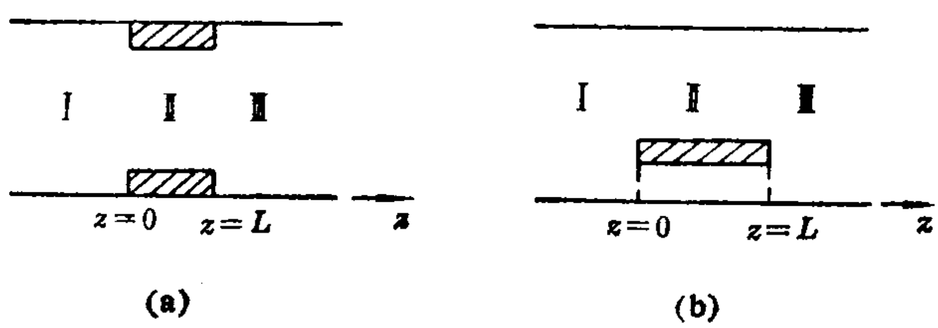

图 1.2 双突变不连续性的实例

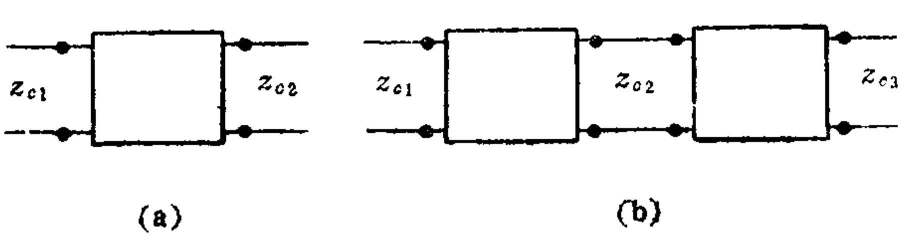

图 1.3 双突变的两种等效网络形式

1.2 波导中不连续性问题的解法

在时谐场中，电磁场边值问题的稳态解是通过解麦克斯韦方程组，并满足边界条件得到的。如果需要求暂态解，则还需要加上初始条件。本书主要讨论稳态解,不涉及暂态解。下面我们将从解的特性及各种数学物理解法这两方面作一简要介绍。

由解答的特性来分类，大致可将解答分为三类。

一、严格解法

这是从麦克斯韦方程组和边界条件出发，能够获得严格解的方法。严格解虽然比较复杂，但在电磁场理论和工程上占有很重要的地位。在数值计算技术日益发展的今天，它仍然是人们感兴趣的方法。这是由于以下几个方面的原因：

1\. 根据边值问题的唯一性定理，严格解的正确性可以通过充分必要条件来检验其正确性。因此，利用严格解可以检验其它近似解或数值解的正确性，也可以用于检验测量设备和方法的正确性。

2\. 通过分析严格解的表达式可以得到许多电磁理论方面的重要规律和结论。

3\. 它是许多近似或数值解法的发展基础，例如几何绕射理论和微扰法等都是在严格解基础上发展起来的。

严格解的主要局限性在于：分析和计算较复杂，目前只有少数典型的电磁场边值问题才有严格解。

二、近似解法

它是指对某一实际边值问题所建立的数学模型，用近似解法得到一个具有明确表达式的解答。例如变分法、微扰法和准静态场法等。这是一种常用的方法，现今仍占有重要地位。它的优点为

1. 有表达式，可以研究各参量之间的关系，计算较简便和省时。

2. 有些近似法借助计算机，原则上可得到你所要求的任意精度。当然，实际上要受计算机容量、速度和舍入误差的限制。

3. 某些近似法，如变分法等可以估计解的误差范围。

近似解的局限性为

1. 某些解的误差或正确性不易估计。现在对许多近似解的误差已有了解，或者已得到一些粗估误差的公式。

2. 它的应用范围虽比严格解法已大大扩展，但仍有许多复杂边值问题无近似解，或虽然得到解，但误差太大而无法实用。

三、数值解法

这是近十几年来发展最快的一种方法。它的突出优点是，原则上适用任何复杂的边界问题，且可得到你所要求的精度。任何数值解法的主要特征都是将连续函数离散化，再解联立方程组或用递推方法得数值解。边界形状愈复杂或要求精度愈高，则方程组的阶数愈高或要求的递推次数愈多。因此，实际上数值解法还要受计算机容量、速度和舍入误差的限制。随着巨型计算机和数值计算方法的发展，将使许多过去只能依靠实验来设计的问题都可借助数值解法来实现，并可做到优化设计。数值解法除受条件和经济限制外，还有一点不足。这就是目前还没有找到一种比较简单的充分必要检验手段来验证解的正确性或估计误差。有的虽有误差估计公式，但又偏于保守而无法实用。目前行之有效的检验手段除实验验证外就是收敛试验，但要以大量消耗机时为代价。

综上所述，三种解法各有特点，它们相互促进，相互补充，不能绝对肯定那一种。但三种解法相比，严格解法和近似

解法发展较早相对比较成熟。所以，目前以数值解法发展更快一些，各种新的数值方法不断出现。

下面我们再按数学物理方法分类来说明各种解法及其特点。由于解法很多，这里我们只能按数学或物理方面的主要特征来说明一些基本和常用的方法。其中一些方法，将在以后各章中详细讨论。同时还应指出，一个具体边值问题往往可用多种解法或需数种方法联合使用，而且在解的过程中还要借助电磁原理和定理。所以下面讨论的方法划分是相对的。

一、分离变量——偏微分方程法

大家知道，静态场边值问题可以归结为解拉普拉斯或泊松方程，再加上边界条件。任意时变场的边值问题为解矢量或标量的、齐次或非齐次的波动方程，再加上初始条件和边界条件。对时谐场边值问题的稳态解，波动方程变成亥姆霍兹方程，此时只需再加上边界条件。

根据唯一性定理知，由 S 封闭面包围的均匀空间，场或位满足麦克斯韦方程组，如在 S 上再满足 E_t 或 H_t 的边界条件，则解将是唯一的。如由两个均匀区域构成在交界面上有不连续性，则在此交界面上还要同时满足 E_t 和 H_t 的边界条件，解才唯一确定。因此，各种边界条件是构成不连续性的传输特性差异的重要特征。为了能用数学表达式写出边界条件，实际不连续性问题的边界必须选择与一组正交曲线坐标系的一个或数个坐标面重合。而且，分离变量法只有在该坐标系的斯达克尔矩阵满足一定条件下才能成立。例如，对于标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0 \tag{1.2-1}$$

目前只有十一种正交坐标系能用分离变量法，它们是直角、圆柱面、球面、椭圆柱面、抛物柱面、抛物面、旋转抛物面、长旋转椭球、扁旋转椭球、锥面和椭球。此外，还有二种坐标通过

适当变换后拉普拉斯方程可分离变量，它们是双球面和环坐标。

对于矢量亥姆霍兹方程除直角坐标系可分解为三个标量亥姆霍兹方程外，其它坐标系就不一定能够直接得到一个到三个标量亥姆霍兹方程。因此，必须找到场矢量与满足标量亥姆霍兹方程的量之间的关系，这有许多方法。例如，圆柱坐标系中 E_z和 H_z 满足标量亥姆霍兹方程，通过求解它们再求场的其余分量。又如有些坐标系，在场满足一定条件下，其中电场和磁场也各有一个分量，满足标量亥姆霍兹方程。解矢量亥姆霍兹方程最常用的一般方法是引入辅助函数，这些辅助函数满足标量亥姆霍兹方程，通过解它再来求场矢量。所以最终的结果还是归结为解标量亥姆霍兹方程。

解标量亥姆霍兹方程还需要一组正交函数完备系来表示。这些函数组由一些普通函数或特殊函数构成。在这些函数中，目前只有三角函数、指数函数、各类贝塞尔函数、各类连带勒让德函数、马许函数和旋转椭球函数等研究比较完善，并有大量公式、数据和图表可供应用。有些函数如拉美函数、贝尔函数、韦伯函数等虽有解的形式、但数据表格不全，所以还不常应用。

对于有源问题（即波导激励问题），需解非齐次标量亥姆霍兹方程。这时，除齐次方程的通解外，还应加一个特解（常为积分形式），才能构成全解。特解一般是用朗斯基行列式的方法得到。如果源为狄拉克 δ 函数形式的点源，还可利用 δ 函数的积分性质来求。

事实上，在高频场中许多问题具有以下特点。对不含源的边值问题，场量或位函数满足齐次标量波动方程，而边界条件常常是非齐次的。对有源边值问题（如波导的激励），场量或

位函数满足非齐次标量波动方程，而边界条件往往是齐次的。根据微分方程理论，一个具有非齐次边界的齐次方程可以化为齐次边界条件的非齐次方程的求解，或者反之。因此，对许多边值问题可以通过两种不同途径求场，视那种更为方便。

分离变量法可得严格解，特别适用于边界形状较规则的问题。例如规则波导，某些渐变过渡波导和弯曲波导等。此法也常用于求波导中的格林函数。分离变量法的缺点是受坐标系的限制。

二、格林函数法——积分法

对于一个已知电流源$\boldsymbol{J}$分布的边值问题，其电场矢量满足

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}-k^2\boldsymbol{E}=-j\omega\mu\boldsymbol{J} \tag{1.2-2}$$

上式是非齐次矢量亥姆霍兹方程。求解它的另一常用且重要的方法就是格林函数法。这种方法的物理概念是很明确的，在求分布源$\boldsymbol{J}$在某点所产生的电磁场时，我们可以先计算一个点源（即狄拉克δ函数）在该点所产生的场，然后把每个点源产生的场相加就得到总场。因此，我们可以定义一并矢格林函数，它满足方程

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{G}-k_c^2\mathbf{G}=-\mathbf{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.2-3}$$

其中$\mathbf{I}$为单位并矢，δ为狄拉克δ函数。$\mathbf{G}$为并矢格林函数，它代表一个点源产生的场。如已知$\mathbf{G}$，则将式（1.2-2）和式(1.2-3)代入并矢格林公式，可得总场

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=&j\omega\mu\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot\mathbf{G}(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})dv'\\&-\int_S[j\omega\mu(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}'))\cdot\mathbf{G}(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'))\\&\cdot\nabla'\times\mathbf{G}(\boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r})]ds'\end{aligned} \tag{1.2-4}$$

由上式可知，如已知体积V内$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$和边界面$S$上的$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$

和$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$，并已求出G，则可由上式求出$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$．可见，格林函数法实质是把微分方程加边界条件的问题转化为一个积分问题，它已包含了边界条件。在实际问题中，我们往往只知道边界S上的$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$中的一个。根据场的唯一性定理，场应唯一确定，而直接利用式(1.2-4)却无法确定。为此，我们可规定G的边界条件。如已知S上$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$，则规定在$S$上

$$\boldsymbol{n}\times\mathbf{G}=0 \qquad (1.2\text{-}5)$$

称为第一类电并矢格林函数。此时，式(1.2-4)的面积分项中包含$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$的第一项消失。

当已知S上$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$时，则规定在$S$上

$$\boldsymbol{n}\times\nabla'\times\mathbf{G}=0 \qquad (1.2\text{-}6)$$

称为第二类电并矢格林函数。此时，式(1.2-4)的面积分项中包含$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$的第二项消失。

格林函数的种类很多，求解它的方法也很多。例如，分离变量法，本征函数展开法（又称欧姆——瑞利法），镜象法，傅里叶或拉普拉斯变换法、复变函数法等。目前对各种典型边界形状的格林函数已在许多文献中列出，可以直接加以利用。

格林函数法的用途也非常广泛，其主要用途有：

1. 已知S内源分布$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$和$S$上边界条件之一，可以利用此法求场的严格解。

2. 如源分布未知，可以根据概念和经验，假设一近似分布，根据此法求出近似解。特别是，此时如再配合变分法，可得到较准确的结果。在解波导中膜片一类不连续性和波导激励问题时，我们可以见到利用此法与变分法相结合的例子。

3. 如需求上一问题的严格解或近似解，利用格林函数可方便地建立积分方程，再利用积分方程法求出源分布或场。本书也将讨论这一应用。