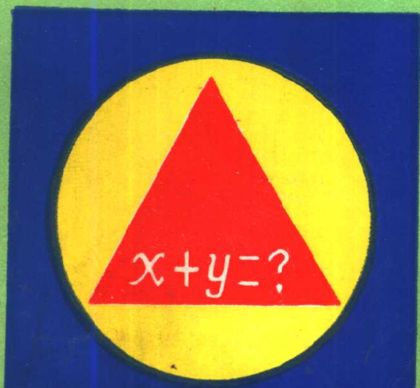
智力测验数学百题

〔波〕Г·什琴卡乌兹 著
李书波 译



黑龙江科学技术出版社

智力测验数学百题

ZhLi Ceyan Shuxue Bai Ti

〔波〕 Г·什琴卡乌兹 著

李书波 译

黑龙江科学技术出版社

一九八六年·哈尔滨

责任编辑：刘秉谦
封面设计：秉 忠

智力测验数学百题

〔波〕 Г.什琴卡乌兹著
李书波 译

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
依安印刷厂印刷・黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米32开本5.5印张110千字
1986年2月第1版・1986年2月第1次印刷
印数：1—7,100 册
书号：7217・042 定价：0.93元

前　　言

本书作者古果·什琴卡乌兹是著名的波兰学者、享有世界声誉的波兰数学学派的创始人之一。他写过不少数学书和科普文章。1938年问世的《数学万花筒》被比喻为别具一格的“数学动物园”。这本卓越的著作曾先后被译成英、俄、匈、捷、德等多种文本，至今仍闻名于世。

《智力测验数学百题》是一本启发学生智力的通俗读物。书中习题大部分属于中等数学的范畴，少数题目虽属高等数学，但也不难为中学生所理解。书中选题构思新颖，解答方法巧妙，语言明瞭易懂。本书从大家所不熟悉的侧面向读者提出并解答了初等数学的有关问题，从而引导读者深入思考问题，开扩思路，启迪智慧，培养对数学的兴趣。

本书适于高中生阅读，也可供中学数学教师和大学低年级学生参考。译文删去了原书的第六章“沙拉杰克博士的数学猎奇”和第七章“未列出解答的问题”。

本书由王荣兰同志审校。

译　者

目　　录

题　目　部　分

解 答 部 分

题目部分

第一章　数、等式和不等式

1．乘法表的练习．构造如下数字序列：令第一个数字是 2，随后是 3，

$$2\cdot3=6$$

序列的第三个数字取 6；

$$3\cdot6=18$$

第四个数字取 1，而第五个取 8；

$$6\cdot1=6\qquad1\cdot8=8$$

第六个数字是 6，然后接着是数字 8 等等．

于是我们得到数字序列：

$$2\ \ 3\ \ 6\ \ 1\ \ 8\ \ 6\ \ 8\cdots$$

序列中两个相邻数字下面的小弧形，表示这两个数字相乘，并将其积的数字依次往后排；例如，现在接下去是 8 乘以 6，就把数字 4 和 8 依次排在后面，…．相乘的数字永远不会缺少，因为每乘一次，小弧形只向后移动一步，而得到的结果至少是一位数字，因此数字序列可以无止境地排列下去．

试证明：数字 5，7，9 永远不会在这个序列中出现．

2．数的一个有趣的性质．在十进制记数法中，写出任意一个自然数（例如：2583）．并算出这个数各数字的平方和（$2^2+5^2+8^2+3^2=102$）．将得到的数再求各数字的平方和（$1^2+0^2+2^2=5$），照此一直进行下去，

$(5^2=25,\ 2^2+5^2=29,\ 2^2+9^2=85,\ \cdots)$.

证明：如果每次平方和都不为1（显然，在出现数1之后，1将无限地重复下去），那就必定会出现数145，随后便出现

145，42，20，4，16，37，58，89的周而复始的循环.

3．能被11整除的数. 证明，对任意的自然数 k，数

$$5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$$

能被11整除.

4．数的可约性. 证明数

$$3^{105}+4^{105}$$

能被13，49，181和379整除，但不能被11整除.

5．简化的费马定理. 如果 x，y，z，n 都是自然数，并且 $n\geqslant z$，那末等式 $x^n+y^n=z^n$ 不可能成立.

6．数的分布. 求十个这样的数 x_1，x_2，x_3，x_4，…，x_{10}，使

数 x_1 位于区间〔0，1〕内，

数 x_1 和 x_2 分别位于这个区间的前半部分和后半部分，

把区间等分为三部分，数 x_1，x_2，x_3 的每一个位于其中一部分内，

……

最后，把区间〔0，1〕分成为10个相等的部分，使数 x_1，x_2，…，x_{10} 的每一个都位于其中的某一部分内.

6a．推广. 在前一题中，如果寻找的不是10个而是 n 个数（n 是任意自然数），使它们满足 n 个同样的条件，问

题还能解吗？

7．字母的排列．由字母组 $aabbcc$ 可以得出 90 种不同的排列．在排列 $aabcbc$ 中，用字母 c 代替字母 b，并且用字母 b 代替字母 c，可以得到排列 $aacbcb$；如果反序读它，由排列 $aacbcb$ 可以得到排列 $bcbcaa$；而由最后这个排列借助于字母代换又可以得到排列 $acacbb$，等等．

所有经以上变换得到的排列，例如：$aabcbc$、$aacbcb$、$bcbcaa$、$acacbb$，可以认为它们是没有本质区别的．但是，例如排列 $aabcbc$ 和 $abcbca$，无论是用字母代换，还是写成相反的次序，或者是多次运用这些变换，都不能把一个排列变成另一个排列．因此，我们认为它们是有本质区别的．

问字母组 $aabbcc$ 有多少种本质不同的排列？

8．比例．数 A、B、C、p、q、r 之间有下列关系：

$$A:B=p \quad B:C=q \quad C:A=r$$

试写出比例式：

$$A:B:C=\square:\square:\square$$

使在该式中的空格处都是由 p、q、r 组成的表示式，并且当把这些表示式中的字母 p、q、r 轮流代换时，可由一个式子得到另一个式子．（如用 q 代替 p，用 r 代替 q，而用 p 代替 r，则第一个表示式变为第二个，第二个表示式变为第三个，而第三个变为第一个）．

9．对称式．象 $x+y+z$ 和 xyz 这样的代数式是对称的．我们说一个代数式是对称的，是指当任意对换它的变量 x、y、z 时，表示式的值不变．以上两例的对称性是明显的；但也有对称性不明显的对称式，例如：

$$|\,|x-y|+x+y-2z\,|+|x-y|+x+y+2z$$

试证明这个代数式的对称性，并确定它有怎样形式的值，从而使其对称性变为明显的.

10. 根的无理性. 用初等方法证明，方程

$$x^5+x=10$$

的正根是无理数.

11. 不等式. 证明不等式：

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}$$

$$>\frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r},$$

其中所有字母都表示正数.

12. 数列. 设 a_0，a_1，a_2，… 是正项数列，其中 $a_0=1$，且当 $n=0$，1，2，…时有 $a_n-a_{n+1}=a_{n+2}$. 证明：这样的数列存在而且是唯一的.

第二章　点、多边形、圆、椭圆

13．平面上的点．在平面上取定几个（或几十个）点．用直线段将每个点与离它最近的一个点连接起来．假定每一点到其它各点的距离均不相等，这样在作连线时就不会在谁是最近点的问题上产生疑问．

试证明：在这样连接所得到的图形中，既不含有封闭的多边形，也不含相互交叉的线段．

14．角的研究．设 x_1，x_2，…，x_n 都是正数．在平面上选定射线 OX，在 OX 上截取 $OP_1=x_1$，然后在 OP_1 的垂线上截取 $P_1P_2=x_2$，再在 OP_2 的垂线上截取 $P_2P_3=x_3$，等等，一直到截取 $P_{n-1}P_n=x_n$．在每次确定垂线的方向时，都要使直角左侧的边通过 O 点．因此可以计算射线 OX 绕 O 点沿逆时针方向旋转（从开始的位置依次通过点 P_1，P_2，…，直到最后的位置 OP_n）的角度．

证明：对给定的数 x_i（$i=1, 2, \cdots, n$），如果它们按编号的顺序是递减的即：$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，这个角将是最小的；而若它们按编号是递增的，这个角将是最大的．

15．三角形的面积．用几何方法证明：在三角形中，如果 $\angle A=60^\circ$，则三角形的面积 S 由公式

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right] \qquad (1)$$

确定；若$\angle A=120^{\circ}$，则

$$S=\frac{\sqrt{3}}{12}\left[a^{2}-(b-c)^{2}\right] \qquad (2)$$

16．等分三角形的周长．对任意三角形我们都可以用一条直线把它的周长等分为两半，甚至事先规定了直线的方向也可以．如果我们在两个不同的方向上这样进行两次，那末，两截线必交于某点Q．于是，通过Q点就有两条等分周长为两半的直线．

是否存在这样的点，通过该点可以作出三条这样的截线？如果存在，怎样找到它们？

17．重心．设P是三点A、B、C的重心（这里所说某三点的重心，是指质量相同的三个点的重心）．令A_1、B_1、C_1分别为三点组B、C、P；C、A、P；A、B、P的重心．

证明：A_1，B_1，C_1的重心仍是点P．

18．三角形的分割．把一个三角形分为19个小三角形，使所得图形的每个顶点（包括大三角形的顶点）都会集着同样数目的边．

本题中19这个数还可以换成别的数，但这些数只能比19小，不能比19大．试问它们是些什么数？

19．三角形．在平面上给定$3n$个点（n表示自然数），其中任何三点都不在同一直线上．由这些点（作为顶点）能否构成n个三角形，它们既不交叉也不互相包含？

类似的问题还有，当给定$4n$个点时作成n个四边形，当给定$5n$个点时作成n个五边形等等，所有这些问题都能有肯定的解答吗？