财经高等专科学校系列教材

经济应用数学

〈线性代数与线性规划〉

王景琰　李桂荣　主编

延边大学出版社

前　言

本书是根据国家教委1989年12月在广州召开的高等专科教育会议精神，参照财政部教育司1991年3月审定的《高等财经专科学校（经济应用数学）教学大纲》而编写的。在编写过程中，针对了财经专科的实际，为提高学生分析问题，解决问题的能力以适应经济发展的需要。同时吸取了国内有关教材、资料的长处并结合多年的教学实践编写了本书。

本书力求以通俗易懂的语言、由浅入深的方式介绍线性代数最基础的知识。第一章中由二元一次方程组引出n阶行列式的概念；第二章在提出矩阵的概念和运算的同进还给出了矩阵乘法的计标程序，为学生今后的学习奠定了基础；第三章应用矩阵这一有力工具讨论了线性方程组解存在的条件和解的结构，给出了几种常用的线性方程组解法。第四章中也加重了应用的内容，应用向量组正交化理论求解矛盾线性方程组。第六、七章通俗地介绍了线性规划问题的单纯形方法，为今后的应用又介绍了改进单纯形方法。第八章介绍了投入产出数学模型，旨在为今后的应用奠定了基础。

参加本书编写的有辽宁财政高等专科学校张有绪（第一、八章）、李桂荣（第二、五章）、王景琰（第三、四章）、陈伟（第六、七章）等同志。全书由王景琰副教授统稿。该教材在编审过程中，得到了辽宁财政高等专科学校有关领导及同行的大力支持和协助，殷继润、韩向阳副教授对全书进行审定，谨在此致以衷心的谢意。

由于我们经验不足和时间紧迫，书中难免会有这样和那样不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

一九九八年三月

目　　录

第一章　行列式…………………………………………（1）

§1.1　n 阶行列式 ……………………………………（1）

§1.2　行列式的性质 …………………………………（9）

§1.3　行列式的计算…………………………………（15）

§1.4　克莱姆（Cramer）法则………………………（22）

习题一 ……………………………………………（27）

第二章　矩　　阵 ………………………………………（32）

§2.1　矩阵的概念……………………………………（32）

§2.2　矩阵的运算……………………………………（38）

§2.3　分块矩阵………………………………………（51）

§2.4　逆矩阵…………………………………………（59）

§2.5　矩阵的初等变换………………………………（67）

习题二 ……………………………………………（80）

第三章　线性方程组 ……………………………………（95）

§3.1　n 维向量的概念 ………………………………（95）

§3.2　向量间的线性关系……………………………（99）

§3.3　向量组和矩阵的秩 …………………………（108）

§3.4　线性方程组解的讨论 ………………………（123）

§3.5　线性方程组解的结构 ………………………（130）

§3.6　线性方程组的数值方法 ……………………（158）

习题三……………………………………………（181）

第四章　向量空间………………………………………（190）

§4.1　向量空间的概念 ……………………………（190）

§4.2　子空间 ………………………………………（196）

§4.3　内积、距离与夹角 …………………………（201）

§4.4　内量组的正交化 ……………………………（208）

§4.5　正交矩阵 ……………………………………（219）

§4.6 正交向量组的应用
——最小平方偏差问题………………………… (225)
习题四…………………………………………… (236)
第五章 特性值问题与实二次型………………… (240)
§5.1 特征值与特征向量 ……………………… (240)
§5.2 相似矩阵 ………………………………… (260)
§5.3 实二次型与矩阵的合同 ………………… (266)
§5.4 实二次型的标准型 ……………………… (275)
§5.5 正定二次型 ……………………………… (282)
习题五…………………………………………… (289)
第六章 线性规划问题…………………………… (290)
§6.1 线性规划问题的数学模型 ……………… (290)
§6.2 图解法 …………………………………… (297)
§6.3 线性规划问题解的性质 ………………… (302)
习题六…………………………………………… (305)
第七章 单纯形式………………………………… (311)
§7.1 线性规划问题的标准型 ………………… (311)
§7.2 单纯形法的引入 ………………………… (321)
§7.3 单纯形表 ………………………………… (328)
§7.4 改进单纯形法 …………………………… (344)
习题七…………………………………………… (353)
第八章 投入产业数学模型……………………… (357)
§8.1 投入产出表 ……………………………… (357)
§8.2 平衡方程组 ……………………………… (360)
§8.3 直接消耗系数 …………………………… (363)
§8.4 完全消耗系数 …………………………… (370)
§8.5 投入产业法在计划调整中的应用 ……… (373)
习题八…………………………………………… (375)

第一章　行列式

行列式是线性代数的一个重要概念，它在数学的许多分支与其他学科中也有广泛的应有。本章先从解二元、三元线性方程组着手引入二阶、三阶行列式，进而引出 n 阶行列式的定义，讨论 n 阶行列式的性质与计算方法，最后介绍克莱姆法则解线性方程组。

§1.1　n 阶行列式

一、二、三阶行列式

1. 二阶行列式

行列式的概念是由解线性方程组问题引入的，如解二元线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法可以得出，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解。

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

这就是二元一次方程组的求解公式。

为了便于记忆这个表达式，我们引入二阶行列式的概念。

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称它为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

上式左边横排叫行，纵排叫列，其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为二阶行列式的元素，元素 a_{ij}的第一个下标 i 表示它所在的行，第二个下标 j 表示它所在的列。

二阶行列式共有 $2^2=4$ 个元素组成。

二阶行列式表示两项代数和且一正一负，可用对角线法则来记忆；主对角线上（从左上角到右下角）两个元素的乘积取正号；副对角线上（从右上角到左下角）两元素的乘积取负号。

可见，二阶行列式的每一项取自不同行不同列的 2 个元素的乘积。

用二阶行列式可将方程组（1）的唯一解表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

为了方便，方程组（1）的解可简记为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad (D \neq 0) \tag{3}$$

行列式 D 中的元素都是方程组（1）中未知数 x_1，x_2 的系数，D 称为方程组（1）的系数行列式。D_1，D_2 是用常数项 b_1，b_2 分别替换系数行列式 D 中第一列，第二列的元素后所得到的两个二阶行列式。

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 13 \\ 3x_1 - 4x_2 = -6 \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-17\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix}13 & 3\\ -6 & -4\end{vmatrix}=-34,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 13\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-51$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-34}{-17}=2$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-51}{-17}=3$

2．三阶行列式

三元一次线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{4}$$

与二元一次线性方程组类似，可用加减消元法求出（4）的解。

当 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$ 时，方程组（4）有唯一解：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{32}a_{23}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13})\\ x_2=\dfrac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-a_{11}b_3a_{23}-a_{21}b_1a_{33}-a_{31}b_2a_{13})\\ x_3=\dfrac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{31}a_{12}b_2-a_{11}a_{32}b_2-a_{21}a_{32}b_3-a_{31}a_{22}b_1)\end{cases}$$

这就是三元一次线性方程组（4）的求解公式。为了便于记忆这个公式，我们引入三阶行列式的概念。

我们用记号：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称它为三阶行列式，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式表示的代数和可用对角线法则来记忆。如图 1—1 从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元素相乘取负号。

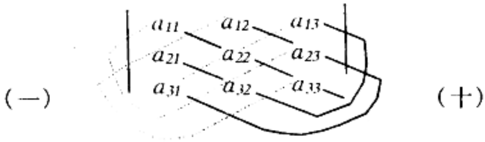

图 1—1

三阶行列式有三行、三列共 $3^2=9$ 个元素组成。

三阶行列式表示的是 $3!=6$ 项代表和且三正三负。每一项是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积。

用三阶行列式可将方程组（4）的唯一解表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}\qquad (D\neq 0)$$

其中 D_1，D_2、D_3 是用常数项 b_1、b_2，b_3 分别替换系数行列式 D 中的第一列，第二列，第三列的元素后所得到的三个三阶行列式。

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=-9 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-2)+6-1-3+4=5\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ -9 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-5 \qquad D_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -9 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -9\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=15$$

所以　　$X_1=\dfrac{D_1}{D}=-1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=3$

二、n 阶行列式

我们先来定义 n 阶行列式，仿照二、三阶行列式的定义，记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

它由 n 行 n 列元素（共 n^2 个元素）组成，称之为 n 阶行列式，其中 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}称为主对角线上的元素。

现在我们用递推的办法来定义 D 的值。

为此，先定义一阶行列式：由一个元素组成的行列式称为一阶行列式且其值为它本身。即：　$|a|=a$。

我们再来看二、三阶行列式，由前面研究得知：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{22}$$

$$=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}| \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} \tag{6}$$

由（5）、（6）两式可以看出：

1．一个三阶行列式可由三个二阶行列式来表示，即可知计算行列式的值要降阶，即由三阶化为二阶，再由二阶计算出行列式的值。

2．第一行的元素与相应的行列式乘积的代数和为行列式的值。所谓相应的行列式即为划去此元素所在的行与列乘下的元素所组成的。

3．正负号相间。

综上所述，则可推出 n 阶行列式的值。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

再将 $n-1$ 阶行列式化为 $n-2$ 阶，$n-2$ 阶化为 $n-3$ 阶，……，最后便可求出 D 的值。

n 阶行列式表示的是 $n!$ 项的代数和，且正负各半，每一项都是 D 中属于不同行不同列的 n 个元素的乘积。通常 n 阶行列式 D 可简写成 n 阶行列式 $|a_{ij}|$。

例3　求 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值

解：$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$=2(4-1)+(-2-4)+3(-1-8)$$
$$=6-6-27=-27$$

例4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解： $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

此行列式的特征是主对角线上方的元素全为零，我们称它为下三角行列式。同样若主对角线下方的元素全为零则称为上三角行列式。

同理可求得上三角行列式的值。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

上、下三角行列式统称为三角行列式，它的值等于主对角上元素的乘积。

特别地，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

此行列式称为对角行列式，它的值也等于主对角线上元素的乘积。

三、几个概念

1. 转置行列式

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 则: \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 余子式与代数余子式

把 n 阶行列式中某一元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去后，剩下的元素按原来的次序排列所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，并把 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如 四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{21} 及 a_{32} 的代数余子式分别为：

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

又如，二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ 中，元素 -2 的余子式为 $M_{12}=|-4|=-4$，代数余子式为：$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)$

$\cdot(-4)=4$

利用余子式与代数余子式的概念，则得 n 阶行列式的值为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

即，n 阶行列式 D 等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和，此式亦称为 n 阶行列式按第一行的展开式。

§1.2　行列式的性质

根据定义计算行列式是很烦琐的，如一个五阶行列式是一个 $5!=120$ 项的代数和，每一项是取自不同行不同列的 5 个元素的乘积。因此有必要研究行列式的性质，利用性质来简化行列式的计算，本节列举的行列式的基本性质，一般地用三阶行列式加以验证，只对部分性质给予了严格的理论证明。

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$

证　用三阶行列式验证。

因为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

而：

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$

所以 $D=D^T$

根据性质1可得，在行列式中，行与列的地位是相同的，因此，下面关于行列式其他性质的讨论我们仅对行列式的行证明即可。

性质2 交换行列式的两行（列），行列式的值变号，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明略。

例如 $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}=36$

交换第二，第三行，得：

$$D_1=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-36$$

所以 $D=-D_1$

推论 如果行列式中有两行（列）元素对应相等，则行列式的值为零。

证 把行列式 D 中相同两行交换后行列式不变，即仍为 D。但由性质2有 $D=-D$，即 $2D=0$，于是 $D=0$。

例如 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$

性质3 用数 k 乘行列式任一行（列）的所有元素，等于用数 k 乘这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这里不作详细证明，只叙述证明方法。

（1）若用数 k 乘行列式 D 的第一行，则由定义按第一行展开，并提出公因子 k，即得 kD。

（2）若用数 k 乘行列式 D 的第 i 行，则将所得行列式的第一行与第 i 行交换后，利用（1）将公因子提到行列式外，然后再交换第一行与第 i 行，即得 kD。

推论1　若行列式的某一行（列）的各元素有公因子 k，可把 k 提到行列式外面。

推论2　若行列式的某一行（列）各元素都是零，则这个行列式的值等于零。

推论3　若行列式中有两行（列）的元素对应成比例，则这个行列式的值为零。

证　由推论1，把行列式中两行的比例系数提到行列式外面来，则行列式中有两行元素相同，又由性质2的推论，此行列式等于零。

性质4　若行列式的某一行（列）的各元素都是两数之和，则可将其写成两个行列式之和，这两个行列式分别以这两个数中之一为对应位置的元素，其余位置元素与原行列式相同，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 104 & 402 & 797 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

解： 由性质 4、性质 3 的推论 3 及性质 2 推论，有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 104 & 402 & 797 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 100 & 400 & 800 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

性质 5 将行列式中某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，则行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个性质用性质 4 与性质 3 的推论即可证明。

性质 6 n 阶行列式D 等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (7)$$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ (8)

证 将 n 阶行列式D 的第i 行顺次与第$i-1$，$i-2$，…，2，1 行互换，即共进行了 $i-1$ 次互换，有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把所得行列式按第一行展开，可以看到此行列式的第一行元素 a_{ij} $(j=1,\ 2,\ \cdots n)$ 的余子式 $\overline{M}_{1j}$ 与原行列式D 的第i 行元素 a_{ij} $(j=1,\ 2,\ \cdots n)$ 的余子式 M_{ij} $(j=1,\ 2,\ \cdots n)$ 对应相等，即 $\overline{M}_{1j} = M_{ij}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots n)$，故有：

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i-1}\ [a_{i1}\ (-1)^{1+1}\overline{M}_{11} + a_{i2}\ (-1)^{1+2}\overline{M}_{12} \\ &\quad + \cdots + a_{in}\ (-1)^{1+n}\overline{M}_{1n}] \\ &= a_{i1}\ (-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}\ (-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots a_{in}\ (-1)^{i+n}M_{in} \end{aligned}$$