LIAN XU TI
LI XUE GAILUN

# 连续体力学概论

熊祝华　杨德品　编著

湖南大学出版社

# 连续体力学概论

熊祝华　杨德品编著

湖南大学出版社

## 内 容 简 介

本书是连续体力学的入门书，系统地阐述了连续体力学的基本概念、原理和定理；内容包括张量的概念及运算法则，正交曲线坐标系的转换，变形、运动及应力的分析，守恒定律，力学本构方程的一般原理及若干具体物质力学本构方程的建立。书中采用笛卡尔张量分析问题，利用余弦交换矩阵可将所得结果转换到任意正交曲线座标系，公式简洁实用。全书深入浅出，概念清晰，可作为工程力学专业及有关工程专业的本科生、研究生的教学及参考用书，亦可作有关教师及科技工作者的参考用书。

**连续体力学概论**

熊祝华　杨德品编著

☆

湖南大学出版社出版

湖南大学印刷厂印刷

湖南省新华书店发行

☆

787×1092毫米　1/32　8.5印张　191千字

1986年5月第一版　1986年5月第一次印刷

印数：1—3400

统一书号：13412·4　定价：1.95元

# 前　　言

连续体力学是一门统一研究宏观连续物质（包括固体和流体）普遍适用的力学原理的学科；它的主要内容包括变形的几何理论，运动和应力的分析，质量、动量和能量的守恒定律，力学本构方程的理论和原理，以及各种流体和固体的本构方程等。人们学习和掌握连续体力学的基本内容，有助于更好地学习固体力学和流体力学的各个分支。而固体力学和流体力学正日益成为工程科学的重要基础。

本书是一本连续体力学入门书，限于在正交曲线坐标系内讨论问题。由于在引进余弦变换矩阵后，可以比较方便地将笛卡尔坐标系的张量表述式和有关公式转换成任何正交曲线坐标系的相应公式，从而使我们有可能只采用笛卡尔张量分析有关问题，以利于读者学习和理解，然后通过转换关系将所得结果转换到任何正交曲线坐标系。鉴于在实际中，正交曲线坐标系仍然是被广泛应用的坐标系，所以，本书既保留了用笛卡尔张量分析问题的优点——简明易懂，便于学习和掌握，又具有较为广泛的实用性。

为了方便读者学习和理解，本书在内容编排和叙述方面，力求由浅入深，简明易懂；特别注重于讲清基本概念、原理和定理，以利于读者进一步学习连续体力学和有关力学分支，从事这方面的教学和科研工作。

本书共分十章，包括四个方面的内容。第一、二、六章介绍张量的基本概念。基本运算法则，正交曲线坐标系的转

换关系式；第三、四、五章是关于变形、运动和应力的分析；第七章介绍守恒定律；第八、九、十章阐明力学本构方程的一般原理及若干具体物质力学本构方程的建立。本书可作为工程力学专业和有关工程专业的本科生、研究生的教学和参考用书，也可作为有关教师和科技工作者的参考用书。

在本书的编写过程中，熊慧而同志校对和抄写了全书手稿，郑泉水同志收集了部分习题和思考题，作者在此一并表示衷心的感谢。由于我们缺乏经验，水平有限，书中难免有错误和不当之处，恳请专家和读者批评指正。

一九八六年三月

# 目　录

# 第 1 章

# 基矢　张量　正交变换

本章讨论笛卡尔坐标系基矢与正交曲线坐标系基矢的转换关系，以及张量的一些基本性质。作为予备知识，首先介绍求和约定、克罗内克尔代尔塔符号和排列符号。

## § 1-1　字母标号

在实际中，有不少物理量（或几何量）不能用一个标量加以描述，而要用一组标量才能描述；这组标量中的每一个叫做该物理量的**分量**。这些分量都与坐标系密切相关。例如，点的位置要用三个坐标 $x$、$y$、$z$（在笛卡尔坐标系内，下同）表示，位移要用三个坐标轴方向的分量 $u$、$v$、$w$表示，速度要用三个坐标轴方向的分量 $v_x$，$v_y$，$v_z$ 表示等等；以上这类量，统称为**矢量**。另外还有一类量，它同时与两个方向有关，例如一点处的应力矢；不但它本身具有方向，而且还与截面方向有关；这类量就要用九个标量来表示，即一点处的应力状态要用九个应力分量 $\sigma_x$，$\sigma_y$，$\sigma_z$，$\tau_{xy}$，$\tau_{yx}$，$\tau_{yz}$，$\tau_{zy}$，$\tau_{zx}$ 和 $\tau_{xz}$ 表示；一点处的应变状态也有类似的情况。为了书写简洁，便于采用求和约定，在张量记法中都采用字母标号，即将某一物理量的所有分量用同一个字母表示，并用标号（指标）区别其中的各个分量。例如，将点的位置坐标 $x$，$y$，$z$ 写成 $x_1$、$x_2$、$x_3$，并用

$x_i$（$i=1$，2，3，下同）表示；将坐标轴正向的单位矢（基矢）$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 写成 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，并用 $\mathbf{e}_i$ 表示；位移分量用 $u_i$ 表示，应力分量则有两个标号，简记为 $\sigma_{ij}$（$i$，$j=1$，2，3，下同）；类似地应变分量写成 $\varepsilon_{ij}$ 等等。在微分运算中，可将 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ 分别写成 $\varphi_{,1}$、$\varphi_{,2}$、$\varphi_{,3}$，并用 $\varphi_{,i}$ 表示。以下如未加以说明，字母标号中的字母（如 $i$、$j$、$k$ 等）都可取数值 1，2，3，即字母的约定域为 1，2，3（三维空间）。

## §1-2 求和标号 求和约定

在同一项中，重复出现两次的字母标号，称为**求和标号**，它表示将该标号依次取为 1，2，3 时所得的各项之和，这就是**求和约定**。例如

$$\left.\begin{aligned} &a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\ &a_{ij}b_j=a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+a_{i3}b_3\\ &a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}1)$$

在上列各式中，根据求和约定，都省略了求和记号 $\sum\limits_{i=1}^{3}$ 或 $\sum\limits_{j=1}^{3}$。求和标号又叫做“**哑标**”或“**伪标**”。根据求和约定，矢量 $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ 可以写成 $A_i\mathbf{e}_i$。

求和标号已经不是用以区分该标号所表示的各个分量，而是一种约定的求和标志，因此可以选用任何字母而不会改变其含义；亦即求和标号可任意变换字母，例如

$$\left.\begin{array}{l} a_i b_i = a_j b_j \\ a_{ij} b_j = a_{ik} b_k \\ \varphi_{,i} dx_i = \varphi_{,k} dx_k \end{array}\right\} \qquad (1\text{—}2)$$

但是，如果标号不是字母，而是数字，则不适用求和约定，例如

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \text{（求和约定）}$$

其中

$$\sigma_{11} = \sigma_x，\ \sigma_{22} = \sigma_y，\ \sigma_{33} = \sigma_z \text{（不求和）}$$

另外，乘积 $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ 应写成 $\sigma_{ii}\sigma_{jj}$，不能写作 $\sigma_{ii}\sigma_{ii}$，因为后者的标号重复了四次。于是两矢量 **A** 和 **B** 的点乘积应写成

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i \mathbf{e}_i \cdot B_j \mathbf{e}_j$$

在有些情况下，同一项中虽然出现重复两次的标号，但不按该标号求和，这时另加说明，或者另加特殊标记。

## §1-3 自由标号

同一项内不重复出现的标号，叫做**自由标号**。自由标号表示一般的项，该标号可取 1，2，3 中任何一个数。例如 $u_i$ 表示三个位移分量中的任何一个，$\sigma_{ij}$ 表示九个应力分量中的任何一个。

在同一方程式中，各项的自由标号应该相同，而且应理解（约定）为该方程式对自由标号的约定域都成立。例如，$a_i = b_{ij} c_j$ 为下列三个方程式的缩写

$$a_1 = b_{11} c_1 + b_{12} c_2 + b_{13} c_3$$

$$a_2=b_{21}c_1+b_{22}c_2+b_{23}c_3$$
$$a_3=b_{31}c_1+b_{32}c_2+b_{33}c_3$$

因此，下列线性方程组

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3$$

可写成

$$a_{ij}x_j=b_i$$

显然，在同一方程式中，不能任意改变其中一项或部分项的自由标号；如有必要时，必须将各项的自由标号同时改变。

## § 1-4　克罗内克尔代尔塔$\delta_{ij}$

符号 $\delta_{ij}$ 表示九个量，并规定

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1—3}$$

称为克罗内克尔代尔塔 (Kronecker $\delta$)。根据式 (1—3)，$\delta_{ij}$ 与另一带字母的量（包括 $\delta_{ij}$ 自身）相乘时，将该量中的求和标号丢掉而用 $\delta_{ij}$ 中的另一标号代入。因此有如下等式

① $$\left.\begin{aligned}&\delta_{ij}\delta_{ij}=\delta_{ii}\ (\text{或}\delta_{jj})=3\\&\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}\\&\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km}=\delta_{im}\end{aligned}\right\} \tag{1—4}$$

$$a_{ij}\delta_{ij}=a_{ii} \tag{1—5}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}\\&a_i\delta_{ij}=a_j\end{aligned}\right\} \tag{1—6}$$

式（1—6）可用以改变标号的字母，例如

$$a_{ij}\zeta_j-\lambda\zeta_i=(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})\zeta_j$$

② 因为 $a_{ij}=a_{jj}=a_{jk}\delta_{ik}$，所以

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}}=\delta_{jk} \tag{1—7}$$

③ 对于点的坐标 $x_i$ 有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=x_{i,j}=\delta_{ij} \tag{1—8}$$

④ $\mathbf{e}_i$ 有如下关系

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij} \tag{1—9}$$

式（1—9）也可作为 $\delta_{ij}$ 的定义。

⑤ 设 $\mathbf{e}_i$ 为笛卡尔坐标系的基矢，$\mathbf{e}_{i'}$ 为该坐标系转动后的基矢，令

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_{j'}=l_{ij'}$$

$l_{ij'}$ 为 $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{e}_{j'}$ 夹角的余弦，则可证明

$(e_j\cdot e_k)=\delta_{ij}$

$e_i\cdot(\ k)$

$$\left.\begin{aligned}l_{ik'}l_{jk'}=\delta_{ij}\\ l_{i'k}l_{j'k}=\delta_{i'j'}\end{aligned}\right\} \tag{1—10}$$

## § 1-5 排列（置换）符号

排列符号用 $e_{ijk}$ 表示，它的定义为

$$e_{ijk}=\left\{\begin{array}{rl}1 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 按1，2，3顺序时(顺循环)}\\ -1 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 按3，2，1顺序时(逆循环)}\\ 0 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 中有重复标号时(非循环)}\end{array}\right\} \tag{1—11}$$

所以 $e_{ijk}$ 有27个量，其中只有六个不为零。在 $e_{ijk}$ 的标号中，每相邻两个互换一次位置，改变一次正负号。因为标号

位置变换偶次，不改变标号的循环性质，从而不改变$e_{ijk}$的正负号；反之，标号位置变换奇次，$e_{ijk}$将改变正负号。例如

$$e_{ijk}=-e_{jik}=-(-e_{jki})=e_{jki}=-e_{kji}$$

根据$\mathbf{e}_i$叉积的定义，有

$$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j=\begin{cases}\mathbf{e}_k & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为顺循环}\\ -\mathbf{e}_k & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为逆循环}\\ 0 & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为非循环}\end{cases}\qquad(1-12)$$

因此，可将上式写成

$$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j=e_{ijk}\mathbf{e}_k\qquad(1-13)$$

于是

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=A_i\mathbf{e}_i\times B_j\mathbf{e}_j=A_iB_je_{ijk}\mathbf{e}_k\qquad(1-14)$$

因为$e_{ijk}=-e_{jik}$，所以

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

由式（1—13）可证

$$\mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)=e_{ijk}\qquad(1-15)$$

上式也可作为$e_{ijk}$的定义。

根据行列式的运算法则，可得

$$a=|a_{ij}|=a_{1i}a_{2j}a_{3k}e_{ijk}\quad\text{（按行展开，共六项）}\qquad(1-16)$$

$$=a_{i1}a_{j2}a_{k3}e_{ijk}\text{（按列展开，共六项）}\qquad(1-17)$$

注意，式（1—16）中，行序号为顺循环，式（1—17）中列序号为顺循环。因此当原行列式中的行或列任意调换位置时，所得的新行列式的值为

$$a'=ae_{rst}=a_{ri}a_{sj}a_{tk}e_{ijk}\qquad(1-18)$$

或

$$a'=ae_{rst}=a_{ir}a_{js}a_{kt}e_{ijk}\qquad(1-19)$$

因为 $\mathbf{e}_i=\delta_{ir}\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_j=\delta_{js}\mathbf{e}_s$，$\mathbf{e}_k=\delta_{kt}\mathbf{e}_t$，根据下列等式

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

可将式（1—15）写成

$$e_{ijk}=\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)=\begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}=\Delta'$$

在上式右侧的行列式中，列序号是顺循环；如果将其中的列任意变换位置，所得到的新行列式将为

$$\begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}=\Delta^*=\Delta' e_{rst}=e_{ijk}e_{rst} \tag{1—20}$$

由上式可得 $\delta_{ij}$ 和 $e_{ijk}$ 的关系如下

$$e_{ijk}e_{rst}=\delta_{ir}(\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks})+\delta_{jr}(\delta_{ks}\delta_{it}-\delta_{kt}\delta_{is})+ \\ +\delta_{kr}(\delta_{is}\delta_{jt}-\delta_{it}\delta_{js}) \tag{1—21}$$

当 $i=r$ 时，得到

$$e_{ijk}e_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks} \tag{1—22}$$

由上式又可得

$$e_{ijk}e_{ijt}=2\delta_{kt} \tag{1—23}$$

$$e_{ijk}e_{ijk}=6=3! \tag{1—24}$$

由上式及式（1—18）、（1—19），可得

$$6a=a_{ir}a_{js}a_{kt}e_{ijk}e_{rst} \tag{1—25}$$

## § 1-6 余弦变换矩阵

设 $\mathbf{e}_i^A$ 及 $\mathbf{e}_j^B$ 各为卡氏坐标系Ⓐ和Ⓑ的基矢，则

$$\mathbf{e}_i^A \cdot \mathbf{e}_j^B = \cos\theta_{i\,j}^{A\,B} := C_{i\,j}^{A\,B} \tag{1—26}$$

$\theta_{i\,j}^{A\,B}$ 为$\mathbf{e}_i^A$ 和 $\mathbf{e}_j^B$ 的夹角。:=表示“定 义为”，$C_{i\,j}^{A\,B}$ 共个九个量。于是有

$$\mathbf{e}_i^A = C_{i\,j}^{A\,B}\mathbf{e}_j^B \tag{1—27a}$$

$$\mathbf{e}_i^B = C_{i\,j}^{B\,A}\mathbf{e}_j^A \tag{1—27b}$$

$$C_{i\,j}^{A\,B} = C_{j\,i}^{B\,A} \tag{1—28}$$

如将$C_{i\,j}^{A\,B}$ 排成矩阵，记作$[C_{i\,j}^{A\,B}]$，称为**余弦变换矩阵**；则根据式（1—28）应有

$$[C_{i\,j}^{A\,B}] = [C_{i\,j}^{B\,A}]^T \tag{1—29}$$

因为 $\mathbf{e}_i^A \cdot \mathbf{e}_j^B = \delta_{ij}$，将式（1—27）代入，可得

$$C_{i\,k}^{A\,B}C_{k\,j}^{B\,A} = \delta_{ij} \tag{1—30}$$

或者

$$[C_{i\,j}^{A\,B}][C_{i\,j}^{B\,A}] = [I]$$

根据式（1—29），可见

$$[C_{i\,j}^{A\,B}]^T = [C_{i\,j}^{A\,B}]^{-1} \tag{1—31}$$

上式表明，余弦变换矩阵为正交矩阵。所以这种余弦变换又称为**正交变换**。又

$$\det([C_{i\,j}^{A\,B}][C_{i\,j}^{A\,B}]^T) = \det[I]$$

即

$$(\det[C_{i\,j}^{A\,B}])^2 = 1$$

所以

$$\det[C_{i\,j}^{A\,B}] = \pm 1 \tag{1—32}$$

当 $\det[C_{i\,j}^{A\,B}]=1$ 时，称 为 **正 常**（或 **正 向**）**正 交 矩阵**；当 $\det[C_{i\,j}^{A\,B}]=-1$ 时，称为**非正常**（**负向**）**正交矩阵**。

现设 $[Q_1]$ 和 $[Q_2]$ 都是正交矩阵，并设 $[Q]=[Q_1]\cdot[Q_2]$，则

$$[Q][Q]^T = [Q_1][Q_2][Q_2]^T[Q_1]^T = [I]$$