现代工程数学手册

HANDBOOK OF MODERN MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING

第Ⅱ卷

华中工学院出版社

现 代 工 程 数 学 手 册

（Ⅱ）

现代工程数学手册编委会　编

责任编辑：　李立鹏

•

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所发行

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

•

开本：850×1168　1/32　印张：43　插页4　字数：1,040,000

1986年8月第1版　　1986年8月第1次印刷

印数：1—15,000

统一书号：13255—048　　定价：10.50 元

《现代工程数学手册》
编 辑 委 员 会

前　　言

现代工程规模愈益宏大，技术愈益复杂，要求有科学的决策和计划，精确的分析和计算。因此，数学在现代工程科学的各个领域中正日益发挥着越来越重要的作用。另一方面，工程科学的发展，又对数学不断提出新的课题，促使一些新的数学分支的出现和发展。

为了适应社会主义“四化”建设的需要，促进工程学科更有效地运用数学。一九七九年，根据汪胡桢同志的倡议，水利电力部领导决定组织编写《现代工程数学手册》。经过各方面的共同努力，本书终于和读者见面了！我们希望本书能向读者较系统地介绍现代数学的一些理论与方法，也希望它能在工程科学技术人员和数学工作者之间起到一定的桥梁作用.

本书涉及的数学分支较多，全书近百篇，分为五卷陆续出版：

第Ⅰ卷是基础部分，包括初等数学、微积分和在工程实践中广为应用的一些数学分支，如微分方程、复变函数、特殊函数和线性代数等.

第Ⅱ卷介绍近代数学的一些基本内容，如群论、拓扑、泛函分析、广义函数和偏微分方程的近代理论；介绍了数值计算的各种数学方法，如数值分析、数值代数、有限差分法、有限元法等.

第Ⅲ卷介绍现代数学的若干分支，如凸分析、图论、外微分、模糊数学和数理逻辑等.

第Ⅳ卷介绍概率论、数理统计等随机性数学的有关分支及其应用.

第V卷介绍规划论，控制论，信息论及经济数学等现代应用数学的有关分支。

本书的取材侧重于数学理论和方法在工程和科学中的应用，其中许多是工程技术人员和其他应用科学工作者所迫切需要的。本书编写体裁力求适应上述读者的要求，对于某些重要的数学定理和公式给予必要的推导或证明，并辅以适当的例题说明其应用，使读者在使用本书时，既能查到公式和方法，又能学到一些理论，以便于加深理解和灵活运用。本书也可供其他领域的读者参考。

本书的编撰得到全国数学界和工程技术界许多专家学者的支持和帮助，特别是老一辈的数学家、工程学家参加了本书的编、审、校工作和进行指导，对提高本书的质量、保持特色作出了贡献。

本书的编辑出版工作得以顺利进行，是与水利电力部、华中工学院以及许多高等院校和科研单位的支持和帮助分不开的。

对于本书的缺点或错误，敬请广大读者给予批评指正。

《现代工程数学手册》编辑委员会

一九八五年元月

《现代工程数学手册》

第 Ⅱ 卷

目　　录

《现代工程数学手册》第Ⅱ卷

第二十篇

群及其表示

编　者：冯恩民　唐焕文

校阅者：陈龙玄　赵力田

目　录

引　言

代数是研究某集合中元素运算的一门学科。它的发展可分为两个阶段，十九世纪以前的代数称为古典代数，以后出现的代数称为近世代数或抽象代数。群论是近世代数的一个分支。

十九世纪初，人们逐步认识到，数学符号不只可以代表数值，它也可以表示物体或图形的对称性、开关位置、机器结构等，并且可以对这类符号定义运算，使其具有通常数值运算的某些性质，如结合律、交换律等。这就是近世代数的特征。

群论是近世代数中发展较早，而内容又十分丰富的一个分支。变换群在几何学中有着重要应用，伽罗瓦导出的有限群是代数方程理论的基础。它们是群论发展的最初动力。系统的群论研究是从十九世纪开始的。

群论的发展不仅影响到数学的许多分支，同时在粒子物理、量子化学、电子学以及工程技术中也有广泛应用。本篇主要叙述群的基本概念、性质、表示及其应用。

第 1 章　预备知识

1.1　集合与映射

（1）集合

一个**集合**就是某些元素或所研究对象的全体。可用不同方法表示集合，例如，$S=\{1,2,3,4\}$，或$S=\{x|1\leqslant x\leqslant 4, x$为整数$\}$，表示集合$S$由元素1，2，3和4组成。若元素$x$属于集合$S$，则记作$x\in S$，否则记作$x\notin S$。若$x$表示$S$中的任一元素，记作$\forall x\in S$。不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$。通常用大

写字母表示集合，如A，B，S，M等。

设A,B为两个非空集合，若$\forall x\in A$，有$x\in B$，则称B包含A，或称A是B的子集，记作$A\subset B$。若$A\subset B$，$B\subset A$，则称A等于B，记作$A=B$。集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

称为A与B的并集。集合

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{同时}x\in B\}$$

称为A与B的交集。集合

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{同时}x\notin B\}$$

称为A与B的差集；若$B\subseteq A$，则$A-B$称为B关于A的补集。集合

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

称为A与B的笛卡尔积集。若$A\times B$中元素(a_1,b_1)与(a_2,b_2)满足：$a_1=a_2,b_1=b_2$，则称元素(a_1,b_1)等于元素(a_2,b_2)，记作$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$。积集也可由两个以上集合构成。一般地，设有非空集合$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，它们的笛卡尔积集定义为

$$Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_n=\prod_{i=1}^{n}Y_i$$

$$=\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mid y_i\in Y_i;\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

若$Y_i=Y$，$i=1,2,\cdots,n$，那么上面的积集可记为Y^n。集合

$$P(A)=\{B\mid B\subset A\}$$

称为集合A的幂集。集合A中元素的个数记为$|A|$。若$|A|$为有限数，则$|P(A)|=2^{|A|}$。

（2）映射

设A,B为两个非空集合，α为笛卡尔积集$A\times B$的子集，如果满足：

1° $\forall a\in A$，存在$b\in B$，使$(a,b)\in\alpha$；

2° 若$(a,b)\in\alpha$，$(a,b_1)\in\alpha$，则$b=b_1$，

则称α是A到B的映射，或简称为映射α，记为$\alpha: A\to B$。当(a,b)

$\in \alpha$时，一般记作$\alpha(a)=b$，并称b是在映射α下a的**象**，称a是b的**象原**。

集合
$$\alpha(A)=\{\alpha(a)\mid a\in A\}$$
称为映射α下A的**象集**，称A为α的**象原集**。显然，$\alpha(A)\subset B$。若$\alpha(A)=B$，则就说α是从A到B上的映射（或称为**满映射**）；若$\alpha(A)\neq B$，则称α是从A到B内的映射.若$\forall a,b\in A,a\neq b$，有$\alpha(a)\neq\alpha(b)$，则称α是**单映射**。若α是从A到B上的单映射，则称α是**1—1映射**.若α是从A到A的映射，则称α是A上的**变换**，若A上变换α，$\forall a\in A$，有$\alpha(a)=a$，则称α是A上的**单位变换**，记为$\alpha=I_A$。

设 $\alpha:A\to B$，$\beta:B\to D$，那么，由规则
$$(\beta\alpha)(a)=\beta(\alpha(a)),\qquad \forall a\in A$$
定义的映射$\beta\alpha:A\to D$称为α与β的(乘)**积映射**。若$\alpha:A\to B$和$\beta:B\to A$满足：
$$\alpha\beta=I_B,\ \beta\alpha=I_A,$$
则称α,β为**可逆映射**，且说β是α的**逆映射**，α是β的**逆映射**，记为$\alpha^{-1}=\beta$，$\beta^{-1}=\alpha$。

从上述定义可知，映射α为1—1映射的充要条件是α为可逆映射。

若α,β为满映射，则$\beta\alpha$也为满映射；若α,β为单映射，则$\beta\alpha$也为单映射；若α，β为可逆映射，则$\beta\alpha$也为可逆映射，且$(\beta\alpha)^{-1}=\alpha^{-1}\beta^{-1}$。

1.2 关系与等价关系

（1）定义

设A为非空集合，A上的**关系**R就是$A\times A$上的一个子集，若$(a,b)\in R$，则称在关系R下，a与b相关，记为aRb，否则称a与b不相关，记为$a\overline{R}b$。

若集合S上的关系R满足：

1° $\forall a\in S$，有aRa（自反性）；

2° 若$a,b\in S$，且aRb，则bRa（对称性）；

3° 若a,b，$c\in S$，aRb，bRc，则aRc（传递性），

那么，称R是S上的**等价关系**。设$a\in S$，集合

$$[a]=\{x\mid x\in S, aRx\}$$

称为关系R下含有元素a的一个**等价类**。集合

$$S/R=\{[a]\mid a\in S\}$$

称为由等价关系R确定的S的**商集**。

（2）性质

设E是S上的一个等价关系，那么，

1° 若aEb，则$[a]=[b]$；

2° 若$a\overline{E}b$，则$[a]\cap[b]=\varnothing$；

3° S等于所有互不相交等价类的并集。

从此性质可见，集合S上的任一个等价关系都是对S的一种分割，使S中每一个元素属于且仅属于一个等价类。反之，对于S的每一个这样分割，均可确定S上的一个等价关系。

【例1】设Z为整数集，n为一正整数，若a，$b\in Z$，$a-b$能被n整除，即$n\mid(a-b)$，则称a与b关于模n同余，记为$a\equiv b(\bmod n)$。易证，Z上的这种同余关系是Z上的等价关系。它的等价类的集合称为模n整数集，记为Z_n。比如说，当$n=3$时，Z的不同等价类为

$$[0]=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\},$$

$$[1]=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\},$$

$$[2]=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}.$$

因此，$Z=[0]\cup[1]\cup[2]$，$Z_3=\{[0],[1],[2]\}$，一般地有

$$Z_n=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}.$$

第2章 基本概念

2.1 群与环

（1）二元运算

设S是非空集合，S上的一个**二元运算**“$*$”就是从$S\times S$到S的一种映射.在该映射下，$\forall(a,b)\in S\times S$的象记为$a*b$.即二元运算“$*$”使$(a,b)$对应$S$中的一个确定元素$a*b$，简记为$ab$。

【例1】设$S=R$(实数集)，$f:R^2\to R$ 定义为：$\forall a,b\in R,f(a,b)=a+b$（“+”为实数加法运算)，那么，“+”就是$R$上的一个二元运算。

（2）群

设G是非空集合，若G上的一个二元运算“$*$”满足：

1° $\forall a,b,c\in G$，有$(a*b)*c=a*(b*c)$，即满足结合律；

2° 存在元素$e\in G$，使$\forall a\in G$有$e*a=a*e=a$，称e为**单位元**；

3° $\forall a\in G$，存在元素$b\in G$，使$a*b=b*a=e$，称b为a的**逆元**，记为 $a^{-1}=b$，

则把集合G及其上的运算“$*$”称为**群**G.记为$(G,*)$或$(G,e,*)$。若集合G上的二元运算只满足上述条件1°，则称G为**半群**；若G上的二元运算满足上述条件1°和2°，则称为**广群**.记$|G|$为群G中元素的个数，称为G的**阶数**。若$|G|$为有限数，则称G为**有限群**，否则称为**无限群**。

群G（或广群G）中单位元e是唯一的，因为，假设e'也是G的单位元，那么，$e'=e'*e=e*e'=e$。群G中任一元素a的逆元a^{-1}也是唯一的。因为，若a的另一逆元为b，则

$$a^{-1}=a^{-1}*e=a^{-1}*a*b=(a^{-1}*a)*b=e*b=b。$$

【例2】设$G=\{1,-1,i,-i\}$，其中$i=\sqrt{-1}$，易知，复数乘法是G上的二元运算，且使G为群.

整数Z上的减法运算尽管也是Z上的二元运算，但Z对于减法运算不是群。因为减法不满足结合律。

若在群G中，$\forall a,b\in G$，有$a*b=b*a$（即满足交换律），则称G为**可换群**，或称为**阿贝尔群**.例2中的群G为可换群。

【例3】设A为非空集合，幂集$P(A)$上定义二元运算为

$$B_1\bullet B_2=(B_1\cup B_2)-(B_1\cap B_2),\qquad \forall B_1,B_2\in P(A),$$

称它为$P(A)$上的对称差运算．易证$(P(A), \bullet, \varnothing)$为可换群．

【例4】设 $G=\{A \mid A=(a_{ij})_{n\times n}$为非奇异阵，$a_{ij}\in C\}$，其中$C$为复数集，显然矩阵乘法为$G$上的二元运算，且使$G$为群．它的单位元为$n$阶单位阵$I_n$，但它不是可换群，称该群为一般复线性群．记为$GL(n, C)$．类似的，$GL(n, R)$为一般实线性群，其中$R$为实数集．

【例5】设 $G=\{f_{ab} \mid f_{ab}$为R^2上的平移变换，$(a, b)\in R^2\}$，其中f_{ab}定义为$\forall(x,y)\in R^2$，$f_{ab}(x,y)=(a+x,b+y)$．变换的积运算为G上的二元运算，且该运算满足交换律．因此，G为可换群，它的单位元为$I=f_{00}$，是R^2上的恒等变换．

通常将可换群G中运算记为“+”，单位元记为“0”，元素a的逆元记为$(-a)$，把运算ab^{-1}写作$a-b$．可换群记作$(G,+,0)$．

（3）环、域

设“+”与“·”为非空集合S上的两个二元运算，若满足条件：

1° $(S,+)$为可换群，它的单位元称为零元，记为0；

2° $(S,\cdot)$为半群；

3° $\forall x,y,z\in S$有

$$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z),$$

$$z\cdot(x+y)=(z\cdot x)+(z\cdot y),$$

那么，把S及其上的两个二元运算称为**环**S，记为$(S,+,\cdot)$，并把运算“+”称环S上的**加运算**，把“·”称环S上的**乘运算**。有时把“$x\cdot z$”简记为“xz”。若环S对于乘运算有单位元，则记为“1”，并称S具有**乘法单位元**。若乘运算在环S上满足交换律，则称S为**可换环**。

在环S中，若$x,y\in S, xy=0$，而$x\neq0, y\neq0$，则称x，y为S上的**零因子**。若可换环S有乘法单位元1，且$1\neq0$，又无零因子，那么称环S为**整环**．环S中，若$(S-\{0\},\cdot)$为群，则称S为**可除环或体**。把可换可除环称为**域**。

【例6】设$S=2Z=\{0,\pm2,\pm4,\cdots,\pm2n,\cdots\}$．显然，通常的数值加法与乘法为$2Z$的两个二元运算，使$2Z$为可换环，但无乘法单位元．在同样运算下，对于有理数集Q，

实数集R和复数集C均为域，而对于整数集Z为整环.

2.2 变换群与对称性

（1）变换群

设S为一非空集合，集合$\delta(S)=\{f\,|\,f$为S上的可逆变换$\}$，它在变换积运算下为群，称为**变换群**$\delta(S)$或称为S上的**完全对称群**。它的单位元为S上的单位变换I_S。若$|S|$为有限数，则称$\delta(S)$为**对称群**。若$S=\{1,2,\cdots,n\}$，则把S上的对称群叫作n个字母上的对称群，记为S_n，并把S_n中任一元素称为S上的一个置换，易证，$|S_n|=n!$。

【例7】设$S=\{1,2\}$，S上的一个可逆变换f定义为$f(1)=2$，$f(2)=1$，这样的置换记为

$$f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

类似地，S上的单位变换I_S为

$$I_S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

因$2!=2$，所以$S_2=\{f,I_S\}$为S上的对称群.

（2）循环置换

设$a_1,a_2,\cdots,a_r$为$S=\{1,2,\cdots,n\}$中r个不同元素，若S_n中置换σ满足：

$$\sigma(a_i)=a_{i+1},\qquad i=1,2,\cdots,r-1;$$
$$\sigma(a_r)=a_1;$$
$$\sigma(x)=x,\qquad x\notin\{a_1,a_2,\cdots,a_r\},$$

或可写作

$$\sigma=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r & a_{r+1} & \cdots & a_n\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_r & a_1 & a_{r+1} & \cdots & a_n\end{bmatrix},$$

则称σ是长为r的**循环置换**，简记为$\sigma=(a_1a_2\cdots a_r)$。长为2的循环置换称为**对换**。

因置换σ为S上的变换，根据变换的积运算，可令

$$\sigma^0=I_S,\quad \sigma^1=\sigma,\quad \sigma^2=\sigma\sigma,\quad \cdots.$$

如果 r 是使$\sigma^r = I_s$的最小正整数，则称σ的**阶数**为 r. 可以证明，S_n中任一置换均可表为循环置换或循环置换的积，而该置换的阶数等于它的所有循环置换长的最小公倍数。

【例8】群 S_8中的置换 $\sigma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&2&8&1&5&7&6&4\end{bmatrix}=(1384)(67)$.

由于任一循环置换又都可写成若干个对换的积，因此，S_n中任一置换也就等于某些对换的积，若其对换个数为奇数，则称该置换为**奇置换**，否则称为**偶置换**。令

$$A_n = \{\sigma \mid \sigma\text{为}S_n\text{中偶置换}\},$$

显然，置换的积运算为A_n上的二元运算，且使A_n也为群，称此群A_n为S上的**交错群**．易证，$|A_n| = n!/2$。

（3）对称性

设A是集合S的子集，若$\forall f \in \delta(S)$，有

$$f(A) = \{y \mid y = f(a), a \in A\} = A,$$

则称A为$\delta(S)$**不变的**。

设S是R^2或R^3中的一个子集（或图形），S上的一个**对称性**就是指S上的一个具有等距性的可逆变换$f:S\to S$，所谓等距性就是，$\forall a,b \in S$，使a到b的距离$d(a,b)$等于$f(a)$到$f(b)$的距离$d(f(a),\ f(b))$。令$G = \{f \mid f\text{为}S\text{上的等距可逆变换}\}$，那么，在变换积运算下，$G$为群，并称$G$群为$S$上的**完全对称性群**。

【例9】设在平面R^2中有一长方形（长≠宽）图形F，其顶点标记为1，2，3，4，如图2.2-1所示．显然，长方形F的一个对称性等价于其顶点集$S=\{1,2,3,\ 4\}$上的一个等距可逆变换．设对于过长方形形心的水平轴的镜面反射所构成的对称性为a，那么，$a(1)=4$，$a(2)=3$，$a(3)=2$，$a(4)=1$，即

$$a=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{bmatrix}.$$

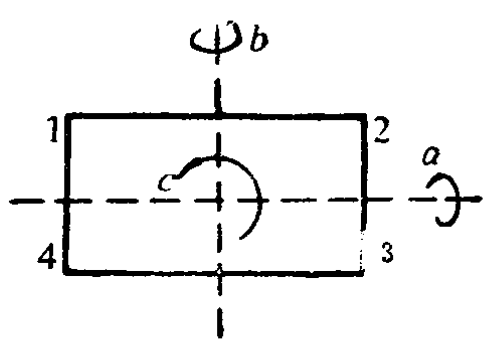

图2.2-1　长方形的对称性

对称性a也可看成长方形F绕水平轴的180°翻转．类似地，设将长方形F绕过其心的

铅垂轴作180°翻转的对称性为 b，那么，

$$b=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{bmatrix}.$$

再一个对称性是将长方形在其所在平面内绕心作180°旋转，记为c，那么，

$$c=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{bmatrix}.$$

最后一个对称性是S上的单位变换I_S．直观易见，长方形F只有这四种对称性，因F上的其他可逆变换不具有等距性．令$K=\{a,b,c,I_S\}$，可证明，对于置换的积运算，K为群，并称它为长方形完全对称性群，或称为克莱因(Klein)四元群．因为a,b,c均为180°翻(旋)转，所以，$aa=I_S,bb=I_S,cc=I_S$，而ab为

$$ab(1)=a(b(1))=a(2)=3.$$

同样方法可得$ab(2)=4$，$ab(3)=1$，$ab(4)=2$，即

$$ab=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{bmatrix}=c.$$

用类似方法可求得K中任意二元素的积．把群K中任二元素积运算结果用表来表示时，称这样的表为群表．长方形完全对称性群K的群表为表2.2-1．

表 2.2-1

·	I_S	a	b	c
I_S	I_S	a	b	c
a	a	I_S	c	b
b	b	c	I_S	a
c	c	b	a	I_S

在克莱因四元群K中，对称性 a，b 必须将长方形F离开所在平面方能实现，称这样的翻转变换为非正常旋转或镜面反射．对称性c是在长方形F所在的平面内实现的，称这类旋转变换为正常旋转．从群表可见，克莱因四元群K为可换群．

2.3 群的基本性质

（1）群G中的二元运算满足结合律，所以，$\forall\ a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n\in G$，运算$a_1a_2\cdots a_n$的结果仅由其顺序决定，与结合方式无关。因此，对于$n$个相同元素的运算可记为

$$\underbrace{a\,a\cdots a}_{n个}=a^n,\quad a^0=e\ (单位元),$$

并且可定义 $$\underbrace{a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1}}_{n个}=(a^{-1})^n=a^{-n}.$$

设G为可换群，n个相同元素a的运算记为 $\underbrace{a+\cdots+a}_{n个}=na$.