普通高等教育"九五"教育部重点教材

理论力学

Theoretical mechanics

贾书惠 李万琼 编著

高等教育出版社

·北京·

内容提要

本书为普通高等教育“九五”教育部重点教材。本书重视物理概念，定量分析与定性分析并重，应用实例丰富，思考题和讨论都饶有趣味，是一本具有鲜明特色的教材。

全书共5篇16章，包括：静力学公理与物体受力分析、力系简化理论、力系平衡理论、静力学应用问题、点的运动与刚体的简单运动、点的复合运动、刚体的平面运动、刚体的空间运动、质点动力学、质系动力学、刚体动力学、达朗贝尔原理、分析静力学、分析动力学、碰撞、振动等内容。

本书适用于工程力学专业和工科各专业的本科生使用，也可供相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/贾书惠，李万琼编著．—北京：高等教育出版社，2002.4

工科各专业本科教材

ISBN 7-04-010474-1

Ⅰ．理... Ⅱ．①贾... ②李... Ⅲ．理论力学-高等学校-教材 Ⅳ．031

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第088993号

理论力学

贾书惠　李万琼　编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　北京铭成印刷有限公司

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002年6月第1版
印　　张	27.5	印　　次	2002年6月第1次印刷
字　　数	510 000	定　　价	31.40元

前　言

理论力学是高等理工科院校中普遍开设的一门技术基础课程，讲授物体机械运动的普遍规律及其在工程中的应用。随着现代科学技术的发展，坚实的力学基础对许多领域的科技人员已显得越来越重要；许多从事研究工作的研究生、博士后以及工程技术人员大量选修力学类课程就说明了这一点。理论力学虽然讲授经典理论，但理论力学的概念、理论及方法不仅是许多后续课程的基础，甚至在解决现代科技问题中也能直接发挥作用。编写本书的指导思想就是力图用现代的观点、方法来讲授经典理论。本书不仅注意继承理论力学在传统讲授中理论严密、演绎性强的优点，同时在编写上形成数学建模、数学求解、动力特性分析的现代处理问题的思路；在数学工具上，除系统使用矢量外，还加强了矩阵的应用，介绍了计算机数值仿真。此外，本书注意联系工程实际，并面向现代科技开设了一些窗口。

本书在编写过程中还有以下一些考虑：

1. 提高起点，避免与大学物理课程内容重复；精炼内容，用较少的篇幅使学生掌握较多的知识，以适应当前学时有所削减的状况。

2. 加强了三维刚体动力学的讨论，目的是使经典力学中的牛顿－欧拉体系比较完整；同时现代科技问题也要求学生有处理三维问题的能力。

3. 强调对物理概念的理解。既重视数学建模及定量计算，又重视通过概念及理论进行定性分析；在方法上，解析法与几何法并重。

4. 注意启发性。设置了大量的思考题，其中一些饶有趣味，多章后面都有专节进行讨论，目的是提高兴趣、促进思考、培养创新精神。

5. 本书采用了国家标准 GB 3100～3102－93《量和单位》中规定的有关符号。由于国家标准规定矢量及矩阵两个量的符号均为黑体字母，在本书同时使用矢量及矩阵的情况下极易混淆，为此，在易混淆处，本书均特别注明哪个黑体字母代表矩阵。

本书部分内容标有 * 号，具有加深和扩展性质，非基本要求，读者可以选用。

本书正文由贾书惠编写，习题由李万琼编写，赵文奇协助搜集了部分习题。

本书是作者在清华大学多年讲授理论力学课程及理论力学专题讲座的成

果，其中总结了作者自己的教学经验，也渗透着理论力学教研室整个集体的经验。上海交通大学刘延柱教授及北京理工大学梅凤翔教授审阅了书稿并提出许多宝贵的意见，作者深表感谢。由于作者水平所限，本书疏漏与有误之处在所难免，我们真诚希望读者指正。

作者

2001.4

目　　录

第二篇 运 动 学

第三篇 矢量力学基础

第五篇 动力学专题研究

绪　　论

力学是研究物体机械运动与变形的学科，理论力学研究物体机械运动的基本规律。力学的发展有着悠久的历史，而且与人类的科学实践与生产实践密切相关。1687 年，牛顿发表了名著《自然哲学的数学原理》，奠定了经典力学的科学基础；在前人长期研究的基础上，牛顿总结出了三大运动定律及万有引力定律。万有引力定律是根据开普勒对行星运动观测的结果而发现的，160 年后，在由万有引力定律计算出的位置上发现了一颗新行星——海王星，这是用经典力学理论指导科学实践的成就。18 世纪，机械工业已有了很大的发展，日益复杂的机械的运动与受力分析要求新的力学方法。1788 年，拉格朗日发表了名著《分析力学》，建立了约束系统动力学的理论与方法。其中使用广义坐标等标量描述系统的运动，借助变分原理建立力与运动的关系，并全部采用数学分析研究方法，从而建立了一套与牛顿体系完全不同的新体系，即经典力学的分析力学体系。20 世纪中叶以后，由于机器人等复杂机械系统的应用、航天技术的发展、运动生物力学的出现，以及计算机的广泛应用，经典力学领域中又出现了多体系统动力学、计算动力学等学科分支；经典力学在解决现代科技问题中仍然起着重要作用。

理论力学课程讲授经典力学中的牛顿 - 欧拉体系及分析力学体系基础，在高等工科院校中，对许多专业是一门基础性的课程，即：它是认识自然的基础，解决实际工程问题的基础，也是一系列相关后续课程的基础。深入掌握理论力学的基本概念，基本理论及基本方法对提高未来的科技人员的素质是十分必要的。

理论力学是一门演绎性较强的课程，对训练逻辑思维颇有好处；同时，习题变化多端，正好可以培养灵活运用能力。理论力学研究的机械运动广泛存在于日常现象和工程实际中；学习理论力学时还应善于联系实际、多作分析，特别是定性分析。

第一篇

静力学

静力学的任务是研究力系的**简化**与**平衡条件**。力系指作用在物体上的一组力，所谓简化是指用一组最简单的力系代替给定的力系，同时保持对物体的作用不变。或者说：用最简单的等效力系代替给定力系。平衡条件指在物体平衡时作用于物体上的力系所应满足的条件，显然，力系简化是寻找力系平衡条件的简捷途径，但力系简化的应用绝不仅限于静力学。在动力学中，当研究在给定力系作用下物体如何运动时，力系简化同样重要。力系平衡条件可用于计算结构物在载荷作用下的内力或所受的支承力，以便为结构的设计提供依据，因而在工程上应用得十分广泛。

在物理课程中，已经接触过静力学，并建立了一些有关概念。

力：力是物体之间相互的机械作用，它的效应是改变物体的运动状态(外效应)或使物体变形(内效应)，力的作用效果取决于**力的三要素**：大小、方向及作用点，因此可用矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示。

平衡：物体静止或作匀速直线运动时称物体处于平衡状态。静止、运动都是相对某一参考坐标系而言的。在静力学中，将与地球相固结的坐标系取作参考坐标系；因为对一般工程而言，地球坐标系已是一个相当精确的惯性坐标系。物体平衡时，其上的作用力系应满足平衡条件，但反之却不一定。有时，力系满足平衡条件，而物体却不静止或不作匀速直线运动，如绕光滑轴作匀角速转动的物体就属于这种情况。这时，力系平衡条件只是物体平衡的必要条件。

质点：如果不计物体的大小，只考虑其质量，则称之为质点。质点是为研究物体运动规律而作的一种简化，一组有联系的质点构成**质点系**，简称**质系**。物体简化为质点是有条件的，如在研究太阳系中各行星的运行轨道时，可

以把太阳系简化成质点系；但如果研究的是行星的自转，则不能忽略行星的尺寸，不能将行星简化为质点。

刚体：一种特殊的质点系，其中各质点间的距离保持不变，亦即刚体是不变形的；所以，刚体又称为不变质点系。刚体也是实际物体的一种经过简化与抽象的物理模型。实际物体都有变形，但为保持结构物的坚固性，通常都设计得使结构物各部件的变形很小(例如千分之几的量级)，在研究某些问题时就可以忽略这些微小的变形而把物体看成刚体。实际物体是多种多样的，还可以抽象成其他物理模型，如弹性体、液体、气体、变质量系统等，刚体只是各种物理模型中的一种，但静力学的研究对象主要是刚体。

学习静力学时，一方面要巩固与深化这些概念，另一方面更重要的是掌握新的理论与方法。

静力学研究作用在刚体上的力系简化与平衡问题，但并不是说对其他物理模型不适用。在考虑到其他模型的物理特性条件下，静力学中由刚体得出的结论也可以推广，因此静力学的适用范围十分广泛，并成为许多后续课程的基础。

静力学是一门演绎性很强的学科，即从几条公理出发，可以推导出全部静力学理论。明确这一点是有益的，因为静力学处理的一些问题与日常生活比较接近，初学者往往容易凭借片面的感性知识处理问题；而静力学的演绎性强调理论证明，因而有助于增强应用正确理论的意识。

本篇中的物理量是力、力矩、力偶等矢量，关于简化与平衡的讨论都是基于矢量的几何加法。因此，本篇的静力学内容又称**矢量静力学**或几何静力学。它有别于第五篇中所讲的**分析静力学**，在那里研究的对象是一般的非自由质点系，处理的是力的功，并使用数学分析方法。

第一章 静力学公理与物体受力分析

§1-1 静力学的公理体系

公理是人们在生活与生产中长期观察与实践所总结出的结论，可以认为它是真理而不需证明，在一定范围内它正确反映了事物最基本、最普遍的客观规律。静力学的公理如下：

公理1 力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力可以合成一个合力，合力的作用点也在该点，大小和方向由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定。用矢量表示为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1-1}$$

公理2 二力平衡条件 作用在刚体上的两力平衡的充要条件是：这两力的大小相等、方向相反、且作用在同一直线上。

公理3 加减平衡力系公理 在给定力系上增加或减去任意的平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用。

公理4 作用和反作用公理 两物体间存在作用力与反作用力，两力大小相等、方向相反、分别作用在两个物体上。

公理5 刚化原理 变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，则其平衡状态不变。

上述公理中，公理2，3只适用于刚体。公理5则有如下特点：如绳子是变形体，若在一对拉力作用下处于平衡(图1-1)，则将绳子刚化为刚性杆时，它仍然是平衡的。亦即，能使变形体平衡的力系也必然能使刚体平衡；反之则不然，一对压力作用可使刚性杆平衡，但却不能使绳子平衡。由此可知，刚体上力系的平衡条件只是变形体平衡的必要条件，而非充分条件。但如果补充上变形体的物理特性(如绳子不能受压)，则刚体上力系的平衡条件也能适用于变形体。

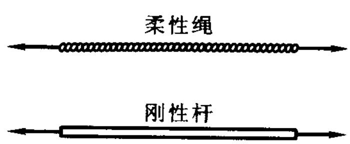

图1-1 刚化原理

上述公理反映了静力学中最基本的规律，如公理1是二力合成的方法，也是最简力系的简化方法，公理2是最简单的力系平衡条件。从这些公理出发，通过数学演绎的方法，可以推导出许多新的结论。

1. 力的可传性　作用在刚体上某点的力，可以沿其作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

证明　如图1-2所示，点 A 为力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点，如果在其作用线上的点 B 作用两个力 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}''=-\boldsymbol{F}$，则根据公理2，力系 $(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{F}'')$ 为平衡力系，根据公理3，力 $(\boldsymbol{F})$ 与力系 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}',\boldsymbol{F}'')$ 等效，或写为 $(\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}',\boldsymbol{F}'')$。仍由公理2可知力系 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}'')$ 为平衡力系，再由公理3得 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}',\boldsymbol{F}'')=(\boldsymbol{F}')$，因此 $(\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{F}')$，即作用于点 A 的力 $\boldsymbol{F}$ 与作用于点 B 的力 $\boldsymbol{F}'$ 等效。

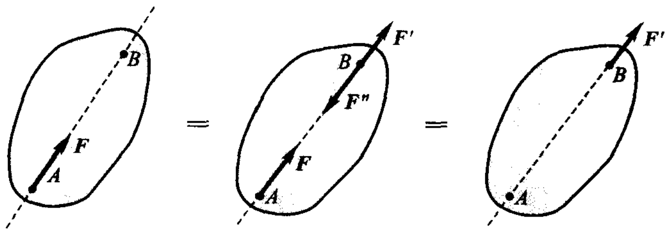

图1-2　力的可传性

力的可传性只适用于刚体，不适用于变形体。例如，一根绳子在两端受拉力时可以平衡，若两力沿绳传递到另一端成为压力，则绳子就不能平衡。一块水在四周受到压力时可以平衡，但如果所有的力都沿作用线传到水的另一界面，则水在拉力作用下也不能平衡。数学上将作用点固定的矢量称为**固定矢量**，作用点可以沿作用线滑移的矢量称为**滑移矢量**，作用点可在任意位置的矢量称为**自由矢量**。因此，作用在变形体上的力是固定矢量，作用在刚体上的力是滑移矢量，而在只讨论力的大小及方向，不注意其作用点时（如矢量的加法、点积、叉积运算等），力可以看成自由矢量。

2. 三力平衡必汇交于一点　如果作用在刚体上的三力平衡，且其中两力作用线相交，则三力作用线必汇交于一点，且三力共面。

证明　如图1-3所示，可得

$$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3)=(\boldsymbol{F}'_1,\boldsymbol{F}'_2,\boldsymbol{F}_3)=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_3)=(0)$$

式中，(0)表示力系平衡。由此可知，力 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用线必通过 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 两力作用线的交点，命题得证。读者可自己找出上述每一步等式中所根据的公理。

几何静力学中所有的重要结论都可通过这种数学演绎方法由公理推出。

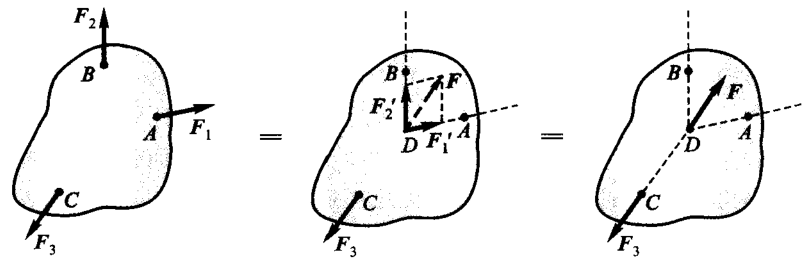

图 1－3　三力平衡条件

§1－2　力矩及其计算

1－2－1　力对轴之矩与力对点之矩

力可以使物体移动，也可以使物体转动；力使物体绕某点转动的效果用力矩来度量。在物理课程中已建立了平面中力对点的力矩的概念，如图 1－4a，力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力矩是 $M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fd = \pm 2\triangle OAB$，它是一个代数量，正负号取决于规定的旋转正方向。现在将力矩概念扩展到空间。

1.空间中力对轴之矩　设空间中有一力 $\boldsymbol{F}$ 及一轴 z（图 1－4b），将力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴的平面上的投影 $\boldsymbol{F}'$ 对轴与平面交点 O 的力矩定义为力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴之矩，并用下式表示：

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}') = \pm 2\triangle OA'B' \tag{1-2}$$

其中，正负号用右手定则来确定。当物体有固定轴 z 时，显然只有力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直平面上的投影 $\boldsymbol{F}'$ 有转动效应，因此力对轴之矩是力对该轴的转动效应的度

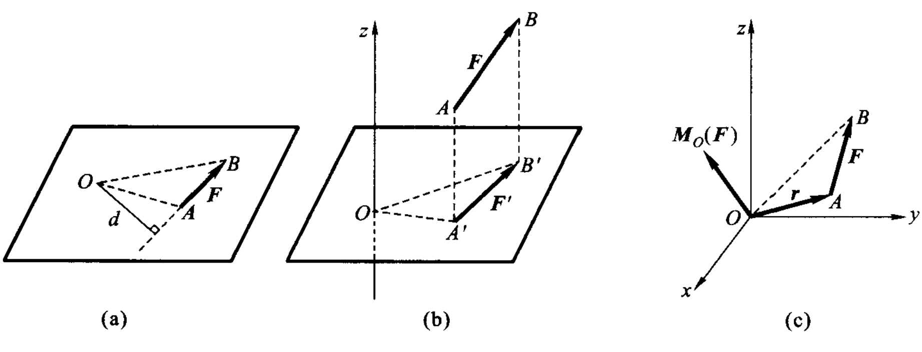

图 1－4　力矩

量。然而即使 z 轴不固定，仍然可以讨论力对 z 轴之矩，它反映了力与该轴之间的一种关系，当力与轴共面时(相交或平行)，力对轴之矩为零。

2.空间中力对点之矩　设空间中有力 $\boldsymbol{F}$ 及点 O (图 1－4c)，力使物体绕 O 转动的效应不只与△OAB 的面积有关，而且与△OAB 所在平面(力 $\boldsymbol{F}$ 与 O 形成的平面)在空间的方位有关，如果以平面的法线表示平面的方位，则可以看出，空间中**力对点之矩是矢量**，并以下式定义：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1-3}$$

式中，O 称为**矩心**，$\boldsymbol{r}$ 是由矩心到力 $\boldsymbol{F}$ 作用点的**矢径**，显然有 $|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = 2\triangle OAB$。空间中力对点之矩是固定矢量。

如果在点 O 作用有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 及 $\boldsymbol{F}_2$，其合力为 $\boldsymbol{F}$，则有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

因而有

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2$$

或

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2) \tag{1-4}$$

即共点两力合力的力矩等于两力分别对同一矩心的力矩的矢量和，称为**合力之矩定理**。对任意力系也有合力之矩定理，其证明见 2－4－3。

1－2－2　力矩的计算

在矩心 O 处建立直角坐标系 $Oxyz$，力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点 A 的矢径为 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量表示为：$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$。

1.力对轴之矩　首先计算力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴之矩，可按定义(1－2)用几何法计算，但通常多用解析法。为此研究在 Oxy 平面内的投影，参照图 1－5 可得

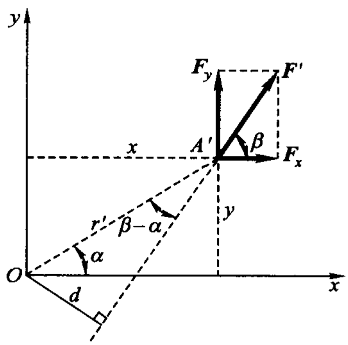

图 1－5　力矩计算

$$M_z(\boldsymbol{F}) = F'd = F'r'\sin(\beta - \alpha) = F'\sin\beta \cdot r'\cos\alpha - F'\cos\beta \cdot r'\sin\alpha$$

或

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x \tag{1-5}$$

同理有

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y,\quad M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z \tag{1-6}$$

2.力对点之矩　由式(1－3)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \times (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}) \\ &= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-7}$$

上式即为力对点之矩的解析表达式。此式也可通过将 $\boldsymbol{F}$ 分解成三个分力 F_x，F_y，F_z，再用合力之矩定理求得。对比式(1-5)、(1-6)与(1-7)，还可以得到力对点之矩与力对轴之矩的关系：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

即力对点之矩在某轴上的投影等于力对该轴之矩。

矢量公式(1-3)~(1-8)也可用矩阵表示。引入矩阵：

$$\boldsymbol{M}_O = (M_x, M_y, M_z)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)^{\mathrm{T}} \tag{1-9}$$

及

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \tag{1-10}$$

矩阵$\tilde{\boldsymbol{r}}$为以矢量 $\boldsymbol{r}$ 的三个投影为元构造的反对称矩阵，称为矢量 $\boldsymbol{r}$ 的叉乘矩阵，且$\tilde{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}} = -\tilde{r}$。于是有

$$\boldsymbol{M}_O = \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix} \tag{1-11}$$

在具体问题中计算力矩有多种方法：根据定义用几何方法；用力矩的解析表达式；用合力之矩定理等。

例 1-1 如图 1-6 所示的曲杆支承于点 O，在其端点 A 作用一个与 x 轴平行的力 $\boldsymbol{F}$，求 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 之矩。

解 (1) 用解析式

$$\boldsymbol{r} = b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} - c\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = cF\boldsymbol{j} + aF\boldsymbol{k}$$

(2) 先计算对坐标轴之矩，再矢量相加：

$$M_x(\boldsymbol{F}) = 0,\ M_y(\boldsymbol{F}) = cF,\ M_z(\boldsymbol{F}) = aF$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k} = cF\boldsymbol{j} + aF\boldsymbol{k}$$

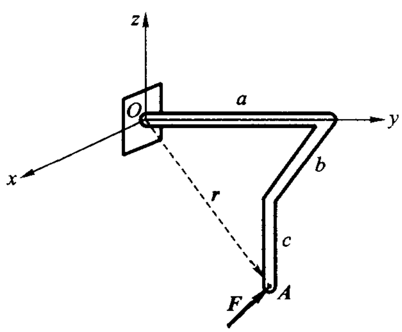

图 1-6 例 1-1 图

例 1-2 在图 1-7a 所示的结构中，钢丝绳的张力 $\boldsymbol{F}$ 为 300 kN，求该力对支点 O 的力矩。