弹性系统的变分原理

计伊周　王忠民　编著

西安地图出版社

弹性系统的变分原理

计伊周　王忠民　编著

西安地图出版社

(陕)新登字 013 号

内 容 简 介

全书除引言外共分八章，内容包括变分法的基本概念，梁的弯曲和薄壁杆件的约束扭转、小位移弹性理论中的变分原理、泛函变分的近似计算方法，稳定问题，振动问题，小位移弹性理论中的广义变分原理，弹性非保守问题的拟变分原理。

本书可作为机械、土建、航空等非力学专业研究生及力学专业本科生的参考教材，也可供力学工作者及工程技术人员参考。

弹性系统的变分原理

[illegible]王忠民 编著

西安地图出版社出版发行

(西安市友谊东路 124 号 邮政编码 710054)

新华书店经销 二〇四研究所印刷厂印刷

[illegible]0×1168 毫米 大 32 开本 9 印张 240 千字

1996 年 10 月第 1 版 1996 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—1000 册

ISBN 7-80545-529-5/G·32

定价：15.50 元

前　言

本书是根据作者在西安理工大学对研究生讲授这门课程时使用多年的讲义改写而成的。书中系统地论述了弹性系统变分原理的基本内容及其应用，着重说明变分原理在推导弹性力学控制方程及相应边界条件时的功用。介绍了基于变分原理的各种直接方法，以求得弹性力学问题的近似解。为了便于初学者自学，避免一开始就遇到比较复杂的数学推导，书中用了相当的篇幅来讲述最简单的梁的弯曲问题，以使读者能更好地从物理本质上来理解弹性系统的变分原理。另外，由于工程中如机翼、输液管及桥梁等的颤振现象越来越受到人们的重视，因此特别介绍了与此问题有关的弹性非保守系统的拟变分原理，主要是我国学者在这一领域中作出的贡献及作者本人在该领域中所做的一些工作。

西安交通大学工程力学系王子昆教授详细地审阅了本书的初稿并提出了许多十分重要的意见，对本书的定稿起了很大的作用。这里谨表示深切的谢意。

全书除引言外共分八章。由计伊周编写引言及第一、五、七、八各章；由王忠民编写第二、三、四、六各章。

限于作者的水平，书中定有疏漏欠妥之处，深望广大读者批评指正。

编著者

1996 年 4 月

目　录

引　言

变分法是研究泛函的极值或驻值的一种方法。所谓泛函，简单地说就是函数的函数。因而泛函是一个函数的表达式，它的取值决定于该表达式中的函数。这样，变分法要解决的问题就不同于函数的极值问题，它是在一组可取的函数中选定一个函数，使给定的泛函取极值或驻值。历史上第一个著名的变分问题即最速落径问题，是由 Johann Bernoulli 提出的，以后由 L. Euler 研究发展为寻求一般泛函的极值问题。下面首先介绍最速落径问题，这对理解泛函的基本概念及变分法的基本思想将有一定的启发。

设在铅垂平面内，有不在同一铅垂线上的两点 A 和 B，试在铅垂平面内，连接 A 点和 B 点的一切曲线中，寻求一曲线，使初速度为零的质点、在只受重力作用而无摩擦阻力的条件下，自 A 点沿此曲线下降到 B 点，所需时间为最短。因为下降时间随曲线形状的不同而不同，所以下降时间是函数的函数。这就是最速落径问题。

现用数学形式来表述该问题。设 A 点与坐标原点重合，B 点的坐标为(x_1, y_1)，这两点的坐标是事先给定的(参见图 1)。质量为 m 的质点从 A 沿曲线 AB 下降到 $P(x, y)$ 点时，将失去势能 mgy，g 是重力加速度。同时获得的动能为 $mv^2/2$，v 是质点位于 P 点时的速度的大小。由能量守恒定律可得

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \therefore v = \sqrt{2gy} \tag{1}$$

另一方面，若以 s 表示曲线 AB 从 A 点算起的弧长，则质点自 A 点沿曲线 $y = y(x, y)$ 下降至 P 点时的速度可表达为

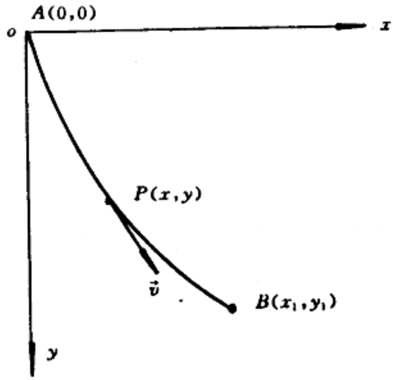

图 1

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

从(1)和(2)式得到

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x}{v} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

于是质点自 $A(0,0)$ 点沿曲线 $y=y(x)$ 下降至 $B(x_1,y_1)$ 点所需的时间为

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{3}$$

这里 $T=T[y(x)]$，它将随着所沿降落曲线 $y=y(x)$ 的不同而不同，它是一个泛函。这样，最速落径问题就归结为：在满足 $y(0)=0$ 及 $y(x_1)=y_1$ 的一切函数 $y(x)$ 中，选取一个函数使泛函(3)为最小值。

为了解决上述问题，现较为普遍地来研究最简单的泛函

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] \mathrm{d}x \tag{4}$$

的极值问题。设泛函的极值曲线 $y = y(x)$ 的边界固定不变，且 $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$，函数 $F(x, y, y')$ 认为是三阶可微的。

泛函的变分就是泛函增量的主部，因为(4)式中积分限是固定不变的，所以有

$$\delta\Pi = \delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

又因为 δF 是由 y 和 y' 的增量 δy 和 $\delta y'$ 引起的，所以其主部为：

$$\delta F(x, y, y') = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

$$\because \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y \mathrm{d}x$$

注意到在边界上 y 固定不变，所以 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$，故有

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y \mathrm{d}x \tag{5}$$

根据泛函的极值条件 $\delta\Pi = 0$ 及变分法的基本预备定理(参阅§1.2)就得到：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{6}$$

(6)式是 L. Euler 在 1744 年首先得到的，故称为 Euler 方程。现在凡是由泛函极值所得到的微分方程，不管其形式如何，都统称为 Euler 方程。

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

所以(6)式可改写为：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{7}$$

现在就可以利用 Euler 方程来解决最速落径问题了。由于(3)式所表示的泛函中的被积函数不明显地含有 x，故 Euler 方程(7)简化为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{8}$$

将(8)式乘以 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$ 后，则不难验证可将其写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0$$

因此最速落径问题的 Euler 方程有第一积分

$$F-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c_1$$

即
$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c_1$$

上式经简化后可得：

$$y(1+y'^2)=c \tag{9}$$

引入参数 θ_1，并令 $y'=\mathrm{ctg}\theta_1$，则得：

$$y=\frac{c}{1+\mathrm{ctg}^2\theta_1}=c\sin^2\theta_1=\frac{c}{2}(1-\cos 2\theta_1)$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{2c\sin\theta_1\cos\theta_1}{\mathrm{ctg}\theta_1}\mathrm{d}\theta_1=c(1-\cos 2\theta_1)\mathrm{d}\theta_1$$

$$\therefore\quad x=c\left(\theta_1-\frac{\sin 2\theta_1}{2}\right)+c_2=\frac{c}{2}(2\theta_1-\sin 2\theta_1)+c_2$$

用 $\theta=2\theta_1$ 进行代换，并注意到 $y(0)=0$，所以 $c_2=0$。于是得到：

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{c}{2}(\theta-\sin\theta)\\ y&=\frac{c}{2}(1-\cos\theta)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(10) 式就是最速落径线的参数方程，这是一组圆滚线族。$c/2$ 是滚

圆的半径，θ 称为滚动角，常数 c 由圆滚线通过点 $B(x_1,y_1)$ 这一条件来确定。所以最速落径线为一圆滚线或称旋轮线、摆线。

从上述最速落径问题，可以看到用变分法求解物理问题的主要步骤是：首先寻求物理问题的泛函并给出相应的约束条件；然后通过泛函变分由泛函的极值或驻值条件求得 Euler 方程；最后求解 Euler 方程得到物理问题的解答。

变分法在数学物理问题中，特别是在弹性力学中得到广泛的应用。这是因为一个物理系统的性状常常使得与其性状有关的某种泛函取极值或驻值。因而描述物理问题的控制微分方程及相应的边界条件，可由表征此物理问题的泛函取极值或驻值而求得。因此同一物理现象的两种数学描述方法是完全等价的。物理问题的控制方程常常是一组偏微分方程，求解这组方程并满足相应的边界条件，在数学上常常遇到困难，但从泛函变分直接求得物理问题的近似解却往往比较容易，而且能得到满意的结果。这就是变分法所以被重视的原因之一。另外，变分原理的重要性，由于近几十年来有限元法的迅速发展并得到广泛应用而更加突出起来。实践反复证明，在有限元法的数学推导中，变分原理提供了一个强有力的工具。可以认为，变分原理是有限元法的理论基础。

本书只涉及变分法在弹性力学中的应用及其发展，包括梁、板的稳定和振动问题。重点在于阐明弹性体的虚位移原理和最小势能原理；虚应力原理和最小余能原理；Hamilton 原理；各种广义变分原理及 Lagrange 乘子法。着重说明这些原理在推导弹性力学控制方程及相应边界条件时的功用。介绍变分法中的直接方法，如 Ritz 法，Галёркин 法等，以求得弹性力学问题的近似解。在本书的最后部分，还要简要地介绍弹性理论非保守问题的变分原理及其应用。

第一章　变分法的一些基本概念

§1.1　变分及其特性

变分法研究泛函的极值或驻值问题，它的一些基本概念与函数的极值问题有类似之处，但又存在着本质的区别，因此，对有关这两个问题的一些基本概念将以相互比较的方式进行叙述。

1. 函数的定义和泛函的定义

设 D 是给定的一个数集，若有两个变量 x 和 y，当变量 x 在 D 中取某一特定值时，变量 y 依确定的关系也有一个确定的值，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = y(x)$。x 称为自变量，y 称为因变量，D 为定义域。

如果对某一类函数 $\{y(x)\}$ 中的每一个函数 $y(x)$，都有一个 Π 的值与之对应，那末变量 Π 称为依赖于函数 $y(x)$ 的泛函，记作 $\Pi = \Pi[y(x)]$。$y(x)$ 称为自变函数。

所以，函数是变量与变量之间的关系，而泛函则是变量与函数之间的关系。于是泛函也可称为函数的函数。

2. 变量的微分和函数的变分

函数 $y(x)$ 的自变量 x 的改变量在它无穷小时称为 x 的微分，记作 $\mathrm{d}x$。它是自变量的某两个值之差，但其差值为无穷小。

所谓泛函 $\Pi[y(x)]$ 的自变函数 $y(x)$ 的变分，是指 $y(x)$ 和与它很接近的 $y_1(x)$ 之间的差值，记作 δy，即 $\delta y = y_1(x) - y(x)$。

曲线 $y = y(x)$ 和 $y_1 = y_1(x)$ 要怎样才能算是相差很小或很接近，这是需要进一步说明的。

当 $y = y(x)$ 和 $y_1 = y_1(x)$ 之差的模很小时，即这两条曲线的

纵坐标到处都很接近时，则曲线 $y=y(x)$ 和 $y_1=y_1(x)$ 有零级的接近度。

当 $y_1(x)-y(x)$ 和 $y'_1(x)-y'(x)$ 两个差的模都很小时，则曲线 $y=y(x)$ 和 $y_1=y_1(x)$ 有一级的接近度。

当 $y_1(x)-y(x), y'_1(x)-y'(x), \cdots\cdots, y_1^{(k)}(x)-y^{(k)}(x)$ 诸差的模都很小时，则曲线 $y=y(x)$ 和 $y_1=y_1(x)$ 有 k 级的接近度。

由以上这些定义可知，如果两曲线有 k 级的接近度，那么它们必将具有任何较低级的接近度。但如果两曲线只知其有较低级的接近度，则不能保证其一定具有较高级的接近度。如图 1.1 所示的两条曲线，在一切 x 值上不仅纵坐标很接近，而且其切线方向也很接近，因此，具有一级接近度。对于图 1.2 所示的两条曲线则只有零级接近度，因为它们的纵坐标虽然很接近，但其切线方向相差甚大。

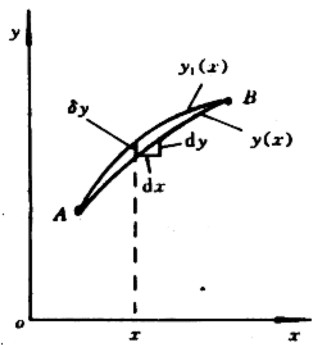

图 1.1

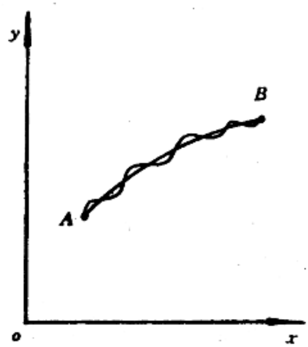

图 1.2

关于变分 δy，有一点必须强调指出，这就是我们并没有把 δy

与 δx 相连系起来。这一点是变分过程与微分过程之间所存在的明显差别。在微分法中，dy 总是与给定的 dx 相关连的。因而可以说，δy 仅仅是对应于同一个 x 值在不同的曲线上两点之间的垂直距离。而 dy 则是在同一条曲线上相距为 dx 的两点间的垂直距离(参见图 1.1)。

变分记号 δ 可以把它看成一个算子，$\delta[y(x)]$ 定义为：

$$\delta[y(x)] = y_1(x) - y(x) \tag{1.1}$$

δ 算子表示了一个函数的微小变化，其中独立变量保持固定不变。因此可以对函数 dy/dx 取变分

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y_1 - y) = \frac{d}{dx}(\delta y) \tag{1.2}$$

由此得出结论，即算子 δ 与微分运算符号 d 是可以互换的。同理，如果规定 $\int y_1(x)dx$ 是 $\int y(x)dx$ 的一个可变函数，则也可以得到变分符号可以同积分符号互换的结论。

3. **函数的微分和泛函的变分**

若函数 $y = y(x)$ 的改变量可表示为

$$\Delta y = A(x)dx + o(\Delta x)$$

式中 $dx = \Delta x$，则此改变量的线性主部 $A(x)dx$ 就称为函数 y 的微分。记作

$$dy = A(x)dx \tag{1.3}$$

函数 $y = y(x)$ 的微分存在的充分必要条件是：函数存在有限的导数 $y' = y'(x)$，这时函数的微分是

$$dy = y'(x)dx \tag{1.4}$$

上述是函数微分的一种定义方法，也可根据下述方法来定义，设 ϵ 为一参数，并将 $y(x + \epsilon\Delta x)$ 对 ϵ 求导数，得到

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}y(x + \epsilon\Delta x) = y'(x + \epsilon\Delta x)\Delta x$$

当 $\epsilon = 0$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}y(x+\epsilon\Delta x)\bigg|_{\epsilon=0}=y'(x)\Delta x=\mathrm{d}y \tag{1.5}$$

于是函数 $y(x)$ 的微分可定义为 $y(x+\epsilon\Delta x)$ 对 ϵ 的导数在 $\epsilon=0$ 处的值。这个定义同 Lagrange 处理变分的定义是相类似的。

泛函的变分也有类似的两种定义方法：

如果泛函 $\Pi[y(x)]$ 的改变量 $\Delta\Pi=\Pi[y(x)+\delta y(x)]-\Pi[y(x)]$ 可以表示为如下形式

$$\Delta\Pi=L[y(x),\delta y(x)]+\beta[y(x),\delta y]\cdot\max|\delta y| \tag{1.6}$$

其中 $L[y(x),\delta y]$ 对 δy 来说是线性的，且当 $\max|\delta y|\to 0$ 时，$\beta[y(x),\delta y]\to 0$，那末 $L[y(x),\delta y]$ 称为泛函 $\Pi[y(x)]$ 的变分，记作 $\delta\Pi$，即

$$\delta\Pi=L[y(x),\delta y(x)] \tag{1.7}$$

所以，泛函的变分是泛函改变量的线性主部。这是泛函变分的一种定义方法。

也可用 Lagrange 的泛函变分定义：泛函变分是 $\Pi[y(x)+\epsilon\delta y(x)]$ 对 ϵ 的导数在 $\epsilon=0$ 时的值。这里 ϵ 为一参数，于是

$$\delta\Pi=\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Pi[y(x)+\epsilon\delta y(x)]\bigg|_{\epsilon=0} \tag{1.8}$$

(1.7)和(1.8)式是等价的，下面给以证明：

因为

$$\Pi[y(x)+\epsilon\delta y(x)]=\Pi[y(x)]+L[y(x),\epsilon\delta y(x)]$$
$$+\beta[y(x),\epsilon\delta y(x)]\epsilon\max|\delta y(x)|$$

而且由线性关系，有

$$L[y(x),\epsilon\delta y(x)]=\epsilon L[y(x),\delta y(x)]$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Pi[y(x)+\epsilon\delta y(x)]$$
$$=L[y(x),\delta y(x)]+\beta[y(x),\epsilon\delta y(x)]\max|\delta y(x)|$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\}\max|\delta y(x)|$$

当 $\varepsilon=0$ 时，上式等号右边的第二项和第三项都等于零，于是就证明了(1.7)和(1.8)是等价的，即

$$\delta\Pi=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]\Big|_{\varepsilon=0}=L[y(x),\delta y(x)]$$

4. 函数的极值和泛函的极值

如果函数 $y=y(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内有定义，且对于这邻域异于 x_0 的任何 x 值，恒有 $y(x)>y(x_0)$，则称 $y(x_0)$ 为函数 $y(x)$ 的一个极小值，且在 $x=x_0$ 处有 $\mathrm{d}y=0$。类似地可定义函数的极大值。

对于泛函 $\Pi[y(x)]$ 的极值，也有相类似的定义。若泛函 $\Pi[y(x)]$ 在与 $y=y_0(x)$ 接近的任一曲线上的值不小于 $\Pi[y_0(x)]$，即 $\Delta\Pi=\Pi[y(x)]-\Pi[y_0(x)]>0$ 时，则泛函 $\Pi[y(x)]$ 在曲线 $y=y_0(x)$ 上达到极小值。类似地可以定义极大值。

如果具有变分的泛函 $\Pi[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极值，则在 $y=y_0(x)$ 上有

$$\delta\Pi=0 \tag{1.9}$$

此时 $y_0(x)$ 称为极值函数或极值曲线。

泛函的极值问题就是寻求函数 $y(x)$，使泛函 $\Pi[y(x)]$ 的值达到最小或最大。

对于依赖于多个未知函数的泛函和依赖于多变量的一个或多个函数的泛函的极值也有与上述类似的定义。

§1.2 变分法的基本预备定理

设函数 $\varphi(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 内连续，如果对于任意选定的连续可微函数 $\eta(x)$ 有：