

高等学校教学用书

工程测量

冶金工业出版社

高等学校教学用书

工 程 测 量

中南矿冶学院 刘延伯 主编

冶金工业出版社出版

(北京市街口74号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张 28 $\frac{1}{4}$ 字数 689 千字

1984年 11 月第一版 1984年 11 月第一次印刷

印数00,001~7,000册

统一书号: 15062·4208 定价3.80元

前 言

本书系根据冶金高等院校工程测量专业的工程测量课程教学大纲编写的。其主要内容是结合冶金系统的工程对象叙述工程测量的基本理论、建筑工程测量、线路测量、地下开采的矿山测量、地质勘探工程测量，并侧重于实用方面。鉴于测绘地形图的基本方法已在先修课程中讲述，形变观测与岩层移动已合并为另一专业课程，这些内容没有编入本书中。露天矿测量与地形测量的方法基本相同，本书将其作为附录列于书末，以供参考。

本书的原稿曾在中南矿冶学院、华东地质学院、江西冶金学院的工程测量专业中作为教材试用多次。这次编写是在原稿的基础上进行修改和补充的。

本书由刘延伯、许纪隆、隆志超三同志编写，刘延伯任主编。书稿由北京钢铁学院吴雨冲同志、东北工学院高福聚同志、华东地质学院郑士璠同志、江西冶金学院呼琦同志、中南矿冶学院罗时恒同志进行审阅，最后由刘延伯同志整理定稿。在此谨向审阅本书的同志表示谢意。

过去曾参加原稿编写的人员还有黄蔚池和田膏腴同志。

由于我们水平有限，书中不足之处在所难免，希望使用本书的同志批评指正。

编 者

1983年6月

目 录

绪论	1
第一章 施工控制网的建立	3
§ 1-1 施工控制网的布设	3
§ 1-2 误差椭圆和相对误差椭圆的理论与应用	4
§ 1-3 三角锁测量误差对贯通工程的影响	12
§ 1-4 工业企业场地施工控制网的布设方案	16
第二章 施工放样方法及其精度分析	23
§ 2-1 概述	23
§ 2-2 直线放样	25
§ 2-3 测设水平角、水平距的方法	31
§ 2-4 直角坐标法与极坐标法	34
§ 2-5 方向线交会法	37
§ 2-6 前方交会法	40
§ 2-7 侧方交会归化法放样点位	46
§ 2-8 距离交会法	46
§ 2-9 高程放样方法	48
§ 2-10 激光在工程测量中的应用	50
第三章 建筑工程测量	55
§ 3-1 概述	55
§ 3-2 工业场地的平整	55
§ 3-3 民用建筑工程施工中的测量工作	58
§ 3-4 厂房矩形控制网的建立	62
§ 3-5 工业厂房的施工测量	64
§ 3-6 烟囱的施工测量	68
第四章 线路测量	70
§ 4-1 概述	70
§ 4-2 新建铁路初测阶段的测量工作	70
§ 4-3 铁路定测阶段的测量工作	75
§ 4-4 线路纵、横断面图的测绘	79
§ 4-5 无缓和曲线的圆曲线测设	82
§ 4-6 有缓和曲线的圆曲线要素的计算及主点的测设	90
§ 4-7 用偏角法测设圆曲线加缓和曲线	95
§ 4-8 用切线支距法测设圆曲线加缓和曲线	97
§ 4-9 遇到障碍时曲线的测设	98
§ 4-10 回头曲线的测设	103
§ 4-11 竖曲线	105
§ 4-12 铁路线路施工测量	107

§ 4-13 桥梁施工测量	111
第五章 井下经纬仪导线测量	115
§ 5-1 概述	115
§ 5-2 选点、埋点和点的编号	116
§ 5-3 井下经纬仪导线的角度测量	117
§ 5-4 井下经纬仪导线的边长测量	126
§ 5-5 井下经纬仪导线测量的实施	134
第六章 井下经纬仪导线测量的误差分析和平差	143
§ 6-1 井下测角误差分析	143
§ 6-2 井下钢尺量边误差的分析	153
§ 6-3 井下经纬仪支导线的误差	161
§ 6-4 平差后经纬仪导线的误差	171
§ 6-5 井下导线测量所需精度的确定方法和井下导线测量工作设计的一般方法	181
§ 6-6 单个导线的平差	182
§ 6-7 井下导线网的平差	186
第七章 矿井平面联系测量	201
§ 7-1 概述	201
§ 7-2 地面近井点的设立	201
§ 7-3 一井定向	203
§ 7-4 一井定向的精度分析	212
§ 7-5 两井定向	228
第八章 陀螺经纬仪定向	248
§ 8-1 几个力学概念	248
§ 8-2 自由陀螺仪的特性	250
§ 8-3 扭摆的性能	251
§ 8-4 陀螺经纬仪的工作原理	252
§ 8-5 陀螺经纬仪灵敏部的运动方程	255
§ 8-6 陀螺经纬仪的分类和基本结构	261
§ 8-7 陀螺经纬仪的观测方法	264
§ 8-8 陀螺经纬仪的应用范围	268
§ 8-9 仪器常数的测定	271
§ 8-10 陀螺经纬仪定向精度的评定	271
§ 8-11 陀螺经纬仪的发展趋势	272
第九章 井下高程测量	273
§ 9-1 概述	273
§ 9-2 导入标高	273
§ 9-3 井下几何水准测量	277
§ 9-4 井下水准测量的误差	281
§ 9-5 井下经纬仪高程测量	283
§ 9-6 井下经纬仪高程测量的误差	284
§ 9-7 井下高程测量的平差	286
第十章 采掘测量与储量管理	290

§ 10-1 概述	290
§ 10-2 直线巷道中线的标定与检查	290
§ 10-3 曲线巷道中线的标定与检查	298
§ 10-4 巷道腰线的标设及检查	301
§ 10-5 天井掘进测量	305
§ 10-6 天井联系测量	308
§ 10-7 采场测量	310
§ 10-8 储量管理及损失贫化的计算	320
§ 10-9 面积计算	329
第十一章 贯通测量	334
§ 11-1 概述	334
§ 11-2 贯通测量几何要素的计算	335
§ 11-3 贯通测量误差预计的一般步骤	340
§ 11-4 两矿井间巷道贯通测量误差的预计	341
§ 11-5 井下导线加测陀螺定向后巷道贯通测量的误差预计	350
§ 11-6 竖井贯通测量的误差预计	352
§ 11-7 贯通测量实测资料的精度分析与施工措施	352
§ 11-8 贯通后实际偏差的测定和中腰线的调整	356
第十二章 矿图	359
§ 12-1 概述	359
§ 12-2 矿图的分幅编号与图例	360
§ 12-3 中段巷道平面图	362
§ 12-4 纵投影图和横断面(横剖面)图	364
§ 12-5 巷道立体图的绘制	367
第十三章 竖井施工测量及井底车场测量	381
§ 13-1 概述	381
§ 13-2 井筒中心和井筒十字中心线的标定	381
§ 13-3 竖井掘进时的测量工作	383
§ 13-4 竖井砌壁时的测量工作	386
§ 13-5 用激光投向仪指示井筒中心	390
§ 13-6 竖井井筒装备时的测量工作	392
§ 13-7 竖井延深时的测量工作	396
§ 13-8 马头门掘进施工测量	402
§ 13-9 井底车场巷道施工测量	404
第十四章 竖井提升设备安装测量	410
§ 14-1 概述	410
§ 14-2 提升绞车安装时的测量工作	411
§ 14-3 竖井井架安装测量	416
§ 14-4 天轮安装测量	422
第十五章 地质勘探工程测量	424
§ 15-1 勘探网测量	424
§ 15-2 勘探线剖面测量	427

§ 15-3 地质点、探井、钻孔等定位测量	428
§ 15-4 勘探坑道测量	431
附录 露天矿测量	433
§ 1 概述	433
§ 2 露天矿控制测量	433
§ 3 露天矿碎部测量	441
§ 4 露天矿爆破测量	443
§ 5 排土场测量	446
§ 6 露天矿产量统计	447
§ 7 露天矿矿山测量图	450

绪 论

随着科学技术的进步,工程建设项目不断增加,内容也日趋复杂。因此,工程建设对测量工作不断提出新的和更高的要求,这就促使测绘科学领域内形成“工程测量”学科。围绕工程建设对测量的需求,这门学科专门研究有关测量的理论、仪器和方法。

工程测量的内容非常广泛。就其服务对象而言,它包括工业建设测量、铁路公路测量、矿山测量、地下建筑物测量、水利工程测量、输电线路与输油管道测量以及城市建设测量等等。这是按工程类型划分的各种测量。由于工程类型不同,各类工程对测量的要求也不同,但其基本原理与基本方法却有许多共同之点。

按照工程建设的程序,一般工程建设基本上可划分为规划设计、建筑施工、经营运转(或投入生产)三个阶段。这三个阶段都需进行测量,但其内容又有差异。

工程建设规划设计阶段的测量工作,主要是提供各种比例尺的地形图。就工矿企业而言,一般以 $\frac{1}{5000}$ 的地形图用于规划设计,即进行总体规划与方案比较时应用 $\frac{1}{5000}$ 的地形图;在初步设计时应用 $\frac{1}{2000}$ 的地形图,在施工设计时应用 $\frac{1}{1000}$ 的地形图。除了测绘上述地形图外,还要为地质勘探等进行测量工作。

关于工程施工阶段的测量工作。工程设计经过审查和批准后就进入施工阶段。为了在实地进行建设,必须将设计的工程建筑物在现场标定出来。为此,要按具体情况(地形、工程的性质、施工计划等)建立不同形式的施工控制网,然后根据施工的需要用适当的放样方法将图纸上设计的建筑物转移到实地上去。工程建成以后,还要测绘竣工图作为验收移交资料,并供以后扩建或改建时使用。

在经营运转(或投入生产)阶段,为了监视重要工程建筑物的安全与稳定情况,了解工程设计是否合理,须定期对工程建筑物进行形变观测。

冶金系统的工程测量主要包括地面的土建测量、线路测量、重要设备的安装测量以及地下开采的矿山测量,其中以矿山测量的工作较多,服务时间较长,贯穿于矿业开发的全过程。除了在矿区勘探、矿山企业设计和矿井建设时期要进行许多测量工作之外,在矿井投入生产之后还要进行下列工作。

1) 及时而完整地测量和填绘井下采掘巷道平面图。矿山的巷道与采场都是随着采掘作业的进展不断改变其工作面位置,因此必须对新掘进的巷道进行测量和填图,以便及时在图上反映采掘工作的状况,了解现有巷道的几何关系和作用,并为进一步设计采掘巷道和回采工艺提供图纸资料。考虑到必须对照地面建筑物与井下巷道的相对位置,一般按统一坐标系绘制井上下对照平面图。这种图纸资料是安全合理进行采矿工作必不可少的,它不仅对目前生产有用,而且对今后(过了几十年甚至百余年)也是有用的,应作为历史性的资料保存下来。因为矿井报废以后,在旧矿井的邻近可能发现有用矿物要进行开采,或在旧矿井范围内要建设某项工程时,旧矿井的测量图纸资料是必不可少的。

2) 根据新的井巷工程设计进行施工放样。矿井投入生产之后,仍有新的开拓工程设

计, 每个矿块的开采也有采矿方法的设计。每当设计审定之后, 就应按设计的要求在现场标定巷道的开切位置、掘进的方向及巷道的坡度, 还应定期检查掘进巷道的质量。因此, 生产矿井仍有大量的施工放样工作。为了加速成巷, 改善工作条件, 往往需要进行巷道贯通测量。贯通工程的质量必须以足够的测量精度加以保证。如果在贯通测量中出现错误, 将引起巷道的报废和国家财产的巨大损失。

3) 参与研究矿体产状和性质的分布规律。地下矿体与围岩被巷道揭露之后, 地质测量人员便可进行取样、分析和绘制矿体几何图表。利用有关的数据和图表, 便能确认矿体产状与性质的空间分布规律, 因而有利于解决许多与开采矿体有关的工程问题。

4) 对矿产资源的充分合理利用与生产情况进行检查监督。在采矿过程中, 地下矿产储量是有增有减的。每个时期的矿石采掘量与损失量将使原有的矿产储量逐渐减少, 但矿体赋存规律查明之后也可能使原来推算的储量有所增加。采矿工艺本身也体现三级矿量的变化。由于不断掘进巷道, 将使可以随时回采的备采矿量有所增加; 由于从采场中不断采出矿石, 又使原来准备的备采矿量逐渐减少。这种储量或矿量变化的过程要求测量人员进行正确的统计, 使掘进与回采保持适当的比例, 从而促使矿山企业均衡地进行生产。

由于某些原因, 地下矿石不能全部开采出来, 造成损失。在开采过程中, 还可能使围岩混入矿石, 产生贫化, 贫化率过高就将增加运输和加工费用。因此, 测量人员应定期统计矿石的损失率和贫化率, 分析产生损失和贫化的原因, 促使损失率和贫化率降到容许范围以内。

总的看来, 《工程测量》是以工程作为对象, 研究进行测量工作的理论、仪器与方法; 它与地形测量、控制测量等先修课程的关系是非常密切的。但因工程测量是为工程建设服务, 工程测量人员应具有一定的工程知识, 了解其服务对象。只有这样, 才能使所进行的测量工作具有针对性, 避免盲目性。

近年来, 工程测量学科获得较大的发展, 新颖的仪器不断被引进工程测量领域。比较显著的是短程电磁波测距技术的应用。现有各种类型的电磁波测距仪, 如 ME3000, 测程为 2.5 公里, 标称精度为 $\pm(0.2\text{mm}+1\text{ppm})$, 它可代替因瓦基线尺作高精度测距。还有瑞士威尔特厂生产的测距头 DI4, 它可与该厂生产的 T_2 等仪器配合使用, 测程为 2 公里, 标称精度为 $\pm(5\text{mm}+5\text{ppm})$, 它主要用于导线测量, 也可用于放样。激光技术也被引用到工程测量中来。激光准直仪已用于工业设备安装测量与变形观测。激光导向仪也在井巷掘进中使用。这些激光器的使用, 使定线放样工作非常方便, 既能节约时间, 又能提高工效。应用电子计算机可使复杂的算题很快得出结果, 因而可用比较严密的理论来处理工程测量中的一些问题。随着电子技术的发展, 陀螺经纬仪定向的精度也显著提高, 它可取代传统的竖井几何定向, 还可在重要贯通测量中用加测陀螺边的方法来控制测角误差的累积, 提高了巷道贯通测量的精度。

科学技术的迅速发展, 促使工程测量本身要研究和解决许多新的课题。如某些科学实验工程与国防工程的建设以及工业自动化生产设备的安装, 对测量的精度要求很高, 有的提出其相邻点的相对位置误差不得超过 0.1 毫米。显然, 采用一般的作业方法是无法满足这一要求的, 必须研究新的测量仪器与方法。有关这一方面的测量叫高精度工程测量。

工程测量是涉及基础理论、技术基础理论与先进技术的测量学科, 它专门研究和解决工程建设中的各种测量问题, 对保证工程的质量与安全起着重要的作用。

第一章 施工控制网的建立

§ 1-1 施工控制网的布设

在勘测阶段建筑物的总体布置尚未确定，测图控制网点的位置主要是根据地形进行选择。控制网的精度按测图比例尺的大小确定，其目的就是为了测图。待工业企业设计确定建筑物的总体布置，开始土方工程，则原有测图控制网点或因土方工程而毁掉，或因点位分布不当而不能利用，或因密度不够而无法应用，或因精度偏低而不能满足放样的要求。为了进行施工放样测量，必须建立施工控制网。因此，除了小型工程或放样精度要求不高的工程还可利用测图控制网作为施工控制以外，一般较复杂的大中型工程都应按勘测与施工阶段的不同要求分别建立控制网，即先建测图控制网，后建施工控制网。

施工控制网的精度取决于工程建设的性质，它一般高于测图控制网的精度。当施工控制网只用于放样建筑物的主要轴线位置时，则对厂区施工控制网的精度要求不太高。如施工控制网除了用于放样主轴线以外，还需直接用来放样辅助轴线与个别细部结构，则对施工控制网的精度要求就大大提高。就桥梁而言，其施工控制网除了用以精密测定桥梁长度外，还要用以放样各个桥墩的位置，保证其上部结构正确连接，因此，桥梁控制网的精度要求比较高。

施工控制网的布设方案应根据总平面设计与地形条件来确定。对于山岭地区及跨越江河的工程，一般可用三角测量方法建网。对于地势平坦而通视困难的工业场地，则可采用导线网。对于矩形建筑物较多且布置比较规则和密集的工业场地，则可将施工控制网布置成建筑方格网。

施工控制网一般具有以下特点：

1) 被控制的范围小、控制点的密度大、精度要求较高。与测图控制网所控制的范围相比，工程施工的范围总是比较小的，因此，施工控制网所控制的范围比较小。就一个大型冶金企业而言，勘测期间布设的测图控制网所控制的面积达几十平方公里，而工业建设场地的面积一般不超过几平方公里。在这样一个较小的范围内，各种建筑物的分布错综复杂，如果没有较为稠密的施工控制点网，则在施工期间难以进行放样工作。

施工控制网主要用于放样建筑物的轴线，这些轴线定位的偏差都有一定的限值。如工业厂房主轴线定位的精度要求为2厘米；4公里以下的山岭隧道用相向开挖贯通时两中线间的横向偏差不应超过5厘米。与地形测绘的精度相比，这样的精度要求是相当高的。因此，施工控制网的精度应当高一些。

2) 使用频繁。在施工过程中，施工控制点往往直接用于放样。就桥墩而言，随着桥墩的浇筑升高，要经常控制点上放样工作。由此可见，放样控制点的使用是频繁的。这就要求控制点稳定、使用方便，并能在施工期间保持控制点的标桩不被破坏。

3) 外界干扰较多。在施工过程中，工地上施工机械多，且各建筑物的施工高度有时相差悬殊，妨碍了控制点间的相互通视。因此，施工控制点的位置应分布恰当，密度也应较大，以便放样时有所选择。

设计总平面图上一般用施工坐标系统的坐标来表示建筑物的平面位置。这个施工坐标系统就是根据建筑物的主要轴线作为坐标轴而建立起来的局部坐标系统。工业建筑场地是采用主要车间或主要生产设备的轴线作为坐标轴来建立坐标系统。大桥是用桥轴线。曲线隧道是用其一条切线。因此,在布设施工控制网时,应尽可能将这些主要轴线成为控制网的一条边。当施工控制网与测图控制网发生联系时,则应进行坐标换算,以便统一坐标系。

施工控制网对投影面的选择也与测图控制网不同,因施工放样所应用的是控制点间的实际距离,所以施工控制网的基线长度无需投影到平均海平面上。工业建设场地是将施工控制网投影到厂区平均高程面上。有的工程将基线长度投影到定线放样精度要求最高的平面上,以保证设备、构件的安装精度。桥梁施工三角网的基线长度就要求归算到桥墩顶平面上。

有的工程往往是各种建筑物、构筑物、铁路、公路的综合体,各个单项对放样的精度要求均不相同;各单项轴线间几何联系的精度要求较低,但它们的细部相对于各自轴线的精度要求较高。在这种情况下,采用两级布网方案来布设施工控制网是比较合适的。首先建立布满整个工程地区的第一级控制网,这一级控制网用以放样各个建筑物的主要轴线,再根据各单项建筑放样的具体需要建立加密的第二级控制网。第二级控制网的加密可采用插点、插网、交会定点等方法。工业建筑场地就是这样作的,其施工控制网通常包括第一级厂区控制网与第二级厂房控制网,但是,第二级控制网的精度要求不一定比第一级低。

测图时所建立的高程控制网也不能完全满足施工的需要,必须适当加密。施工期间,在建筑物近旁的不同高度上必须布设临时水准点。临时水准点的密度应保证放样时只设一个测站就能将高程传递到建筑物上。

高程控制网通常分两级布设。先在整个施工场地用三等水准测量精度建立基本高程控制网,再根据各施工阶段放样的需要用四等水准测量精度测设加密高程控制网。加密网点一般为临时水准点。为了放样方便,往往在已浇筑的混凝土上布设临时水准点。这些水准点先作为沉陷观测点使用,当所浇筑的混凝土块的沉陷基本停止以后便可作为临时水准点使用。

在平坦地区,平面控制点通常联测在高程控制网中兼作高程控制点使用。在山岭地区,平面控制网与高程控制网通常是单独布设。

§ 1-2 误差椭圆和相对误差椭圆的理论与应用

设计控制网时要进行精度分析,以便了解所建成的网是否满足规定的要求。就为测图服务的三角网而言,通常都是估算最弱边的边长相对误差及其坐标方位角的误差,有时还估算最弱点的 x 、 y 坐标误差或纵向与横向误差。但就工程测量的某些领域而言,有时还要研究点位在某些特定方向上的误差大小。这些精度估算虽说明一定的问题,但不能说明所布设的控制网能否满足要求。例如为工矿企业建设布设一个控制网,如果只是估算最弱边或最弱点的精度指标,就不能说明工业建设场地上各个主要轴线相对位置的精度。因此,在施工控制网的设计中,应当根据网的作用,采用比较全面和细致的方法进行精度分析。目前是采用计算和绘出点位误差椭圆和相对误差椭圆的方法。

设控制网中某待定点 P 的点位真误差为 PP' (图1-1), 它在坐标轴 x 方向的分量为 ε_x , 在坐标轴 y 方向的分量为 ε_y , 在任意方向 θ 的分量为 ε_θ (即 PP''), 则

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos\theta + \varepsilon_y \sin\theta \quad (1-1)$$

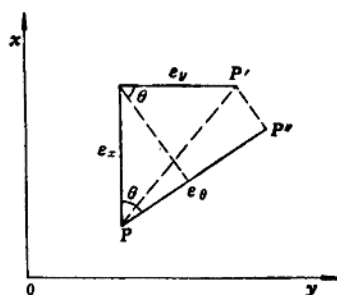


图 1-1 点位误差

根据广义误差传播律, 可得

$$m_\theta^2 = m_x^2 \cos^2\theta + m_y^2 \sin^2\theta + 2m_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad (1-2)$$

式中 m_θ 为 P 点在 θ 方向上的中误差; m_x^2 、 m_y^2 分别为 x 、 y 坐标的方差, m_{xy} 为坐标 x 、 y 的协方差。

而 $m_x^2 = \sigma^2 Q_{xx}$ $m_y^2 = \sigma^2 Q_{yy}$ $m_{xy} = \sigma^2 Q_{xy}$

其中 σ^2 为单位权方差, Q_{xx} 、 Q_{yy} 及 Q_{xy} 为 P 点坐标 (x 、 y) 的权系数。

将 (1-2) 式中 m_x^2 、 m_y^2 、 m_{xy} 用单位权方差及相应的权系数表示, 则

$$m_\theta^2 = \sigma^2 \{Q_{xx} \cos^2\theta + Q_{yy} \sin^2\theta + 2Q_{xy} \sin\theta \cos\theta\} \quad (1-3)$$

对于一定的图形中某点 P 而言, Q_{xx} 、 Q_{yy} 及 Q_{xy} 是定值, 而 m_θ 则随 θ 角的改变而改变。

现在求 m_θ 的极值。将 (1-3) 式中大括号内的式子对 θ 角取一阶导数, 并令其为零, 即可求出 m_θ 为极值时的方向 θ_0 。此时

$$\frac{d}{d\theta} \{Q_{xx} \cos^2\theta + Q_{yy} \sin^2\theta + 2Q_{xy} \sin\theta \cos\theta\} = 0$$

$$\text{即} \quad -2Q_{xx} \cos\theta_0 \sin\theta_0 + 2Q_{yy} \sin\theta_0 \cos\theta_0 + 2Q_{xy} \cos 2\theta_0 = 0$$

$$\text{简化之, 得} \quad -(Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\theta_0 + 2Q_{xy} \cos 2\theta_0 = 0$$

$$\text{移项后} \quad \tan 2\theta_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (1-4)$$

根据三角公式, 得

$$\sin 2\theta_0 = \frac{2Q_{xy}}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \quad (1-5)$$

$$\cos 2\theta_0 = \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}}$$

$$\sin^2\theta_0 = \frac{1 - \cos 2\theta_0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \quad (1-6)$$

$$\cos^2\theta_0 = \frac{1 + \cos 2\theta_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \quad (1-7)$$

将 (1-5)、(1-6)、(1-7) 式代入 (1-3) 式, 得

$$\begin{aligned}
m_{\theta_0}^2 &= \sigma^2 \left\{ Q_{xx} \left(\frac{1}{2} + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \right) + Q_{yy} \left(\frac{1}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \right) + Q_{xy} \frac{2Q_{xy}}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left\{ Q_{xx} + Q_{yy} + \frac{Q_{xx}^2 - 2Q_{xx}Q_{yy} + Q_{yy}^2 + 4Q_{xy}^2}{\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}} \right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left\{ Q_{xx} + Q_{yy} \pm \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\}
\end{aligned}$$

由此得出 m_{θ} 的极大值 e 与极小值 f

$$e^2 = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\} \quad (1-8)$$

$$f^2 = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\} \quad (1-9)$$

e 和 f 就是 P 点的点位误差椭圆的长半轴与短半轴。极值的方向可按(1-4) 确定。但不论 Q_{xx} 、 Q_{yy} 、 Q_{xy} 为何值, 利用 (1-4) 式总是求得两个根。设一个根为 $2\theta_0$, 则另一个根为 $(2\theta_0 + 180^\circ)$ 。因此, 极值的方向有两个, 一个为 θ_0 , 另一个为 $(\theta_0 + 90^\circ)$ 。显然, 两个极值的方向是正交的。现在要确定极大值的方向 θ_E 和极小值的方向 θ_F 。

由 (1-4) 式得知

$$Q_{xx} = Q_{yy} + 2Q_{xy} \operatorname{ctg} 2\theta_0$$

代入 (1-3) 式, 并将 θ 换成 θ_0 , 得

$$\begin{aligned}
m_{\theta_0}^2 &= \sigma^2 \{ \cos^2 \theta_0 (Q_{yy} + 2Q_{xy} \operatorname{ctg} 2\theta_0) + 2Q_{xy} \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \sin^2 \theta_0 Q_{xx} \} \\
&= \sigma^2 \{ Q_{yy} + (2 \operatorname{ctg} 2\theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0) Q_{xy} \}
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{ctg} 2\theta_0 &= \operatorname{ctg} \theta_0 - \operatorname{tg} \theta_0 \\
\operatorname{tg} \theta_0 \cos^2 \theta_0 &= \operatorname{ctg} \theta_0 \sin^2 \theta_0 \\
2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 &= 2 \operatorname{ctg} \theta_0 \sin^2 \theta_0
\end{aligned}$$

所以, 上式可写为

$$\begin{aligned}
m_{\theta_0}^2 &= \sigma^2 \{ Q_{yy} + (\operatorname{ctg} \theta_0 \cos^2 \theta_0 - \operatorname{tg} \theta_0 \cos^2 \theta_0 + 2 \operatorname{ctg} \theta_0 \sin^2 \theta_0) Q_{xy} \} \\
&= \sigma^2 \{ Q_{yy} + (\operatorname{ctg} \theta_0 \cos^2 \theta_0 - \operatorname{ctg} \theta_0 \sin^2 \theta_0 + 2 \operatorname{ctg} \theta_0 \sin^2 \theta_0) Q_{xy} \}
\end{aligned}$$

即

$$m_{\theta_0}^2 = \sigma^2 \{ Q_{yy} + \operatorname{ctg} \theta_0 Q_{xy} \} \quad (1-10)$$

如由 (1-4) 式得出

$$Q_{yy} = Q_{xx} - 2Q_{xy} \operatorname{ctg} 2\theta_0$$

代入 (1-3) 式, 并进行推导, 也可得

$$m_{\theta_0}^2 = \sigma^2 (Q_{xx} + \operatorname{tg} \theta_0 Q_{xy}) \quad (1-11)$$

由 (1-10) 与 (1-11) 式可以看出, Q_{xx} 与 Q_{yy} 都是正值, 而 $\operatorname{ctg} \theta_0 Q_{xy}$ 或 $\operatorname{tg} \theta_0 Q_{xy}$ 的符号不定。如将极值方向的两个值代入, 则必有一个使 $\operatorname{ctg} \theta_0$ (或 $\operatorname{tg} \theta_0$) 与 Q_{xy} 同号, 这个极值的方向就是 θ_E , 另一个极值的方向就是 θ_F , 而且 $\theta_F = \theta_E + 90^\circ$ 。因此, 两个极值的计算式又可表达为

$$e^2 = \sigma^2 (Q_{xx} + \operatorname{tg} \theta_E Q_{xy}) = \sigma^2 (Q_{yy} + \operatorname{ctg} \theta_E Q_{xy}) \quad (1-12)$$

$$f^2 = \sigma^2 (Q_{xx} - \operatorname{ctg} \theta_E Q_{xy}) = \sigma^2 (Q_{yy} - \operatorname{tg} \theta_E Q_{xy}) \quad (1-13)$$

式中权系数 (Q_{xx} 、 Q_{yy} 、 Q_{xy}) 的大小决定于图形, 其计算方法随平差方法而异。现按间接观测平差简述如下:

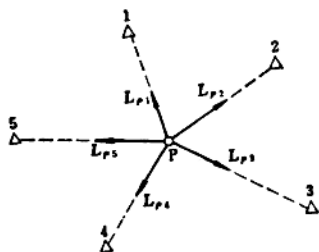


图 1-2 后交定点

如图1-2所示, 1、2、3、4、5点为已知点, P 为待定点。设在待定点 P 上观测了五个方向。每个方向的误差方程式为

$$v_{pi} = a_i \Delta x + b_i \Delta y - \Delta z_p + l_{pi}$$

$$\text{式中 } a_i = \frac{\rho'' \sin \alpha'_{pi}}{S'_{pi}}; \quad b_i = -\frac{\rho'' \cos \alpha'_{pi}}{S'_{pi}};$$

$$l_{pi} = (\alpha'_{pi} - L_{pi}) - z'_p;$$

S'_{pi} ——测站到已知点的近似距离;

z'_p ——定向角的近似值, 其改正数为 Δz_p ;

α'_{pi} ——观测方向的近似坐标方位角。

误差方程式的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -1 \\ a_2 & b_2 & -1 \\ a_3 & b_3 & -1 \\ a_4 & b_4 & -1 \\ a_5 & b_5 & -1 \end{pmatrix}_{5 \times 3}$$

观测值的权阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \end{pmatrix}_{5 \times 5}$$

则法方程式的系数矩阵为

$$N = \begin{matrix} A^T & P & A \\ 3 \times 3 & 3 \times 5 & 5 \times 5 & 5 \times 3 \end{matrix}$$

权系数矩阵为

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}$$

由此可见, 由间接观测平差的法方程系数矩阵求逆, 便可得出所需的权系数。

至于单位权方差 σ^2 ，可以根据观测时采用的仪器与方法以单位权中误差的平方 m^2 代之。

利用误差椭圆的三个参数（长半轴 e 、短半轴 f 和长半轴的方向角 θ_E ）可以画出误差椭圆。根据误差椭圆可用图解法求出点位在某个方向的误差大小，从而判断是否达到预期的精度。

如图1-3所示，若需求出 φ 方向的误差，则可垂直于该方向作误差椭圆的切线，则垂足 D 与原点 O 的连线长度 OD 就是 φ 方向的误差 m_φ 。也可按公式计算任意方向 φ 的误差，即

$$m_\varphi^2 = e^2 \cos^2 \varphi + f^2 \sin^2 \varphi \quad (1-14)$$

对于以测图为目的的控制网来说，误差椭圆的形状以接近于圆形较好，此时点位在各个方向的精度比较均匀，但须不超过规定的限值，或使其长半轴 e 不超过规定的限值。但对施工控制网来说，往往侧重于某个方向或几个方向提出精度要求。

在工程测量实践中，有时不需要点位相对于起始点的精度，而需要网中任意两点相对位置的精度，这时利用相对误差椭圆来说明网的精度分布情况是适宜的。一般说来，两点的相对位置是用其坐标增量来表示（也可用两点间的边长与坐标方位角来表示），即

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

根据广义误差传播定律，可得

$$m_{\Delta x}^2 = m_{x_2}^2 - 2m_{x_1 x_2} + m_{x_1}^2$$

$$m_{\Delta y}^2 = m_{y_2}^2 - 2m_{y_1 y_2} + m_{y_1}^2$$

$$m_{\Delta x \Delta y} = m_{x_2 y_2} - m_{x_2 y_1} - m_{x_1 y_2} + m_{x_1 y_1}$$

相应的权系数为

$$Q_{\Delta x \Delta x} = Q_{x_2 x_2} - 2Q_{x_1 x_2} + Q_{x_1 x_1}$$

$$Q_{\Delta y \Delta y} = Q_{y_2 y_2} - 2Q_{y_1 y_2} + Q_{y_1 y_1}$$

$$Q_{\Delta x \Delta y} = Q_{x_2 y_2} - Q_{x_2 y_1} - Q_{x_1 y_2} + Q_{x_1 y_1}$$

与（1-4）、（1-8）、（1-9）式类似，可以写出相对误差椭圆三个参数的计算式，即

$$E^2 = \frac{\sigma^2}{2} \{Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} + \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2}\} \quad (1-15)$$

$$F^2 = \frac{\sigma^2}{2} \{Q_{\Delta x \Delta x} + Q_{\Delta y \Delta y} - \sqrt{(Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x \Delta y}^2}\} \quad (1-16)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2Q_{\Delta x \Delta y}}{Q_{\Delta x \Delta x} - Q_{\Delta y \Delta y}} \quad (1-17)$$

用（1-17）式求 φ_0 时，若 $\operatorname{tg} \varphi_0$ （或 $\operatorname{ctg} \varphi_0$ ）与 $Q_{\Delta x \Delta y}$ 同号，则该 φ_0 就是相对误差椭圆长半轴的方向 φ_E ，其短半轴的方向为 $\varphi_F = \varphi_E + 90^\circ$ 。

利用 E 、 F 、 φ_E 三个参数可以绘出相对误差椭圆。

针对所设计的控制网图形及拟定的单位权方差绘出点位误差椭圆或相对误差椭圆之后，将工程建设对控制网提出的精度要求与设计控制网能达到的精度进行对比分析。如果认为精度合适，且在实地进行测量也无困难，则所设计的控制网方案是可取的。如果认为某一方面尚需改进，则将改变后的方案重新计算，并绘出误差椭圆，直至获得最优的布网方案。

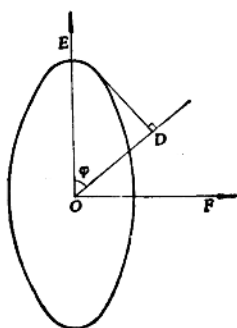


图 1-3 按误差椭圆求某方向的误差

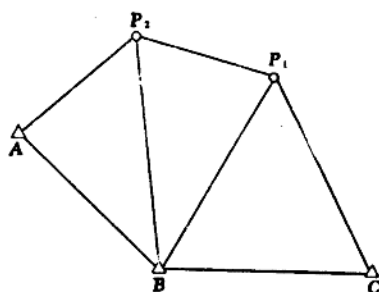


图 1-4 交会定点

例 如图1-4所示, 要由控制网点 A 、 B 、 C 插入 P_1 和 P_2 , 现需作 P_1 、 P_2 的点误差椭圆及两点的相对误差椭圆。解算步骤如下:

1) 根据控制点 A 、 B 、 C 的施工坐标和 P_1 、 P_2 点的设计坐标, 计算各方向的近似坐标方位角与近似边长, 并算出方向系数 a 、 b (列于表1-1)。此处计算中误差以厘米为单位, 故表内 (a) 、 (b) 都比控制测量方向系数表中 (a) 、 (b) 的数值小10倍。

方 向 系 数

表 1-1

测 站	目 标	坐标方位角	边长 (公里)	(a)	(b)	a	b
P_1	C	$152^\circ 25'$	1.406	0.96	1.83	0.68	1.30
	B	$195^\circ 23'$	1.145	-0.55	1.99	-0.48	1.74
	P_2	$289^\circ 41'$	0.567	-1.94	-0.69	-3.42	-1.22
P_2	P_1	$109^\circ 41'$	0.567	1.94	0.69	3.42	1.22
	B	$169^\circ 55'$	1.316	0.36	2.03	0.27	1.54
	A	$230^\circ 34'$	0.978	-1.59	1.31	-1.63	1.34

误 差 方 程 系 数

表 1-2

测 站	目 标	ξ	a x_1	b y_1	c x_2	d y_2
P_1	C	-1	0.68	1.30		
	B	-1	-0.48	1.74		
	P_2	-1	-3.42	-1.22	3.42	1.22
P_2	P_1	-1	-3.42	-1.22	3.42	1.22
	B	-1			0.27	1.54
	A	-1			-1.63	1.34
C	B	-1				
	P_1	-1	0.68	1.30		
B	A	-1				
	P_2	-1			0.27	1.54
	P_1	-1	-0.48	1.74		
	C	-1				
A	P_2	-1			-1.63	1.34
	B	-1				

2) 列出误差方程式系数 (表1-2)。

3) 利用史赖伯约化法则组成法方程式的系数 (表1-3)。

法 方 程 系 数				表 1-3
 a	 b	 c	 d	
x_1	y_1	x_2	y_2	
17.135	8.772	-17.341	-2.176	
	9.210	-9.699	-2.720	
		22.192	1.590	
			3.721	

4) 按法方程系数矩阵 N 求逆阵 Q , 此时

$$N = \begin{pmatrix} 17.135 & 8.772 & -17.341 & -2.176 \\ 8.772 & 9.210 & -9.699 & -2.720 \\ -17.341 & -9.699 & 22.192 & 1.590 \\ -2.176 & -2.720 & 1.590 & 3.721 \end{pmatrix}$$

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{x_1 x_1} & Q_{x_1 y_1} & Q_{x_1 x_2} & Q_{x_1 y_2} \\ Q_{x_1 y_1} & Q_{y_1 y_1} & Q_{x_2 y_1} & Q_{y_1 y_2} \\ Q_{x_1 x_2} & Q_{x_2 y_1} & Q_{x_2 x_2} & Q_{x_2 y_2} \\ Q_{x_1 y_2} & Q_{y_1 y_2} & Q_{x_2 y_2} & Q_{y_2 y_2} \end{pmatrix}$$

代入数值, 得

$$Q = \begin{pmatrix} 0.309957 & -0.054083 & 0.214993 & 0.049857 \\ -0.054083 & 0.270252 & 0.065985 & 0.137728 \\ 0.214993 & 0.065985 & 0.236679 & 0.072825 \\ 0.049857 & 0.137728 & 0.072825 & 0.367460 \end{pmatrix}$$

矩阵 Q 中的各元素就是权系数 Q_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$)。也可在高斯-杜力特约化表中, 用 $-1, 0, 0, 0; 0, -1, 0, 0; 0, 0, -1, 0; 0, 0, 0, -1$ 分别代替法方程的常数项, 约化求得权系数 Q_{ij} 。

5) 计算 P_1 点的误差椭圆参数 θ_E 、 e 、 f

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2Q_{x_1 y_1}}{Q_{x_1 x_1} - Q_{y_1 y_1}} = \frac{-2 \times 0.054083}{0.309957 - 0.270252} = -2.7242$$

$$2\theta_0 = 110^\circ 10' \text{ 及 } 290^\circ 10'$$

$$\theta_0 = 55^\circ 05' \text{ 及 } 145^\circ 05'$$

因 $\operatorname{tg} 145^\circ 05'$ 与 $Q_{x_1 y_1}$ 同号, 故

$$\theta_E = 145^\circ 05'$$

$$\theta_F = 55^\circ 05'$$

由此求得 $\operatorname{tg} \theta_E = \operatorname{tg} 145^\circ 05' = -0.6980$ $\operatorname{ctg} 145^\circ 05' = -1.4326$

若 $\sigma^2 = 5^2/2$, 则

$$e^2 = \sigma^2 \{Q_{x_1 x_1} + Q_{x_1 y_1} \operatorname{tg} \theta_E\} = 4.3463 \quad e = \pm 2.08 \text{ cm}$$

$$f^2 = \sigma^2 \{Q_{x_1 x_1} - Q_{x_1 y_1} \operatorname{ctg} \theta_E\} = 2.9059 \quad f = \pm 1.70 \text{ cm}$$

6) 计算 P_2 点的误差椭圆参数 θ_E 、 e 、 f

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{2Q_{x_2 y_2}}{Q_{x_2 x_2} - Q_{y_2 y_2}} = \frac{2 \times 0.072825}{0.236679 - 0.367460} = -1.1137$$