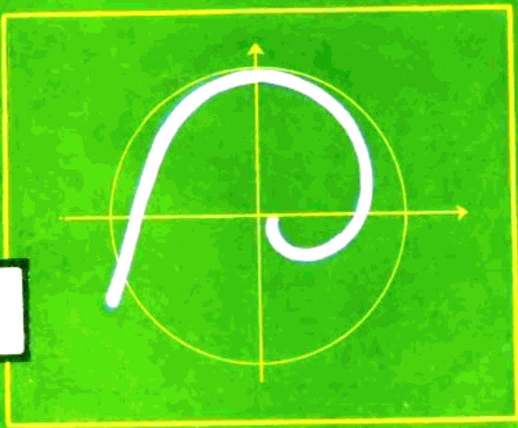
上册

王晋卿　王水汀　白长珍　张洪俊

# 经济数学讲义

JING JI SHUXUE JIANG YI



# 前　言

商业成人教育是我国教育事业的重要组成部分，它担负着为社会大商业造就宏大的有社会主义觉悟、有现代科学文化知识、有经营管理业务能力的干部队伍和具有良好文化业务技术素质的职工队伍的重任。要完成这一重任，须从多方面努力，其中"重视成人教育的教材建设"是重要方面，要"本着发挥优势、开展协作的原则……编写多种规格的教材和教学参考书。同时，要注意教材内容的更新，加快出版周期。"（《商业部关于改革和发展成人教育的意见》）

一九八八年七月商业部部属十所高校召开的"第四次函授教育协作会议"也指出："部属院校间在管理、教学等方面走协作到联合的道路是必然的，是方向所在"，要"逐步增强部属院校举办函授教育的群体力量，在社会上创出群体效益。"（《商业部部属院校第四次函授教育协作会议纪要》）

为此，山西财经学院、兰州商学院在会议期间协商合作编用函授教材。根据协议，两院决定首先统用政治经济学、经济数学讲义、经济写作、会计学原理四门课程教材。其中政治经济学、会计学原理教材由山西财经学院主编，兰州商学院参编；经济数学、经济写作由兰州商学院主编，山西财经学院参编。

这本《经济数学讲义》是为财经类专业专科层次的函授

学生编写的。为适应函授学生自学的需要，我们在编写中注意了下面几个问题：

1.选材：考虑到专科层次的教学要求与教学时数，教材只包括了微积分、线性代数与投入产出分析三个部分。在微积分中强调了经济应用而舍弃了级数与微分方程初步等内容；在线性代数中只编入了最为必要的内容；投入产出分析则选编了最为基础的部分。对于财经类的某些专业来说，可能还要学习概率统计等有关数学知识，可以通过增选补充教材来解决。

2.编排：考虑到学生以自学为主，我们力求做到阐述比较详尽但不罗嗦，特别注重概念的辨析，还通过较多的例题讲解重要的方法，每章最后附有自学指导。在内容的安排上，尽可能体现自己的特色。

3.习题：习题分为三个部分，A为普通题，我们注意到了由浅入深但没有过难的题目；B为概念题，分判断与选择两种题型；另外还有自测题，可使学生在学完一章后自己检测学习的效果，自测题以二小时答完为限。书末配有全部习题的答案。

本书分上、下两册。

参加本书编写的有兰州商学院王晋卿，王水汀与山西财经学院白长珍、张洪俊。王晋卿、王水汀为主编。具体分工如下：第一、二、三、八、九章由王水汀编写，第四、七、十章由王晋卿编写，第五章由张洪俊编写，第六章由白长珍编写。

在编写本书时参考了有关教材与习题解，不再一一列出。

由于编者水平所限，加之时间仓促，本书一定会有不足之处，我们所作的一些尝试也未必完美，如果读者在使用本书的同时能提出批评和意见，我们十分欢迎。

山西财经学院
兰 州 商 学 院
1989年3月1日

# 目　录

# 第一章　函数

## §1—1　实数

本书的讨论是在实数范围内进行的，因此我们有必要首先介绍实数以及与后面的内容密切相关的一些概念与事实。

**一．实数**

人们对数的认识是在人类社会实践的漫长历史中逐步发展的．由于要数(shǔ)而产生了（shù），数的系统的发展，则大体上是按照自然数（正整数）到有理数（正负整数，正负分数，０）再到无理数的顺序进行的．

所谓有理数是指可以表示为$\frac{q}{p}$（其中$p$与$q$都是整数且$p\neq 0$）这种形式的数．如果这里的$p$能被$q$整除（特别地，$p=1$），则$\frac{q}{p}$就是整数，所以整数是有理数的一部分．如果这里的$p$不能被$q$整除，则$\frac{q}{p}$就是分数．分数当然可以看成是有限小数或无限循环小数（例如：$\frac{5}{2}=2.5$，　$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$）．反过来，有限小数或无限循环小数都可以表示成$\frac{q}{p}$的形式（例如：５

可表示成$\frac{5}{1}$或$\frac{10}{2}$等，3.67可以表示成$\frac{367}{100}$等，$0.\dot{6}\dot{7}=\frac{67}{100}+\frac{67}{10000}+\cdots=\frac{\frac{67}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{67}{99}$等）．所以有理数包括整数（正整数，负整数，0）以及分数（正分数、负分数）或有限小数与无限循环小数。

所谓无理数是指不能表示为$\frac{q}{p}$这种形式的数．可以证明，无理数必是无限不循环小数；反过来，无限不循环小数必是无理数。例如，$\pi$是无理数．下面，我们来证明$\sqrt{3}$是无理数：

事实上，若$\sqrt{3}$不是无理数，那么$\sqrt{3}$必是有理数，所以必有整数$p$与$q$，使得$\sqrt{3}=\frac{b}{p}$，这里，我们可以假定$p$与$q$是互质的（否则，我们可以约去它们的最大公约数）．上式两边平方，得$3=\frac{b^2}{p^2}$，即$q^2=3p^2$，因为$q^2$能被3整除，所以$q$必能被3整除（否则，设$q=3n+i$，$i=1$、2，则$q^2=(3n+i)^2=6n^2+6ni+i^2$但$i^2=1$或4，都不能被3整除，故$q^2$也不能被3整除）．设$q=3n$，则$(3n)^2=3p^2$，即$9n^2=3p^2$，所以$p^2=3n^2$，这又可推出$p$能被3整除，设$p=3m$．这样一来3是$p$与$q$的公约数，所以$p$、$q$不互质，与我们前面的假定矛盾，这就证明了$\sqrt{3}$是无理数．

有理数与无理数总称为实数．我们有

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数（有限小数或无限循环小数）}\end{cases}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}
$$

**二．数轴**

在数学的历史上，把数和形结合起来，利用几何图形给数和表达式等以直观的形象，利用代数或微积分的知识对几何图形进行研究，曾经有力地推动了数学的发展．数和形结合的起点是建立数轴，使实数与数轴上的点一一对应，从而把它们等同起来．

数轴是一条有原点、有方向并且规定了单位长度的直线（图1—1.1）．

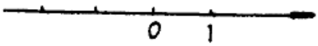



图1—1.1

现在我们在全体实数与数轴上的点之间建立一一对应关系：

对任意一个实数$a$，如果$a=0$，就让它对应于数轴上的原点$O$；如果$a>0$，就让它对应数轴上原点右边的点$P$，使得$P$与$O$的距离$|OP|=a$；如果$a<0$，就让它对应数轴上原点左边的点$Q$，使得$Q$与$O$的距离$|QO|=-a$，显然，在这种对应关系下，任何一个实数都唯一地对应了数轴上的一个点，而且不同的实数所对应的点也不同．

反过来，对数轴上任意一个点$P$，设它与原点的距离是$a(\geqslant 0)$．如果$a=0$，$P$点就是原点$O$，让它对应实数零；如果$P$在原点的右边，让它对应实数$a$；如果$P$在原点的左边，让它对应实数$-a$．显然，在这种对应关系下，数轴上任何一个点都

唯一地对应了一个实数，而且不同的点所对应的实数也不同。

在这种对应关系下，下面几条性质显然成立：

1° 零必对应数轴上的原点，数轴上的原点必对应于零。

2° 设$a$、$b$是两个实数，$P$、$Q$分别是$a$、$b$对应的数轴上的点，则$a>b$当且仅当$P$在$Q$的右边。

3° 设$a$是一个实数，$P$是$a$对应的数轴上的点，则$a>0$（$a<0$）当且仅当$P$在原点的右边（左边）。

4° 设$a$是一个实数，$P$是$a$对应数轴上的点，则$a>0$时，$a$越大（$a<0$时，$-a$越大）$P$离开原点越远，$P$在原点右边（在原点左边）离开原点越远，$a$越大（$-a$越大）。

在上述对应关系下，任一实数$a$叫做$a$所对应的数轴上的点$P$的坐标，数轴上任意一点$P$就是以$P$所对应的实数$a$为坐标的点。今后我们常常不再区分实数与数轴上的点，对实数$a$，我们有时说成是数轴上的点$a$。对于任意两个实数（数轴上的两个点）$a$与$b$，$|a-b|$表示它们之间的距离。

## 三. 绝对值

后面，我们常常要用到实数的绝对值的概念，本段给出其定义和性质。

**定义1—1.1** 一个实数$x$的绝对值，记为$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

由此可见，正数与零的绝对值是它本身，负数的绝对值等于它的相反数。实数$x$的绝对值$|x|$的几何意义就是$|x|$表示数轴上的点$x$（不论$x$是否原点，也不论$x$在原点的左边还是右边）与原点之间的距离。

下面的性质成立：

$1^{\circ}$　$|x|=\sqrt{x^{2}}$．

**证明**：$\sqrt{x^2}$表示平方等于$x^2$的那个非负数，$|x|$是非负数，并且

$$|x|^{2}=\begin{cases}x^{2}, & x\geqslant 0\\(-x)^{2}, & x<0\end{cases}$$，故对任何实数$x$，均有

$|x|^{2}=x^{2}$，即$|x|$就是平方等于$x^{2}$的非负数，所以$|x|=\sqrt{x^{2}}$．

$2^{\circ}$　$|x|\geqslant 0$．

**证明**：从绝对值的定义可直接推出．

$3^{\circ}$　$|-x|=|x|$．

**证明**：当$x=0$时，$-x=0$，所以$|-x|=|0|=0=|0|=|x|$；当$x>0$时，$|x|=x$，因为此时$-x<0$，故$|-x|=-(-x)=x$，所以$|-x|=|x|$成立；当$x<0$时，$|x|=-x$，因为此时$-x>0$，所以$|-x|=-x$，从而也有$|-x|=|x|$成立．综上所述，对任何实数$x$，$|-x|=|x|$．

$4^{\circ}$　$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$．

**证明**：因为$x>0$时，有$-|x|<x=|x|$，$x=0$时，有$-|x|=x=|x|$，$x<0$时，有$-|x|=x<|x|$，又因为“$\leqslant$”是“小于或等于”也就是“不大于”的意思，所以“$<$”与“$=$”均可写为“$\leqslant$”．所以，综上所述，对任何实数$x$，均成立$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$．

$5^{\circ}$　设$x$与$a$是两个实数，则$|x|<a$当且仅当$-a<x<a$．

**证明**：如果 $|x|<a$，则$a$必为正数，$-a$ 必为负数.当$x=0$时，当然有$-a<x<a$；当$x>0$时，$-a<x$自然成立，又因为 $|x|=x$，所以$x<a$也成立，即$-a<x<a$；当$x<0$时，$x<a$自然成立，又因为 $|x|=-x$，所以从 $|x|<a$知道$-x<a$，从而$-a<x$成立，即$-a<x<a$.综上所述，对任何实数$x$，$|x|<a$时，必有$-a<x<a$.

反过来，如果$-a<x<a$，因为$-a<a$，所以$a$必为正数，$-a$必为负数.当$x=0$时，自然有 $|x|<a$；当$x>0$时，$|x|=x$，因为$x<a$，所以 $|x|<a$；当$x<0$时，$|x|=-x$，因为$-a<x$，所以$-x<a$，所以 $|x|<a$，综上所述，对任何实数$x$，$-a<x<a$时，必有 $|x|<a$.

注意：如果把 $|x|<a$，$-a<x<a$ 分别改为 $|x|\leqslant a$，$-a\leqslant x\leqslant a$，性质5°仍然成立.

从几何上看，$|x|<a$表示点$x$与原点之间的距离小于$a$，显然，点$x$必在点$-a$到点$a$之间，反之，在点$-a$到点$a$之间的点$x$，它和原点之间的距离必小于$a$.

6° 如果$x$与$a$是两个实数，$a>0$. 则 $|x|>a$当且仅当$x>a$或$x<-a$.

**证明**：因为 $|x|>a>0$，所以$x\neq 0$，如果$x>0$，则$|x|=x$，所以$x>a$；如果$x<0$，则 $|x|=-x$，所以$-x>a$即$x<-a$.

反过来，如果$x>a$，则$x$必为正数，所以 $|x|=x$，从而 $|x|>a$；如果$x<-a$，则$x$必为负数，且$-x>a$，又因为此时 $|x|=-x$，所以 $|x|>a$.

注意：如果把 $|x|>a$，$x>a$，$x<-a$分别改为 $|x|\geqslant a$，$x\geqslant a$，$x\leqslant -a$，性质6°仍然成立.

从几何上看，$|x|>a$表示点$x$与原点之间的距离大于$a$，显然它不可能在点$-a$到点$a$之间而只能在点$-a$ 的左边或点$a$的右边。反之，在点$-a$的左边或点$a$的右边的 点$x$与原点之间的距离必大于$a$。

$7^\circ$　$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

**证明**：根据性质$4^\circ$，

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,$$
$$-|y|\leqslant y\leqslant|y|.$$

两式相加得

$$-(|x|+|y||)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|,$$

再根据性质$5^\circ$，有

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

$8^\circ$　$|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

**证明**：因为$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$，所以

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

$9^\circ$　$|x\cdot y|\ |x|\cdot|y|$.

$10^\circ$　$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.

根据绝对值的定义，性质$9^\circ$与$10^\circ$显然成立。

**四、区间**

在以后的讨论中，我们常常限制在一部分实数的范围内来考虑问题，而且很多场合，这个范围是指介于某两个实数之间的一切实数。为了简明地表示这个范围，我们引入区间的概念。

设$a$与$b$为两个实数且$a<b$，我们定义：

$1°$　满足不等式$a<x<b$的实数$x$的全体叫做一个开区间，用（$a$，$b$）表示这个开区间。

$2°$　满足不等于$a\leqslant x\leqslant b$的实数$x$的全体叫做一个闭区间，用〔$a$，$b$〕表示这个闭区间。

$3°$满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的实数$x$的全体叫做一个半开区间，分别用〔$a$，$b$）与（$a$，$b$〕表示它们。

无论上述三种区间中的哪一种，都把$b-a$叫做区间的长度。这些区间都有一定的长度，称之为有限区间（注意，有限区间不是指区间中只有有限个数，而是指区间长度有限，一个区间中总有无限多个数）。$a$称为区间的左端点，$b$称为区间的右端点。一个区间如果是闭区间，就包括它的两个端点；如果是开区间，就不包括它的两个端点（注意此时区间的数中既无最大数，也无最小数）；如果是半开区间，就只包括它的一个端点。

除了上述有限区间外，还有所谓的无限区间。为表示无限区间，我们首先引进符号“$\infty$”，称为无穷大。无穷大不是一个数，现在我们用它表示一个区间是无限的，今后还将用它表示一个变量的变化趋势。为了表示区间是包含一切比某实数$a$小的实数的全体还是包含一切比某实数$a$大的实数的全体，我们还在“$\infty$”前冠以“－”或“＋”，这样就有了符号“$-\infty$”与“$+\infty$”。无限区间有下列几种：

$1°$　（$-\infty$，$+\infty$）表示全体实数，也记为$-\infty<x<+\infty$。

$2°$（$a$，$+\infty$）表示全体大于$a$的实数，也记为$a<x<+\infty$。

$3°$　〔$a$，$+\infty$）表示全体不小于$a$的实数，也记为$a\leqslant$

$x<+\infty$。

4° $(-\infty, a)$表示全体小于$a$的实数，也记为$-\infty<x<a$。

5° $(-\infty, a]$表示全体不大于$a$的实数，也记为$-\infty<x\leqslant a$。

无论是$-\infty$还是$+\infty$都不是一个数，所以它们都不能作为区间的端点。所以一个区间是无限区间时，它或者没有端点(如$(-\infty, +\infty)$)，或者只有右端点（如$(-\infty, a)$，$(-\infty, a]$），或者只有左端点（如$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$）。在有$-\infty$或$+\infty$的一边，不能用“闭”的符号“[”或“]”。

从数轴上看，有限区间是介于某两点之间的一条线段上的点的全体，这两点就是区间的端点，两点间的距离就是线段的长度也就是区间的长，闭区间是包含两个端点的线段，开区间是不包含两个端点的线段，半开区间是只包含左端点或右端点的线段。无限区间$(-\infty, +\infty)$是指数轴上的点的全体，$(-\infty, a)$是指数轴上的点$a$左边的半直线上的点的全体，但不含$a$（$(-\infty, a]$也是这条半直线上的点的全体，但含有点$a$）。$(a, +\infty)$是指数轴上点$a$右边的半直线上的点的全体，但不含点$a$（$[a, +\infty)$也是这条半直线上点的全体，但含有点$a$）。

在今后讨论的某些场合，我们不需要或暂时不能指明区间的开闭时，就简单地说成是“区间”，并用“圆括号”来表示，如果一个点$x$在某个区间$(a, b)$中，就用符号$x\in(a, b)$表示，例如，$2\in[1, 3)$。此外，如果一个区间是闭区间，我们常说在这个区间“上”如何如何，如果一

个区间是开区间，我们常说在这个区间“内”如何如何。

最后，我们来介绍后面要用到的邻域的概念，邻域是一种特殊的区间。

**定义1—1.2** 设$a$，$\delta$为两个实数，$\delta>0$，把满足不等式

$$a-\delta<x<a+\delta$$

的实数$x$的全体称为点$a$的$\delta$邻域。

例如，1的0.5邻域是满足$1-0.5<x<1+0.5$，即满足$0.5<x<1.5$的实数的全体。

我们来看邻域的其他几种表示形式：

从定义1－1.2和开区间的定义，点$a$的$\delta$邻域是开区间$(a-\delta, a+\delta)$（图1—1.2）。由图可见，$a$处在此线段的

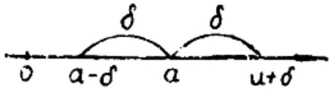


图1—1.2

中点，故把$a$称为这个邻域的中心。从$a-\delta$到$a$与从$a$到$a+\delta$的距离都是$\delta$，我们把$\delta$称为这个邻域的半径，而整个邻域的长度是$2\delta$。

定义1—1.2中的不等式与$-\delta<x-a<\delta$是一致的，而据绝对值的性质5°这又与$|x-a|<\delta$是一致的，但$|x-a|$表示数轴上的点$x$与$a$之间的距离，所以点$a$的$\delta$邻域就是数轴上与点$a$的距离不超过$\delta$的点的全体。

如果在点$a$的$\delta$邻域中去掉实数$a$，那么就在这个邻域中去掉了中心，这样得到的一个东西我们形象地称其为点$a$的$\delta$空心邻域。很明显，点$a$的$\delta$空心邻域就是把两个开冈间$(a,$