

汇优秀试题之精萃 集思想方法之大成
筑能力培养之平台 走培优竞赛之新路

数学

培优竞赛

新方法



SHUXUE
PEIYOU JINGSAI
XINFANGFA

初一年级

黄东坡 著

湖北人民出版社

XINFANGFA

数学 培优竞赛

黄东坡 著

新方法

初一年级

湖北省黄冈市黄州中学
黄东坡 著

湖北人民出版社
（武汉）

ISBN 7-311-03300-0
定价：3.00元

湖北人民出版社
（武汉）

ISBN 7-311-03300-0

湖北省黄冈市黄州中学
黄东坡 著

湖北人民出版社
（武汉）

ISBN 7-311-03300-0
定价：3.00元

湖北人民出版社
（武汉）

鄂新登字 01 号

数学培优竞赛新方法
初一年级

黄东坡 著

出版：湖北人民出版社
发行：

地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：武汉市汉桥印刷厂
开本：787 毫米×1092 毫米 1/16
字数：323 千字

经销：湖北省新华书店
印张：13

版次：2002 年 7 月第 1 版
印数：1—12 120

印次：2002 年 7 月第 1 次印刷
定价：15.00 元

书号：ISBN 7—216—03390—6/G·905

序

2002年1月,湖北省新闻出版局组织评选出了2001年“最有影响的10本书”,名列榜首的是《康熙大帝》,排名第六的是《数学培优竞赛新帮手》(下简称《新帮手》)——黄东坡的大作,其余的8本书,也都选自不同的领域:政治、经济、科普、历史和艺术。从1月9日的《武汉晚报》得到这一消息后,我感到非常激动,因为《新帮手》的成功也是我的预期,证明我对该书的判断和鉴赏是正确的,向读者的举荐和承诺是可信的;我感到激动,还因为一本关于培优竞赛辅导的书,也能跻身于《康熙大帝》、《中国共产党历史图典》、《世界摄影名作欣赏》、《21世纪高级营销书库》等宏篇巨制之中,毕竟是一件意料之外的事。

面对《新帮手》的成就,本来可以弹冠相庆,作些修饰与补正的工作,但黄东坡并没有止于此,而是乘胜前进,继续探索,终于又一部新作《数学培优竞赛新方法》(下简称《新方法》)问世。我赞赏这样的精神,因为著书与教学满足同样的公理:没有最好的,只有不断地反思才可能更好。一打开《新方法》,你就会发现,它的创新之处在于:从知识的回眸说起,重过程;以“知识纵横”发轫,浸透着历史的信息,重思想;在标题后是一阕名言,紧扣主题的同时也关注着人文精神的滋养,这体现的是什么呢?一种改革的精神,一种数学教育的现代理念。同样,你也会发现《新方法》贯穿了现代数学教育的基本理念:比如课题组织与学习进程同步、与学生发展协调、与培优过程一致的基本设想;以典型问题为载体,着力反映教学真实,选材联系课本而又高于课本的基本原则;点拨、旁批和计白当黑的例题分析方式;着眼针对性、层次性以及开放互动性的训练材料;以及丰富性、实用性和有序性兼具的数学竞赛课程资源等,这些被实践所证明了的成功经验,在本书中又得以进一步张扬,成为作者的写作个性,这体现的是什么呢?是一种重视学术经验、重视教学积累的正确态度,既有反思,又有发展,不是否定,而是扬弃,这正是现代数学教育理念的精神所在。因此,我们说,体现现代数学教育理念,而且把这种理念转化为教学行为和写作实践,是本书的突出特点。

随着《义务教育国家课程标准》的颁布,数学教育正处于一个重要的变革时期,人们对数学的认识,对数学学习的认识,对数学价值与功能的认识,都在发生着显著的变化,它们将直接影响到中考数学、竞赛数学中内容的选取、题型的变化,影响到数学试题的立意、情境和设问方式,当这一切都在变化的时候,不能没有适应这种变化的培优竞赛读本。这是一个良好的机遇,看来,这个机遇又被黄东坡抓住了。我们期待着:有更多的老师会与作者达成共识,有更多的学生会从中受益。

裴光亚

2002年5月于武昌水果湖

审视反思 萌动突破

2001年10月,我来到广州,参加骨干教师国家级培训,在三个月的培训中,我有幸聆听到国内外著名专家学者关于国家课程标准、基础教育改革、数学教育进展、东西方数学教育比较等方面的演讲,他们高屋建瓴、总揽全局的讲演,极大地开阔了我的视野,我看到一场数学教育的范式革命已悄然拉开了序幕。

岁末回到武汉,我全面分析了一年来全国各地中考试题、各级竞赛试题,透过试题,能感受到颁布不久的《义务教育国家课程标准》(以下简称《标准》)给命题者带来的深刻影响,把握到他们清晰的命题思路:逼近课程标准,通过命题的改革与创新,反映新的数学教育理念,具体体现在:

- 设计新颖的试题,在新的情景下考查基础知识和基本技能,组合填空、完形填空、多项选择、阅读理解问题崭露头角;
- 削弱几何证明难度,强调数形结合,引入几何动态;
- 改变问题的设问方式,变封闭为开放,给学生以主动的思考空间;
- 要求运用学过的数学知识,通过观察、试验、联想、演绎、归纳、类比、分析、综合等思维形式,对数学问题进行探索和研究,探索性问题、发展性问题大量涌现;
- 通过类比和联想、延伸和推广,考查数学创新能力;
- 倡导数学建模、数学应用,贴近社会实际、体现时代要求的情景应用题应运而生

.....

本套书就是这次培训学习与分析思考的结晶,它以《标准》为指导,将初中数学组织为90个专题讲座,以最新中考、竞赛试题为载体,运用开放互动式写作方式,注重数学思想方法的介绍、数学思维的培养、数学意识的培育、跨学科的综合渗透、数学文化氛围的营造,本套书的编写宗旨是:知识能力并举、培优竞赛兼顾、激发学习兴趣、优化学习过程、追求人文关怀、培养数学美感。

愿读者能透过本书的创意,优化教学过程,优化学习过程,从中感受到数学教育改革、试题创新设计的一缕气息。

多年来,湖北大学数学系汪江松先生、武汉市教研室胡顺先生给了我很多的支持和帮助。百忙之中,裴光亚先生又欣然作序。在写作过程中,湖北省水果湖第二中学领导、老师给了我关怀,武汉魏红女士、柯华女士、张立临先生,江苏海门范红洪小姐,广州留美博士朱洁华女士等给予了我帮助,在此一并表示诚挚的谢意。

黄东坡

2002年5月于湖北省水果湖第二中学

目 录

代 数 篇

- ① 攀登前的回眸——整数的基本知识 (1)
- ② 跨越——从算术到代数 (6)
- ③ 创造的基石——观察、归纳与猜想 (12)
- ④ 数轴——数与形的第一次碰撞 (18)
- ⑤ 解读绝对值 (22)
- ⑥ 计算——工具与算法的变迁 (26)
- ⑦ 物以类聚——话说同类项 (32)
- ⑧ 一元一次方程 (37)
- ⑨ 绝对值与一元一次方程 (42)
- ⑩ 列方程解应用题——有趣的行程问题 (46)
- ⑪ 列方程解应用题——设元的技巧 (52)
- ⑫ 社会、生活、经济——情境应用题 (57)
- ⑬ 一次方程组 (62)
- ⑭ 一次方程组的应用 (68)
- ⑮ 倾斜的天平——由相等到不等 (74)
- ⑯ 不等式(组)的应用 (79)
- ⑰ 整式的乘法与除法 (85)
- ⑱ 乘法公式 (90)

几 何 篇

- ⑲ 几何初步 (95)
- ⑳ 线段 (99)
- ㉑ 角 (104)
- ㉒ 平行线的判定与性质 (109)
- ㉓ 简单的面积问题 (115)

综 合 篇

- ㉔ 质数、合数与因数分解 (121)
- ㉕ 奇数、偶数与奇偶分析 (125)
- ㉖ 整数整除的概念和性质 (129)
- ㉗ 不定方程、方程组 (134)
- ㉘ 计数方法 (138)
- ㉙ 最值问题 (143)
- ㉚ 创新命题 (148)
- 参考答案 (154)

1 攀登前的回眸——整数的基本知识

成功的花

人们只惊慕她现在的明艳

然而她当初的芽儿

却洒遍了牺牲的血雨

浸透了奋斗的泪泉

——冰心

知识纵横

在小学数学中,我们学习过数和数的运算及性质等丰富的知识,在攀登新的知识台阶前,我们对这些相关知识作一个回顾.

数(shù)起源于数(shǔ),远古时代,原始人在集体劳动中,为了区分物的多少,他们用石子、沙粒、树枝或贝壳等实物来计数,用“绳结”或“刻符”记录在打制石器、捕猎野兽和分配食物等活动中遇到的各种数量,数学的产生就是从这里开始的.

整数(integer)是“数”的基础,只有掌握了整数的一系列性质后,才能研究“数”的其它性质,并把结果应用到其它各学科中去.

整数的基本知识主要是以下内容:十进制整数表示法、奇数与偶数、质数与合数、最大公约数与最小公倍数、整数的整除性、整数运算律等.

例题求解

【例1】 我们平常用的数是十进制数,如 $2639 = 2 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10 + 9$,表示十进制的数要用10个数的数码(又叫数字):0, 1, 2, 3, ……9,在电子计算机中用的是二进制,只要两个数码0和1,如二进制中 $101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$ 等于十进制的数5,那么二进制中的1101等于十进制的数_____。(2001年浙江省金华市中考题)

思路点拨 从阅读中可知,无论何种进制的数都可表示与数位上的数字、进制值有关联的和的形式.

链接

记数符号——数字的产生经历了一个漫长的过程,我们现在普遍使用的数字1, 2, ……9,称为阿拉伯数字,它实际是印度人创造的,在13世纪初,阿拉伯人把印度数字加以变化,传到欧洲,因而被欧洲人称为阿拉伯数字.

第二次世界大战期间,英国数学家图灵设计了一台计算机,堪称现代计算机的原型;1946年,普林斯顿大学的E-VADAC电子计算机制成,方案的主要设计者是20世纪最伟大的数学家之一冯·诺依曼.

电子计算机采用二进制,目的是可以用通电、断电表示两个不同数码.



【例 2】 两个正整数的和是 60,它们的最小公倍数是 273,则它们的乘积是()

- A. 273 B. 819 C. 1911 D. 3549

(第 12 届“希望杯”邀请赛试题)

思路点拨 从已知条件出发,求出 (a, b) (表示 a, b 的最大公约数)是解本例的关键.

【例 3】 每一本书都有一个国际书号:ABCDEFGHIJ.其中 A、B、C、D、E、F、G、H、I 由九个数字排列而成,J 是检查号码.

令 $S = 10A + 9B + 8C + 7D + 6E + 5F + 4G + 3H + 2I$, r 是 S 除以 11 所得的余数,若 r 不等于 0 或 1,则规定 $J = 11 - r$ (若 $r = 0$,则规定 $J = 0$;若 $r = 1$,则规定 J 用 x 表示).现有一本书的书号是 962y707015,求 y 的值.

思路点拨 按检验程序求出 S 被 11 除所得的余数,进而求出 y 的值.

【例 4】 若三个正整数 1238、1596、2491 分别被 m 除余 n (m, n 为正整数),求 $m + n$ 的值.
(2000 年新加坡数学竞赛题)

思路点拨 将不整除问题转化为整除问题加以解决,关键是用到以下一个重要事实:几个整数被同一个整数除时,若它们的余数相等,则它们两两之差也能被这个正整数整除.

【例 5】 一个四位数,这个四位数与它的各位数字之和是 1999,求这个四位数,并说明理由.
(重庆市竞赛题)

思路点拨 设所求的四位数为 \overline{abcd} ,由题意可得关于 a, b, c, d 的一个等式,运用估算、讨论、枚举等方法,分别求出 a, b, c, d 的值.

设 a, b 是整数,
 (a, b) 、 $[a, b]$ 分别表示
它们的最大公约数和最
小公倍数,那么有:

$$(1) (a, b) \times [a, b] = ab;$$

$$(2) \text{若 } (a, b) = d, [a, b] = m, \text{ 则 } (ka, kb) = kd, [ka, kb] = km.$$

书籍具有推广和传递知识及文化的功能,出版商一般都会采用国际标准书号 ISBN(International Standard Book Number)来辨号,ISBN 是由 10 个数字组成的,前 9 个分成三组,分别用来显示出区域语言、出版社和书名的资料,而最后一个数字则作校验之用.

在中国内地出版的书,第一组的代号是“7”,在香港出版的则是“962”,英文书籍是“0”.

解与整数相关的问题,常常要用到“估算”这种重要方法,运用估算是在解决问题的过程中,合理运用缩放、近似等方法简化计算的一种算法,运用估算往往能使我们更迅速地接近正确目标.

学 力 训 练

基础夯实

1. 自然数 a, b, c, d, e 都大于 1, 其乘积 $abcde = 2000$, 则其和 $a + b + c + d + e$ 的最大值为_____, 最小值为_____.

(2000 年“五羊杯”邀请赛试题)

2. 设 m 和 n 为大于 0 的整数, 且 $3m + 2n = 225$.

(1) 如果 m 和 n 的最大公约数为 15, 则 $m + n =$ _____;

(2) 如果 m 和 n 的最小公倍数为 45, 则 $m + n =$ _____.

(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

3. 已知 p, q 均为质数, 并且存在两个正整数 m, n , 使得 $p = m + n, q = mn$, 则 $\frac{p^p + q^q}{m^n + n^m}$ 的值为_____.

4. 一个四位数能被 9 整除, 去掉末位数后得到的三位数是 4 的倍数, 则这样的四位数中最大的一个, 它的末位数是_____.

5. 不超过 700π (π 是圆周率) 的最大整数是().

A. 2100

B. 2198

C. 2199

D. 2200

(2001 年“五羊杯”邀请赛试题)

6. 如果 a, b, c 是三个任意整数, 那么 $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ ().

A. 都不是整数

B. 至少有两个整数

C. 至少有一个整数

D. 都是整数

(2001 年 TI 杯全国竞赛题)

7. 设 $a = \frac{1998}{1999}, b = \frac{1999}{2000}, c = \frac{2000}{2001}$, 则下列不等式关系中正确的是().

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $c < b < a$

(第 15 届江苏省竞赛题)

8. 若 P 为质数, $P^3 + 5$ 仍为质数, 则 $P^5 + 7$ 为().

A. 质数

B. 可为质数也可为合数

C. 合数

D. 既不是质数也不是合数

9. 甲、乙、丙三个数分别是 312, 270, 211, 用自然数 A 分别去除这三个数, 除甲所得余数是除乙所得余数的 2 倍, 除乙所得余数是除丙所得余数的 2 倍, 求这个自然数 A .

(天津市竞赛题)

10. 是否存在 \overline{ab} 和 \overline{cd} (\overline{ab} 表示两位数, 依此类推), 使得 $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{abcd}$? 若存在, 请举例说明; 若不存在, 请说明理由. (21 届俄罗斯竞赛题)

 链接

阅读是人们摄取知识的主要手段和认识世界的重要途径, 现代及未来社会要求人们具有的阅读能力已不再只是语文阅读能力, 而是一种以语文阅读能力为基础, 包括外语阅读能力、数学阅读能力、科技阅读能力在内的综合阅读能力.

读数学书, 要边读书边思考. 对于概念, 要抓住关键词句推敲, 从概念间的相互联系中去掌握概念; 对于公式、法则、性质等, 要思考结论的准确意思、公式成立的条件、适用的范围; 对于例题, 要自己先动手做一做, 再与书上的解答对照, 找出知识上的缺陷、错误, 并从中总结适用知识的规律.

能力拓展

11. 计算 $1998 \times 19971997 - 1997 \times 19981997 =$ _____ .
(新加坡数学竞赛题)
12. 设 $K=13$, 在 $3, 3, K, K$ 中添加 $+, -, \times, \div$ 的运算(可以加括号), 使得运算结果是 36, 算式是 _____ .
(2001 年“五羊杯”竞赛题)
13. 今天是星期日, 从今天算起, 第 $\underbrace{111 \dots 1}_{2000 \text{ 个 } 1}$ 天是星期 _____ .
(第 15 届江苏省竞赛题)
14. 若质数 m, n 满足 $5m + 7n = 129$, 则 $m + n$ 的值为 _____ .
15. 右边是一个六位数乘以一个一位数 $\begin{array}{r} a b c d e f \\ \times \quad \quad \quad 4 \\ \hline e f a b c d \end{array}$ 的算式, a, b, c, d, e, f 各代表一个数字(不一定相同), 则 $a + b + c + d + e + f =$ ().
A. 27 B. 24 C. 30 D. 以上都不对
16. 设六位数 $N = x1527y$ 是 4 的倍数, 且 N 被 11 除余 5, 那么 $x + y$ 等于().
A. 8 B. 9 C. 10 D. 11
17. 同 $\min(a, b)$ 表示 a, b 两数中较小者, $\max(a, b)$ 表示 a, b 两数中较大者, 例如 $\min(3, 5) = 3, \min(3, 3) = 3, \max(3, 5) = 5, \max(5, 5) = 5$. 设 a, b, c, d 是互不相等的自然数, $\min(a, b) = P, \min(c, d) = Q, \max(P, Q) = x, \max(a, b) = M, \max(c, d) = N, \min(M, N) = y$, 则().
A. $x > y$ B. $y > x$ C. $x = y$ D. $x > y, y > x$ 都有可能
(2000 年“五羊杯”竞赛题)
18. 把一张纸剪成 5 块, 从所得纸片中取出若干块, 每块剪成 5 块; 再从以上所得纸片中取出若干块, 每块剪成 5 块……, 这样类似的进行, 剪完某一次以后停止, 共得纸片总块数可能是().
A. 1998 块 B. 1999 块 C. 2000 块 D. 2001 块
19. 甲、乙、丙三位同学分别发出新年贺卡 x, y, z 张, 如果已知 x, y, z 的最小公倍数为 60; x, y 的最大公约数为 4; y, z 的最大公约数为 3, 那么, 甲发出的新年贺卡是多少张? (北京市“迎春杯”竞赛题)
20. 一个五位数, 若前三个数字表示的三位数与后二个数字表示的两位数的和能被 11 整除, 判断这个五位数能否被 11 整除, 并说明理由.

综合创新



自主的激情
自由的想象
大胆的怀疑
独立的批判
愿每个人

所闪现的创新的
火花
缀满天空
哪怕只有萤火虫
那样微弱的光芒

21. 在黑板上写出下面的数 $2, 3, 4, \dots, 2002$, 甲先擦去其中的一个数, 然后乙再擦去一个数, 如此轮流下去, 若最后剩下的两个数互质, 则甲胜; 若最后剩下的两个数不互质, 则乙胜, 你如果想胜, 应当选甲还是乙? 说明理由.

22. 观察按下列规则排成的一列数:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{1}{6}, \dots (*)$$

(1) 在(*)中, 从左起第 m 个数记为 $F(m)$, 当 $F(m) = \frac{2}{2001}$ 时, 求 m 的值和这 m 个数的积.

(2) 在(*)中, 未经约分且分母为 2 的数记为 c , 它后面的一个数记为 d , 是否存在这样的两个数 c 和 d , 使 $cd = 2001000$, 如果存在, 求出 c 和 d ; 如果不存在, 请说明理由.

(2002 年湖北赛区选拔赛题)

2 跨越——从算术到代数

加里宁曾经说过：数学是锻炼思维的体操，体操能使你身体健康，动作敏捷；数学能使你的思想正确敏捷，有了正确的思想，你们才有可能爬上科学的大山。

——华罗庚

知识纵横

“算术”可以理解为“计算的方法”，而“代数”(algebra)可以理解为“以符号替代数字”，即“数学符号化”。著名数学教育家玻利亚曾说：“代数是一种不用词句而只用符号所构成的语言。”

用字母表示数是数学发展史上的一件大事，是由算术跨越到代数的桥梁，是人类发展史上的一个飞跃，也是代数与算术的最显著的区别。

字母表示数使得数学具有简洁的语言，能更普遍地说明数量关系，在列代数式(algebra expression)、求代数式的值、形成公式等方面有广泛的应用。

例题求解

【例1】观察下列等式

$$9 - 1 = 8,$$

$$16 - 4 = 12,$$

$$25 - 9 = 16,$$

$$36 - 16 = 20,$$

……

这些等式反映出自然数间的某种规律，设 n 表示自然数，用关于 n 的等式表示出来：_____。(2001年河南省中考题)

思路点拨 在观察给定的等式基础上，寻找数字特点，等式的共同特征，发现一般规律。

链接

华罗庚(1910—1985)，我国现代有世界声誉的数学家，初中毕业后，靠自学成才，在数论、矩阵几何等许多领域中作出过卓越贡献。

纵观历史，数学的发展创造了数学符号，新的数学符号的使用又反过来促进了数学的发展，历史是这样一步步走过来的，并将这样一步步地继续走下去，数学的每一个进步都必须伴随着新的数学符号的产生。

在文明和科学的发展过程中，人类创造用符号代替语言、文字的方法，这是因为符号比语言、文字更简练、更直观、更具一般性。

从个别事物中发现一般性规律，这种研究问题的方法叫“归纳法”，是由特殊到一般的思维过程，是发明创造的基础。



用字母表示数,有利于运用代数式揭示问题中的数量关系,便于找到数量的相依关系或相等不等关系,具有设元意识,会用代数式表示,是由算术习惯向代数过渡的重要步骤,是突破算术方法的定势的关键.

【例2】 一家三人(父亲、母亲、女儿)准备参加旅行团外出旅游,甲旅行社告知:“父母买全票,女儿按半价优惠”,乙旅行社告知:“家庭旅游可按团体票计价,即每人均按全价的 $\frac{4}{5}$ 收费”.若这两家旅行社每人的原票价相同,那么,优惠条件是().

- A. 甲比乙更优惠
B. 乙比甲更优惠
C. 甲与乙相同
D. 与原票价有关

(2000年重庆市中考题)

思路点拨 引入字母,以符代数,用代数式表示两家旅行社收费,从而作出判断.

【例3】 计算

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2002}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2001}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2002}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2001}\right)$$

思路点拨 直接计算复杂而繁难,注意括号内数式的联系,引入字母,将复杂的数值计算转化为简单的式的计算.

【例4】 2008年夏季奥运会的主办城市已于2001年7月13日揭晓:中国北京,在此之前,为了支持北京申奥,红、绿两支宣传北京申奥万里行车队在距北京3000千米处会合,并同时向北京进发,绿队走完了2000千米时,红队走完1800千米,随后,红队的速度比原来提高20%,两车队继续同时向北京出发.

- (1) 求红队提速前红、绿两车队的速度比.
- (2) 问红、绿两支车队能否同时到达北京? 说明理由.
- (3) 若红、绿两支车队不能同时到达北京,那么,哪支车队先到达北京? 求出第一支车队到达北京时,两车队的距离.

(2001年福建省龙岩市中考题)

思路点拨 (1)、(2)问是解(3)问的基础,由于两支车队是同时同地向同一目的地进发,因此,他们在一定的距离内,所用的时间相等.

人们对长度的认识,从千米、米、分米、厘米,进而认识了毫米、微米,如今,深入到纳米级,1纳米等于1米的10亿分之一,纳米技术在材料的合成、信息技术等方面有广泛的应用.

【例5】 在右图中有9个方格,要求每个方格填入不同的数,使得每行、每列、每条对角线上三个数之和都相等,问:右图上角的数是多少?

?		
		19
	13	

(北京市“迎春杯”竞赛题)

思路点拨 虽然要求的只是右上角的数,但是题目的条件还与其它的数有关,因此,需恰当地引进不同的字母表示数,以便充分运用已知条件.

链接

有些问题涉及的量比较多,关系复杂,我们就需要引入不同的字母,便于把数量关系表示出来,在解题中我们不需(或不能)求出所有字母的值,只需求出关键的字母的值,这种方法我们称之为“设而不求”.

学 力 训 练

基础夯实

1. 给出下列算式:

$$1^2 + 1 = 1 \times 2,$$

$$2^2 + 2 = 2 \times 3,$$

$$3^2 + 3 = 3 \times 4,$$

.....

观察上面一列算式,你能发现什么规律,用代数式子表示这个规律:_____。(2001年福州市中考题)

2. 电信部门调整市话费:不超过3分钟,每分钟 a 元,超过3分钟,每分钟 b 元,若某人打电话用了 x 分钟且超过了3分钟,则他这次的电话费为_____元.
3. 若 $(m+n)$ 人完成一项工程需要 m 元,则 n 个人完成这项工程需要_____天.(假定每个人的工作效率相同)

(第15届江苏省竞赛题)

4. 某同学上学时步行,回家时坐车,路上一共要用90分钟,若往返都坐车,全部行程只需30分钟,如果往返都步行,那么,需要的时间是_____。(河南省竞赛题)

5. 一项工程,甲建筑队单独承包需要 a 天完成,乙建筑队单独承包需要 b 天完成,现两队联合承包,完成这项工程需要()天.

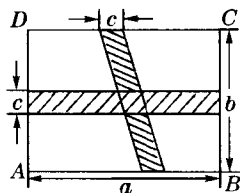
- A. $\frac{1}{a+b}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ C. $\frac{ab}{a+b}$ D. $\frac{1}{ab}$

6. 某商品价格为 a 元, 降价 10% 后, 又降价 10%, 销售额猛增, 商店决定再提价 20%, 提价后这种商品的价格为().

A. a 元 B. $1.08a$ 元 C. $0.972a$ 元 D. $0.96a$ 元

(山东省中考题)

7. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, 横向阴影部分是长方形, 另一阴影部分是平行四边形, 依照图中标注的数据, 计算图中空白部分的面积, 其面积是().



A. $bc - ab + ac + c^2$

B. $ab - bc - ac + c^2$

C. $a^2 + ab + bc - ac$

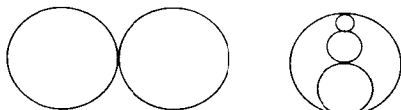
D. $b^2 - bc + a^2 - ab$

(2001 年河北省中考题)

8. 为了绿化环境、美化城市, 在某居民小区铺设了正方形和圆形两块草坪, 如果两块草坪的周长相同, 那么它们的面积 S_1 、 S_2 的大小关系是().

A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 < S_2$ C. $S_1 = S_2$ D. 无法比较

9. 某公园计划砌一个形状如图甲的喷水池, 后有人建议改为图乙的形状, 且外圆直径不变, 只是担心原来备好的材料不够, 请你比较两种方案, 哪一种需要的材料多? (即比较哪个周长更长)



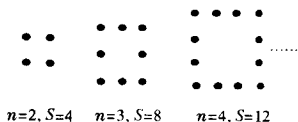
图甲

图乙

10. 某商店出售一种商品, 有如下几种方案: (1) 先提价 10%, 再降价 10%; (2) 先降价 10%, 再提价 10%; (3) 先提价 20%, 再降价 20%. 问: 用这三种方案调价的结果是否一样? 最后是不是都恢复了原价?

能力拓展

11. 观察下列各正方形图案, 每条边上有 n ($n \geq 2$) 个圆点, 每个图案中圆点的总数是 S .

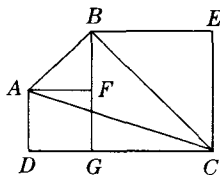


$n=2, S=4$ $n=3, S=8$ $n=4, S=12$

按此规律推断出 S 与 n 的关系式是_____.

(2001年广西中考题)

12. 如图,将面积为 a^2 的小正方形与面积为 b^2 的大正方形放在一起 ($b > a > 0$),用 a, b 表示三角形 ABC 的面积为_____.



(“希望杯”邀请赛试题)

13. 已知 17 个连续整数的和是 306,那么,紧接在这 17 个数后面的那 17 个整数的和为_____.

(天津市竞赛题)

14. 如图,我们在运动场上踢的足球大多是由许多黑白色块的皮粘合而成的,甲、乙两同学,在踢足球的休息之余研究起足球上的黑白块的个数,结果发现黑块均呈五边形,白块均呈六边形,甲同学数清黑块共 12 块,乙同学数清白块是_____块.



15. 已知代数式 $3y^2 - 2y + 6$ 的值为 8,那么代数式 $\frac{3}{2}y^2 - y + 1$ 的值为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(2001年河南省中考题)

16. 某同学到集贸市场买苹果,买每千克 3 元的苹果用去所带钱数的一半,而其余的钱都买了每千克 2 元的苹果,则该同学所买的苹果的平均价格是每千克()元.

A. 2.6 B. 2.5 C. 2.4 D. 2.3

17. 某工厂第二季度的产值比第一季度的产值增长了 $x\%$,第三季度的产值又比第二季度的产值增长了 $x\%$,则第三季度的产值比第一季度的产值增长了().

A. $2x\%$ B. $1 + 2x\%$
C. $(1 + x\%)x\%$ D. $(2 + x\%)x\%$

(2000年山东省竞赛题)

18. 如果用 a 名同学在 b 小时内共搬运 c 块砖,那么 c 名同学以同样的速度搬运 a 块砖所需的小时数是().

A. $\frac{c^2}{a^2b}$ B. $\frac{c^2}{ab}$ C. $\frac{ab}{c^2}$ D. $\frac{a^2b}{c^2}$

19. 已知 $a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 2002$),求当 $a_1 = 1$ 时, $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{2002} a_{2003}$ 的值.

20. 某校师生要去外地参加夏令营活动,车站提出两种车票价格的优惠方案供学校选择,第一种方案是教师按原价付款,学生按原价的78%付款;第二种方案是师生都按原价的80%付款,该校有5名教师参加这项活动,试根据参加夏令营的学生人数,选择购票付款最佳方案.

综合创新

21. 将1~16这16个整数填入 4×4 的正方形表格中,使得每行、每列、每条对角线上四个数之和都相等,如右图所示,恰有8个小方格中填的数被一个淘气的小朋友擦掉了,请你将擦掉的这8个数设法恢复出来.

		14	4
12			9
8	10		
	3	2	

22. 23个不同的正整数的和是4845,问这23个数的最大公约数可能达到的最大值是多少? 写出你的结论,并说明理由.

(“希望杯”邀请赛试题)