《数理天地》丛书

主编 周国镇

希望数学

本册主编 赵小云

高二

气象出版社

《数理天地》丛书　主编　周国镇

希望数学

高二

本册主编　赵小云

编　　委　肖果能　楼天定　朱祖益
许兴铭　丁　平　潘连方
杨龙江　周伟扬　周祥昌
葛云中　李富强　解启发
朱英雄　吴林华　张桃生
严根林　许克用　李世杰

气象出版社

内容简介

本书是“《数理天地》丛书”系列中《希望数学》的高二分册。包含了高中二年级数学中最主要的知识、思想和方法。本书由著名数学教师、数学教研员和大学数学教师合作编写，简明、易懂。适用于要提高数学水平或参加数学竞赛的高中二年级同学，也可作为数学教师开展数学课外活动的教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

希望数学.高二/周国镇主编.—北京:气象出版社，2002.3

(数理天地丛书)

ISBN 7-5029-3319-0

Ⅰ.希… Ⅱ.周… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011699 号

责任编辑:宋　钢　终审:周诗健

封面设计:梁培林　责任技编:刘祥玉　责任校对:肖　红

气象出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮编:100081)

新华书店总店北京发行所发行　全国各地新华书店经销

*　*　*

北京市白河印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　印张:10.625　字数:237 千字

2002 年 3 月第一版　2002 年 3 月第一次印刷

印数:1～4000

ISBN 7-5029-3319-0/G·0963

定价:12.00 元

序　言

《希望数学》是《数理天地》杂志主编的“《数理天地》丛书”系列的一个部分，之所以在数学之前加希望二字，是因为这是能给希望学好数学的同学们带来希望的数学书。

这是一套系统地、精练地讲解初、高中数学主要内容的简明教程。从初一到高三，共六个分册。其中，初、高中一、二年级四个分册中的每个分册都分为基础内容和选学内容两部分。

基础内容：不超出现行的数学教学大纲，保证使同学们用尽量少的时间，比较轻松地在比课本高的水平上掌握本年级数学最主要的内容。

选学内容：供学有余力、爱好数学或准备参加“希望杯”数学邀请赛以及其他数学竞赛的学生使用。

初、高中三年级这两个分册专为初、高三同学升学备考之用。

每个分册都由若干个专题组成，每个专题独立成篇，便于同学和老师根据需要选用，不必考虑先后次序。

每个专题包括：基本知识、例题、练习三个部分。

基本知识：以极简练、明白的文字介绍本专题的知识、方法。帮助同学们理清脉络，掌握重点。

例题：少而精，有代表性，有新意。例题的讲解渗透了基本的数学思想，讲思路，讲方法，表达规范、简练。特别有助于提

高同学们的分析能力。

练习：编入了有训练价值的典型题目，不求多、不求全，只求少而精。对不太难的题目给出了最后结果，使读者有一个思维空间；对较难的题目，给出了关键性的提示。

本书由《数理天地》杂志邀请北京、上海、江苏、浙江、湖北、湖南、广东、四川、山西、福建、吉林、云南、宁夏等地著名的数学教研员、优秀的数学教师以及部分大学数学教师合作编写，经《数理天地》杂志专家审定。

当今，中学数学参考书花样繁多，说有数百种也不为过，常令学子们眼花缭乱，无从选择。本书则力求使读者读了就能懂，懂了就能用，以实在和简明易懂的讲述见长。相信读者使用之后自有体会。

周国镇

《数理天地》杂志主编

2002 年 1 月 18 日

目　录

单元1　条件与条件的关系

一、基本知识

1. 命题的四种形式及关系

(1) 四种命题的形式：如果用“若 A 则 B”表示原命题，那么逆命题是“若 B 则 A”，否命题是“若 $\overline{A}$ 则 $\overline{B}$”，逆否命题是“若 $\overline{B}$ 则 $\overline{A}$”.

(2) 四种命题的关系是：当原命题为真时，其逆命题与否命题均未必为真，但逆否命题必定为真．两个具有逆否关系的命题是等价的.

2. 充要条件的概念

对于“若 A 则 B”形式的命题，其题设 A 和结论 B 之间的逻辑关系有四种可能：

(1) 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\not\Rightarrow A$，此时原命题为真而逆命题为假，我们称 A 是 B 的充分但不必要条件.

(2) 若 $B\Rightarrow A$ 且 $A\not\Rightarrow B$，此时逆命题为真而原命题为假，我们称 A 是 B 的必要但不充分条件.

(3) 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，此时原命题、逆命题同时为真，我们称 A 是 B 的充分必要条件(简称“充要条件”).

(4) 若 $A\not\Rightarrow B$ 且 $B\not\Rightarrow A$，此时原命题、逆命题同时为假，称 A 既不是 B 的充分条件又不是 B 的必要条件.

3. 充要条件关系的判断

判断两个条件 A 和 B 的“充要关系”的思考方法是首先

弄清提问中的约定题设，再判断是否成立 $A\Rightarrow B$ 和 $B\Rightarrow A$，然后得出相关结论. 如对条件 A 和条件 B，若 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 的充分条件；B 是 A 的必要条件.

当不容易直接判断 $A\Rightarrow B$ 或 $B\Rightarrow A$ 是否成立时，可以用讨论它们各自等价命题 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ 或 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$ 是否成立来代替.

学习"充要条件"的有关概念，更重要的意义是在思考许多本身并未出现"充分条件"、"必要条件"字样的问题时能自觉运用这些概念进行分析，使之成为加深理解问题、避免误入歧途的重要保证.

二、例　题

例 1　判断下列各题中条件 A 是 B 的什么条件（充分条件、必要条件、充要条件，既不充分又不必要条件）.

(1) A：整数 a 的个位数字是 2，B：整数 a 是偶数；

(2) A：$x^2>4$，B：$x^3<-8$；

(3) A：$c=0$，B：直线 $ax+by+c=0$ 过原点；

(4) A：$f(0)=0$，B：$y=f(x)$ 为奇函数.

解：(1) 由于 $A\Rightarrow B$ 且 $B\not\Rightarrow A$，故 A 是 B 的充分不必要条件.

(2) 由于 $A\not\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，故 A 是 B 的必要不充分条件.

(3) 由于 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，故 A 是 B 的充要条件.

(4) 由于 $A\not\Rightarrow B$ 且 $B\not\Rightarrow A$，故 A 既不是 B 的充分条件也不是 B 的必要条件.

例 2　(1) $\alpha\neq\beta$ 是 $\sin\alpha\neq\sin\beta$ 的什么条件.

(2) $|5x|<5$ 的什么条件是 $0.1^{\lg x^2}>1$.

分析：(1) 中约定题设是 $\alpha\neq\beta$，结论是 $\sin\alpha\neq\sin\beta$. (2) 中约定题设是 $0.1^{\lg x^2}>1$，结论是：$|5x|<5$.

解:(1)由于 $\alpha=\beta\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta$,故 $\sin\alpha\neq\sin\beta\Rightarrow\alpha\neq\beta$.

又 $$\sin\alpha=\sin\beta\nRightarrow\alpha=\beta,故\ \alpha\neq\beta\nRightarrow\sin\alpha\neq\sin\beta.$$

故 $\alpha\neq\beta$ 是 $\sin\alpha\neq\sin\beta$ 的必要非充分条件.

(2) 由于 $|5x|<5\Leftrightarrow|x|<1$,且 $0.1^{\lg x^2}>1\Leftrightarrow\lg x^2<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq0\\|x|<1.\end{cases}$$

因此可得 $|5x|<5$ 的充分非必要条件是:$0.1^{\lg x^2}>1$.

评析:(1) 判断充要条件的问题首先要分析清楚提问中约定题设是什么.

(2) 在判定 A 是 B 的什么条件时,有时也可以把"若 A 则 B"真假判定转化成对"若 $\overline{B}$ 则 $\overline{A}$"命题的真假判定.

例 3 复数 $z=a+bi(a,b\in R)$是非零复数的充要条件是( )

(A) $ab\neq0$. (B) a、b 中最多有一个不为零.

(C) $a\neq0$ 或 $b\neq0$. (D) $a\neq0$ 且 $b\neq0$.

分析:$z=a+bi$ 非零条件下,得不出 $ab\neq0$ 的结论.举反例:$a=6,b=0$ 时,z 非零,但 $ab=0$,因而否定了(A).

$z=a+bi$ 非零的条件下,得不出"a,b 中最多有一个不为零"的结论,举反例:$a=b=1$ 时,z 非零,但 a、b 并不是最多一个不为零,因而否定了(B).

$z=a+bi$ 非零时,可以得到 $a\neq0$ 或 $b\neq0$ 的结论,证明可用其逆否命题:若 $a=0$ 且 $b=0$ 则 $z=a+bi$ 是 0,再由"若 $a\neq0$ 或 $b\neq0$ 则 $z=a+bi$ 非零"为真,知(C)为正确答案.

对(D)也可举反例说明.

评析:上面的解法中,多次运用举反例的方法来否定一个命题的成立.

例 4 $a,b\in z$,求证:$a-b$ 是偶数的充分必要条件是 a^3-b^3 是

偶数.

证明：充分性的证明：

若 a^3-b^3 是偶数，则 a^3 与 b^3 的奇偶性相同

故 a 与 b 的奇偶性相同.（$a,b\in z$）

故 $a-b$ 是偶数.

必要性证明：

若 $a-b$ 是偶数，a、$b\in z$，

则 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 为偶数.

评析：作充要条件证明时，首先应该正确构造必要性和充分性各需证明的命题，然后再分别证明.

例 5 若 $A\geqslant B\Rightarrow C>D$，$A<B\Rightarrow E\leqslant F$，下列命题为真命题的是（　）

(A) $E\geqslant F\Rightarrow C<D$.　　(B) $C<D\Rightarrow E<F$.

(C) $E<F\Rightarrow C\geqslant D$.　　(D) $C\leqslant D\Rightarrow E\leqslant F$.

分析：因为"$A\geqslant B\Rightarrow C>D$"等价于"$C\leqslant D\Rightarrow A<B$"，

故由"$C\leqslant D\Rightarrow A<B$"及"$A<B\Rightarrow E\leqslant F$"，得

"$C\leqslant D\Rightarrow E\leqslant F$"，故选(D).

评析：在具体判断充要条件时，我们可注意到其几种等价说法：

"若 A 则 B"是真命题$\Leftrightarrow A$ 是 B 的充分条件$\Leftrightarrow B$ 是 A 的必要条件$\Leftrightarrow$若 $\overline{B}$ 则 $\overline{A}$ 是真命题$\Leftrightarrow$"$A\Rightarrow B$"$\Leftrightarrow$集合 $A\subseteq B$. 其中集合 A 是具有性质 A 的所有元素组成的集合，集合 B 是具有性质 B 的所有元素组成的集合.

例 6 (1) 求直线 $ax+by+c=0$ 在两坐标轴上截距相等的充要条件.

(2) 求不同三点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$共线的一

个充要条件.

分析:(1) 可从直线在两坐标轴上的截距相等入手分析必要条件:

当直线 $ax+by+c=0$ 截距相等且为 0 时,有:

$$\begin{cases} c=0 \\ ab\neq 0. \end{cases}$$

当截距相等且不为零时,方程变形为:

$$\frac{x}{-\frac{a}{c}}+\frac{y}{-\frac{b}{c}}=1, \quad 得 \quad \begin{cases} c\neq 0 \\ a-b\neq 0. \end{cases}$$

再证明所得条件的充分性,可得命题成立的充要条件是:

$$\begin{cases} c=0 \\ ab\neq 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} c\neq 0 \\ a=b\neq 0 \end{cases}$$

(2) 考虑的途径可以是距离、斜率、直线方程或定比分点,如从斜率入手:

当 $x_1\neq x_2, x_1\neq x_3$ 时,只要:$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$.

只要 $x_1=x_2=x_3$.

故易得充要条件为:

$$(x_3-x_1)(y_2-y_1)=(x_2-x_1)(y_3-y_1).$$

即充要条件为:$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

评析:寻求充要条件是一个开放性问题,这是用等价转换思想寻求问题解决途径的基础.

例 7 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α、β,证明:

(1) 如果$|\alpha|<2$,$|\beta|<2$,那么$2|a|<4+b$且$|b|<4$.

(2) 如果$2|a|<4+b$且$|b|<4$,那么$|\alpha|<2$,$|\beta|<2$.

分析:我们把二次方程根的分布与二次函数图像和性质结合起来,可将原题化为充要条件统一起来证明.

证明:二次函数$f(x)=x^2+ax+b$,$f(x)=0$的两个根均在区间$(-2,2)$的充要条件是:

$$\begin{cases} f(2)>0 \\ f(-2)>0 \\ a^2-4b\geqslant 0 \\ -2<-\dfrac{a}{2}<2 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4+b>2a & ① \\ 4+b>-2a & ② \\ a^2\geqslant 4b & ③ \\ -4<a<4 & ④ \end{cases}$$

由①、②得 $2|a|<4+b$ ⑤

由⑤得 $4+b>2|a|\geqslant 0\Rightarrow b>-4$ ⑥

又由③、④得 $b\leqslant\dfrac{a^2}{4}<4$ ⑦

由⑥、⑦得$|b|<4$,故原命题成立.

评析:把要证明的命题转化为其"充要条件"来证明,是数学证明中的重要方法.

例 8 求适合$z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$(t为实参数)的点的轨迹.

[**错解**]因为 $|z|=\left|\dfrac{1+ti}{1-ti}\right|=1$

所以 z点的轨迹是以原点为圆心,以1为半径的圆.

分析:$|z|=1$是$z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$成立的必要不充分条件,以上错解误将必要不充分条件当作充要条件,扩大了轨迹的范围,其正确答案应是:以原点为圆心,半径1的圆,除去点$(-1,0)$.

评析:在解题中要注意条件的充分必要关系,用必要不充分条件代替原条件,解的范围可能扩大,如解分式方程去分母可能产生增根等;同样用充分不必要条件代替原条件,解的范围可能缩小,如解方程时两边同除以含未知数的式子可能减根等.

小　结

从以上例题讨论中我们注意到:

(1) 讨论条件 A 与条件 B 的(充要)关系时,应首先注意约定的题设与题断,然后判断"$A\Rightarrow B$"或"$B\Rightarrow A$"是否成立.

(2) 当不容易判断是否成立,"$A\Rightarrow B$"或"$B\Rightarrow A$"时,可讨论它们各自的等价命题"$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$"或"$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$"是否成立.

(3) 在解数学问题时应注意利用条件与条件的充要关系来思考与转化.

三、习　题

1. 以下列命题为原命题,分别写出其逆命题、否命题、逆否命题,并分别指出它们的真假.

(1) 若 $m=3$ 或 $n=4$ 则 $m^2+n^2=25$.

(2) 两条异面直线不相交.

(3) 若 $xy=0$ 则 $x=0$ 或 $y=0$.

2. 用Ⅰ(充分非必要条件)、Ⅱ(必要非充分条件)、Ⅲ(充要条件)、Ⅳ(既非充分又非必要条件)填空:

(1) 在$\triangle ABC$中,$B=\dfrac{\pi}{3}$是三内角 A、B、C 成等差数列的______.

(2) 若 $f(x,y)$是多项式,则 $f(x,y)$的常数项为零是曲线 $f(x,y)=0$ 过原点的______.

(3) $\tan\alpha=\tan\beta$ 是 $\sin2\alpha=\sin2\beta$ 的______.

(4) $\sqrt{x^2}>1$ 是 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x-1}<\frac{1}{4}$ 的________.

(5) "曲线 C 上任意一点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解"是"以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上"的______.

(6) 若命题甲是命题乙的充分非必要条件,命题丙是命题乙的必要非充分条件,命题丁是命题丙的充要条件,则命题丁是命题甲的______.

(7) "点 M 的坐标是方程 $x-y=0$ 的解"是"点 M 到两坐标轴距离相等"的______.

(8) "$|x-a|<3$, $|y+a|<2$"是"$|x+y|<5$"的______.

3. 空间三条直线共面的充分条件是 ( )

(A) 两两相交且不共点.

(B) 三条直线共点.

(C) 三条直线两两平行.

(D) 三条直线中有两条平行.

4. 已知两条直线 $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, 则 $L_1\perp L_2$ 的充要条件是 ( )

(A) $\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1$. (B) $\frac{A_2}{B_2}=-\frac{A_1}{B_1}$.

(C) $A_1A_2+B_1B_2=0$. (D) $A_1B_2+A_2B_1=0$.

5. $\alpha=\beta$ 是 $\tan\alpha=\tan\beta$ 的 ( )

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分又不必要条件.

6. 已知 A 和 B 是两个命题，$\overline{A}$、$\overline{B}$ 分别是 A、B 的否命题，若 $A\Rightarrow B$，那么，$\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的(　)条件.

(A) 充分.　　　　(B) 必要.

(C) 充要.　　　　(D) 非充分非必要.

7. 方程 $x^2+Bxy+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示一个与 x 轴相切于坐标原点的圆的充要条件是　　　　(　)

(A) $B=0$.　(B) $D=0$.　(C) $E=0$.　(D) $F=0$.

(E) $B\neq 0$.　(F) $D\neq 0$.　(G) $E\neq 0$.　(H) $F\neq 0$.

(注：选择以上一个或几个选择支组成正确答案)

8. 分式函数 $y=\dfrac{1+ax}{1-ax}$ 的反函数恰好是本身的充要条件是什么？并证明你的结论.

9. 设命题甲：抛物线 $y^2=x$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 有公共点；命题乙：关于 x 的方程 $(x-a)^2+x=1$ 有实数根. 试判断命题甲和命题乙的充要关系，说明理由.

10. 求方程 $x^2+ax+b=0$ 有两根，一根大于 1，一根小于 1 的一个充要条件.

11. 求证 $y=kx+b$ 与抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 有且仅有一个公共点的充要条件是 $b=-k^2$.

12. 求曲线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过四个象限的一个充要条件.

13. 设不共线四点：$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，证明：$x_1+x_3=x_2+x_4$ 且 $y_1+y_3=y_2+y_4$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件.

14. 已知抛物线 $y=-x^2+mx-1(m\in\mathbf{R})$ 及两定点 A

$(0,3)$、$B(3,0)$，问 $m>\frac{10}{3}$ 是 A、B 两点一点在抛物线内部，一点在抛物线外部的什么条件.

15. 求证：三个复数 z_1、z_2、z_3 组成一等边三角形的三个顶点的充要条件是它们适合等式 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_3$.

16. 求证：关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$，当且仅当 p、q 满足 $p^2-2p=1$ 及 $p<0$ 和 $0<q\leqslant\frac{1}{2}$ 时，它的两根为一直角三角形两锐角的正弦.

四、答案·提示

1.（1）逆命题（假），否命题（假），逆否命题（假）；

（2）逆命题（假），否命题（假），逆否命题（真）；

（3）逆命题：若 $x=0$ 或 $y=0$ 则 $xy=0$（真），

否命题：若 $xy\neq0$ 则 $x\neq0$ 且 $y\neq0$（真），

逆否命题：若 $x\neq0$ 且 $y\neq0$ 则 $xy\neq0$（真）.

2.（1）Ⅱ　（2）Ⅲ　（3）Ⅰ　（4）Ⅱ　（5）Ⅳ　（6）Ⅱ　（7）Ⅰ　（8）Ⅰ

3.（A）.　4.（C）.　5.（D）.　6.（B）.　7.（A）、（B）、（D）、（G）.

8. 充要条件是 $a=-1$，因为 $y=\frac{1+ax}{1-ax}$ 的定义域 $x\neq\frac{1}{a}$ $(a\neq0)$，值域：$y\neq-1$，如果反函数为其本身，则 $a=-1$，检验适合.

9. 命题甲 $\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant\frac{5}{4}$，命题乙 $\Leftrightarrow a\leqslant\frac{5}{4}$，所以，甲是乙的充分但不必要条件.

10. 令 $f(x)=x^2+ax+b$，则原命题的一个充要条件为，$f(1)<0$.

11. 证明：由 $\begin{cases} y=kx+b \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4b=0$，

$\Delta=16k^2+16b=16(k^2+b)$，直线与抛物线有且仅有一个公共点，即上述方程组有且仅有一组解.

所以　所求充要条件为 $\Delta=0$，即 $b=-k^2$.

12. $ac<0$.

13. 运用平行四边形对角线互相平分的定理及其逆定理.

14. 证明：(必要性)：若 A、B 两点位于抛物线 $y=-x^2+mx-1$ 内外两侧，则直线 AB 与抛物线相交，且两交点一在线段$\overline{AB}$上，一在其延长线上，设 p 分$\overline{BA}$的比为 λ：则

$$\begin{cases} x_p=\dfrac{3}{1+\lambda} \\ y_p=\dfrac{3\lambda}{1+\lambda} \end{cases}$$ 代入抛物线方程，整理得：

$$4\lambda^2+(5-3m)\lambda+(10-3m)=0 \qquad ①$$

所以 $\begin{cases} (5-3m)^2-16(10-3m)>0 \\ \lambda_1\lambda_2=\dfrac{10-3m}{4}<0 \end{cases}$ 得 $m>\dfrac{10}{3}$.

充分性：若 $m>\dfrac{10}{3}$，则方程①两根存在且 $\lambda_1\lambda_2<0$，所以直线 AB 与抛物线 $y=-x^2+mx+1$ 有两交点 P_1、P_2 且一在线段 AB 上，一在其延长线上，所以 A、B 两点一点在抛物线内部，一点在外部.

15. 必要性：若$\triangle z_1z_2z_3$ 是正三角形，则