全国成人高等教育规划教材

概率论与数理统计简明教程学习辅导书

教育部高等教育司 组编

高等教育出版社

概率论与数理统计简明教程学习辅导书

沈恒范　王明慈　齐植兰　高文森　编

高等教育出版社

(京)112 号

内容提要

本书是为成人高校工学各专业读者学习概率论与数理统计课程编写的一本辅导书，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、正态分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等，可供成人高校工学各专业的学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计简明教程学习辅导书/沈恒范等编.
北京：高等教育出版社，1999
ISBN 7-04-007457-5

Ⅰ.概… Ⅱ.沈… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 65050 号

概率论与数理统计简明教程学习辅导书
教育部高等教育司 组编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1999 年 11 月第 1 版
印　　张	8	印　　次	1999 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	190 000	定　　价	9.60　元

序　言

本书是为成人高等教育工学各专业的读者学习概率论与数理统计课程编写的一本指导书.

全书共分八章，每章各包括三个部分，说明如下：

1. 教学基本要求：主要摘自教育部成人教育司1998年6月颁发的全国成人高等教育工学《概率论与数理统计课程教学基本要求》，其中关于教学要求程度的用语从低到高分为三个层次：

较低要求——了解，知道；

一般要求——理解，熟悉，能，会；

较高要求——掌握，应用.

一般来说，对知识、概念、理论等方面，用“了解”、“理解”、“掌握”等词；对方法、计算、应用等方面，用“知道”、“熟悉”、“能”、“会”、“掌握”等词.

2. 内容提要：本书是成人高等教育教材《概率论与数理统计简明教程》(沈恒范、王明慈、齐植兰、高文森编，高等教育出版社，2000年）的辅助教学用书，所以各章的内容提要主要是根据该教材相应的章节编写的，这对于学习该教材的读者显然是特别有益的. 由于这里叙述的都是概率论与数理统计课程中最主要的内容，所以对于学习本课程其它教材的读者也很有参考价值.

3. 例题分析与详解：所有例题都是按照典型性、综合性、实用性等原则精选的；为了帮助读者更好地学习《概率论与数理统计简明教程》，有些例题则是该教材中某些未证明的公式和具有一定难度的习题或复习题. 每个例题一般是通过分析题意，找到解题思路，然后给出详尽解答，对读者具有示范作用，有利于培养

读者运用概率统计的理论、方法，分析和解决实际问题的能力和素质.

本书在概率论与数理统计两部分之后分别拟有若干自测题，读者在学习过程中可以通过解这些题随时测试自己理解和掌握这两部分的基本概念、理论、方法等的程度. 最后还拟有四份模拟试卷，读者在学完本课程全部内容后，解答这些模拟试卷，以便检查学习效果. 所有自测题和模拟试题都附有答案，供读者参考.

本书不仅是成人高等教育工学读者的学习辅导用书，也可作为普通高等工业学校学生的学习参考书.

本书由沈恒范主编，参加编写的作者还有（以下按姓氏笔划为序）：王明慈、齐植兰、高文森，具体分工如下：

王明慈（四川大学）编写第一章、第二章；

齐植兰（天津大学）编写第三章、第四章；

高文森（吉林工业大学）编写第五章、第六章；

沈恒范（湖北汽车工业学院）编写第七章、第八章.

限于编者的水平，本书难免存在某些缺点和错误，诚恳希望读者批评指正.

编　者

1999 年 6 月

目　　录

本课程学习方法指导

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科. 概率论与数理统计课程在成人高等教育工学本科的教学计划中是一门必修的基础课. 由于随机现象广泛地存在于自然科学、社会科学和工程技术的众多领域中,所以概率统计的理论与方法在这些领域中有着重要的应用.

对于初学本课程的读者,往往会在学习过程中遇到某些困难,这里简要介绍本课程的一般学习方法,以便帮助读者初步掌握概率论与数理统计的基本概念和基本理论,以及处理随机现象的基本思想和基本方法,并培养读者运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力.

学习概率论部分时,应着重理解或了解的基本概念有:随机事件的频率与概率、随机变量的概率函数(分布列)、概率密度、分布函数、数学期望及方差、二维随机变量的联合概率分布、边缘概率分布、协方差及相关系数等等;应重点掌握或会运用的基本定理和公式有:概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式、概率函数及概率密度的性质以及它们与分布函数的关系、数学期望与方差的性质、切比雪夫不等式、大数定律、中心极限定理等等. 此外,还应熟悉某些常用的概率分布,如:二项分布、超几何分布、泊松分布、均匀分布、指数分布、正态分布等等.

学习数理统计部分时,应着重理解或了解的基本概念有:总体、个体、样本、统计量、参数点估计的无偏性、有效性及一致性、参数区间估计的置信水平及置信区间、假设检验的基本思想及推理方法、方差分析中的有关统计量、回归分析中的回归函数与回归方

程等等;应重点掌握或会运用的基本理论与方法有:正态总体统计量的分布、参数的矩估计法及最大似然估计法、正态总体参数的区间估计、关于正态总体参数的假设检验、单因素试验的方差分析、一元线性相关的显著性检验、一元线性及非线性回归方程的求法等等.此外,还应熟悉数理统计中常用的概率分布,如:χ^2分布、t分布、F分布等等.

关于理解或了解基本概念与掌握或会运用基本理论及方法的程度,可以参阅本书各章中写明的"教学基本要求",这是教育部成人教育司对本课程统一规定的教学基本要求,体现了国家对成人高等学历教育的质量要求.

读者学习本课程时,最重要的环节当然是听课,课后应仔细阅读、认真钻研教材中每章每节的内容(对于自学本课程的读者,阅读教材就成为最重要的环节).阅读应当按顺序逐章逐节地进行,阅读时应当逐字逐句地搞清每一概念,弄懂每一定理(或公式)的条件、结论及其证明.对于教材中的每个例题及其解法,就不仅是阅读,而且应当进行必要的分析、推理及计算.有关重点和难点,还可以结合本书各章中的"例题分析与详解"一起来阅读,读者将会从中获得更大的帮助.

在阅读每节、每章内容的基础上,应当通过解答教材中该节、该章后的习题和复习题,加深对所学内容的理解.解题时,要独立思考,严格认真.

在学完教材的每一章之后,应当对该章的主要内容(包括基本概念、定理、公式、方法等)进行小结.虽然本书已列举了各章的"内容提要",但是我们建议读者最好自己能独立地完成这项工作,这样可以更好地巩固所学的知识.

在学习了概率论部分,并进行小结的基础上,读者可以解答本书中的"概率论部分自测题",初步检测自己的学习效果.如果效果较好,则可以继续学习数理统计部分;否则,应当进行必要的补课和复习.同样,在学习了数理统计部分,并进行小结的基础上,读者

也可以解答本书中的“数理统计部分自测题”，以便检测学习效果.

我们强调学习本课程必须循序渐进，切忌急于求成. 当两部分的学习效果都比较好时，就可以在规定时间内试解本书中的若干份“模拟试卷”，测试自己的学习成绩，为迎接本课程的期末考试做好充分准备.

第一章　随机事件及其概率

教学基本要求

1. 理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算.

2. 了解事件频率的概念，了解随机现象的统计规律性和概率的统计定义.

3. 了解古典概型的概念和概率的古典定义，会计算简单的古典概率.

4. 掌握概率的基本性质及概率的加法公式，会应用这些性质及公式计算概率.

5. 了解条件概率的概念，会求条件概率，掌握概率乘法公式、全概率公式，会应用这些公式计算概率.

6. 理解事件独立性的概念，会应用事件的独立性计算概率.

7. 了解伯努利(Bernoulli)概型的概念，掌握二项概率的计算.

内 容 提 要

本章内容是概率论的基础知识. 样本空间、随机事件、随机事件的频率、随机事件的概率、条件概率、事件的独立性等是本章的基本概念. 事件的关系及运算、概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式是本章的基本定理与基本公式. 伯努利概型与二项概率公式是概率论以及实践中常用的一种概率模型及概率计算公式.

一、随机试验、样本空间与随机事件

随机试验是在一定的相同条件下可以任意多次地重复进行的试验，每次试验的所有可能结果都是明确可知的，但在每次试验之

前不能预知将会出现哪一个结果.今后把随机试验简称为试验.

试验的每一个可能的结果叫做试验的样本点(或基本事件),记作 ω.

试验的所有样本点的集合叫做样本空间,记作 $\Omega=\{\omega\}$.

试验的结果中,可能发生、也可能不发生的事件叫做随机事件,记作 $A,B,C,\cdots$.

任意一个随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集.

在试验的结果中一定发生的事件叫做必然事件,记作 Ω,必然事件就等于样本空间 Ω.

在试验的结果中一定不发生的事件叫做不可能事件,记作 $\varnothing$.不可能事件 $\varnothing$ 是空集.

二、事件的关系及运算

1. 包含:如果事件 A 的发生,必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $B\supset A$(或称事件 A 包含于事件 B,记作 $A\subset B$).

2. 相等:如果事件 A 包含事件 B,且事件 B 也包含事件 A,即 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

3. 并:"两个事件 A 与 B 中至少有一个事件发生"这一事件称为 A 与 B 的并,记作 $A\cup B$;"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

4. 交:"两个事件 A 与 B 同时发生"这一事件称为 A 与 B 的交,记作 $A\cap B$,简记为 AB;"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$).

5. 互不相容:如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容;如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生,即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$,则称

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的.

互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$(简记为 $\sum_{i=1}^{n} A_i$).

6. 对立:如果在每次试验中,两个互不相容事件 A 与 B 中必有一个事件发生,即 $AB = \varnothing$,且 $A + B = \Omega$,则称 A 与 B 是对立的,事件 A 的对立事件(或称逆事件)记作 $\overline{A}$,于是有 $A\overline{A} = \varnothing$,$A + \overline{A} = \Omega$.

事件的并与交具有下列性质:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$;

$AB = BA$.

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(AB)C = A(BC)$.

(3) 分配律: $A(B \cup C) = AB \cup AC$;

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

(4) 德摩根(De Morgan)定律:$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$;

$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

三、频率与概率的定义

1. 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为随机事件 A 的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}. \tag{1.1}$$

2. 概率的统计定义:在大量重复试验中,事件 A 的频率具有稳定性,即当试验次数 n 很大时,频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数字 $p(0 < p < 1)$ 的附近摆动,这个确定的数字 p 定义为事件 A 的概率,记作 $P(A)$,即

$$P(A) = p \approx f_n(A). \tag{1.2}$$

3. 概率的古典定义:设随机试验 E 的样本空间仅有有限个基本事件,并且各个基本事件是等可能的,则称试验 E 为古典概型;

设在古典概型中，试验的样本空间共有 N 个基本事件，而随机事件 A 包含其中的 M 个基本事件，则定义比值$\frac{M}{N}$为事件 A 的概率，记作 $P(A)$，即

$$P(A)=\frac{M}{N}. \tag{1.3}$$

应当指出，概率的古典定义与概率的统计定义是不矛盾的，而且两种定义的 $P(A)$ 都有着相同的基本性质，即

(1) 非负性： $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性： $P(\Omega)=1$；

(3) 可加性：对于互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

利用概率的古典定义计算事件的概率是难点，关键是要分析并求出 N 与 M，一般往往要用到排列与组合的知识.

四、概率加法定理

对于任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.4}$$

特别是，对于两个互不相容的事件 A 与 B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.5}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{1.6}$$

特别是，对于 n 个互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.7}$$

对于事件 A 及其对立事件 $\overline{A}$，有

$$P(A)=1-P(\bar{A}). \tag{1.8}$$

五、条件概率、概率乘法定理

事件 A 在事件 B 已发生的条件下的概率叫做条件概率，记作 $P(A|B)$；如果 $P(B)>0$，则定义

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.9}$$

概率乘法定理：对于任意两个事件 A 与 B，如果 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \tag{1.10}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.11}$$

六、全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 中 n 个互不相容的事件，且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对于任意事件 $A\subset\Omega$，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.12}$$

由条件概率定义、概率乘法定理及全概率公式，可以推得

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n). \tag{1.13}$$

我们指出，概率加法定理、概率乘法定理及全概率公式是概率论的三个基本定理与公式，读者应学会将某个复杂事件表示成若干个简单事件的并或交，然后利用上述这些定理或公式计算所求事件的概率，这是本章的重点，也是难点.

当直接计算事件 A 的概率 $P(A)$ 比较困难时，可以先计算事件 $\bar{A}$ 的概率 $P(\bar{A})$，然后利用公式 $P(A)=1-P(\bar{A})$ 计算事件 A

的概率.

七、随机事件的独立性

如果事件 B 的发生不影响事件 A 的概率,即

$$P(A|B) = P(A) \tag{1.14}$$

或

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{1.15}$$

则称事件 A 与 B 是相互独立的.

如果事件 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n \geqslant 3)$ 中任意 k 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(2 \leqslant k \leqslant n)$ 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}). \tag{1.16}$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

相互独立事件的概率乘法定理:如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \tag{1.17}$$

在实际应用中,常常是根据实际情况直观地判断事件的独立性.

八、伯努利概型、二项概率公式

将随机试验 E 重复进行 n 次,如果各次试验的结果互不影响,即每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果,这样的试验称为 n 重独立试验或独立试验序列.

如果在 n 重独立试验中,每次试验的结果只有两个:A 与 $\overline{A}$,且 $P(A) = p,P(\overline{A}) = q(0 < p < 1,p + q = 1)$,则这样的试验称为伯努利试验或伯努利概型.

在伯努利概型中,设事件 A 在每次试验中发生的概率 $P(A) = p(0 < p < 1)$,则在 n 次独立试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n), \tag{1.18}$$

其中 $p + q = 1$. 由于上式右端正好是二项式$(q + p)^n$ 展开式中的

第 $k+1$ 项,所以公式(1.18)称为二项概率公式.

伯努利概型在理论与实践中是一种常用的概率模型,读者应该很好地了解它,并掌握二项概率的计算;不过当 n 很大时,计算是相当麻烦的,在第二章与第四章将解决二项概率的近似计算问题.

例题分析与详解

例 1.1 设 A,B,C 为样本空间 Ω 中的随机事件,简化下列各式:

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$;

(2) $(A\cup B)(A\cup \overline{B})$;

(3) $(A\cup B)(A\cup \overline{B})(\overline{A}\cup B)$.

分析 利用事件的关系及运算的性质不难简化下列各式.

解 因为事件的并与交满足交换律、结合律、分配律,所以有

(1) $(A\cup B)(B\cup C)=AC\cup B$.

(2) $(A\cup B)(A\cup \overline{B})=A\cup (B\overline{B})=A\cup \varnothing=A$.

(3) 利用(2)的结果易知

$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup \overline{B})(\overline{A}\cup B)&=A(\overline{A}\cup B)\\&=A\overline{A}\cup AB=\varnothing\cup AB=AB.\end{aligned}$$

例 1.2 随机取一非负整数,求这整数的平方的个位数字是 4 的概率.

分析 设随机取的非负整数为 X,它的个位、十位、百位……数字依次为 $a,b,c,\cdots$,则有

$$X=a+10b+100c+\cdots.$$

由于 X^2 的个位数字仅与 X 的个位数字 a 有关. a 可以是 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中的任意一个,显然,当且仅当 $a=2$ 或 $a=8$ 时,X^2 的个位数字是 4. 这样,本题的解法就非常简易了.

解 我们的试验就是:随机取一非负整数 X,观察它的个位数字,易知基本事件的总数 $N=10$. 设事件 A 表示 X^2 的个位数字

是4，则事件 A 包含的基本事件数 $M=2$. 于是，按概率的古典定义得所求概率

$$P(A)=\frac{2}{10}=0.2.$$

例 1.3 从不同型号的5双鞋中任取4只鞋，求取出的4只鞋中至少有2只鞋配成1双的概率.

分析一 从5双鞋中任取4只鞋，共有 C_{10}^4 种不同的取法. 设事件 A 表示“取出的4只鞋中至少有2只鞋配成1双”，则 A 可以分解为两个互不相容的事件 B_1 与 B_2 的并，其中 B_1 表示“取出的4只鞋中仅有2只配成1双、另外2只不能配成双”；B_2 表示“取出的4只鞋正好配成2双”.

对于 B_1，可以先从5双鞋中任取1双，然后从其余的4双鞋中任取2双，再从这2双鞋中各任取1只鞋，共有 $C_5^1C_4^2(C_2^1)^2$ 种不同取法；对于 B_2，可以从5双鞋中任取2双，共有 C_5^2 种不同取法.

解法一 基本事件的总数 $N=C_{10}^4$；事件 B_1 包含的基本事件数 $M_1=C_5^1C_4^2(C_2^1)^2$，事件 B_2 包含的基本事件数 $M_2=C_5^2$. 易知

$$P(B_1)=\frac{C_5^1C_4^2(C_2^1)^2}{C_{10}^4}=\frac{12}{21},$$

$$P(B_2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}.$$

于是，按公式(1.5)得所求概率

$$P(A)=P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)$$

$$=\frac{12}{21}+\frac{1}{21}=\frac{13}{21}.$$

分析二 事件 A 的对立事件 $\overline{A}$ 表示“取出的4只鞋都不能配成双”，这可以先从5双鞋中任取4双鞋，再从每双中各取一只鞋，共有 $C_5^4(C_2^1)^4$ 种不同的取法.

解法二 事件 $\overline{A}$ 包含的基本事件数 $M=C_5^4(C_2^1)^4$，易知

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}.$$