奥林匹克数学
思维训练教材

主审：陈永高（中国数学奥林匹克队领队）

小学六年级

奥林匹克思维训练系列

《奥林匹克思维训练教材》编委会

主　审：

陈永高　1962年3月出生，现为南京师范大学数学与计算机科学学院教授、博士生导师。主要从事数论方面的研究，在国内外核心期刊上发表论文40多篇。曾主持霍英东教育基金项目一项和国家自然科学基金项目一项；正承担国家自然科学基金一项。曾到匈牙利、印度等国家和中国香港地区进行合作研究和访问。2000年和2001年先后担任中国数学奥林匹克队副领队和领队，带队参加在韩国举办的第41届和在美国举办的第42届国际数学奥林匹克比赛，均获团体总分第一，参赛队员均获金牌。

主　编：

崔恒兵　1969年11月生，现为南京师范大学数学与计算机科学学院讲师，南京数学会副秘书长。从事数学奥林匹克竞赛与研究多年。曾编写“中小学数学奥林匹克教材”、《“华杯赛”集训题典》。

副主编：

夏建国　1963年9月生，博士后，现为南京师范大学数学与计算机科学学院副教授、硕士生导师。主要从事Tits几何方面的研究，正承担国家自然科学基金一项。从事数学奥林匹克竞赛与研究多年。

本册主编：孙志人

前　言

陈永高

数学被人们喻为思维训练的体操，对培养学生的个性、发展学生的智能有着极其重要的作用。很多学生从小就非常喜欢数学，希望在数学方面能得到良好的教育和引导，并力求有较好的发展。为满足广大数学爱好者的求知欲望，推广和普及数学奥林匹克教育和教学工作，各种数学兴趣培训班应运而生。这类培训以培养兴趣、拓宽思路、提高能力、开发智力为宗旨，受到老师、家长的普遍欢迎，取得较好的社会效果。

"南师大少年科技培训中心"（原南师大奥林匹克学校）就是由南京师范大学于 1990 年创办、以数学兴趣培训为主的一所培训机构，由著名数学家、博士生导师、前任国家奥林匹克总教练单墫教授和我一起担任培训中心顾问，由我们南师大数学系中青年骨干教师担任主讲。经过十多年的教学研究，培养了一批又一批优秀学生，其中大多被重点中学"理科实验班"或"数学实验班"免试录取，并在"华杯赛"、"小数赛"等各类比赛中取得优异成绩。为了帮助各类培训班提供一套难易适中，集知识性、趣味性、科学性、选拔性于一体的培训教材，本套《奥林匹克数学思维训练教材》由那些在"南师大少年科技培训中心"任教十多年的教师编写，内容多数是由授课时的讲稿整理而成，非常实用。这套系列教材从小学一年级至初中三年级，立足于学生的基础知识，着眼培养学生的灵活运用知识的能力，以思维训练为核心，以浅近的内

容、活泼多样的形式，渗透了现代数学的基本思想，力求覆盖面广、趣味性强。考虑学生的认知规律，每个年级分二十讲左右，每讲包含知识要点、例题选讲、小结、课后练习。例题力求典范、新颖、独特，解法力求简练、灵活、别致，着眼于提高学生的解题能力和数学思维能力，练习有详细解答，便于学生自学自练，也便于教师及家长辅导学生。为了不加重学生负担，本套教材前后虽有一定的连贯性，但每册又自成体系，每讲篇幅少、内容精，按每周学习两课时，一学年学完。

本套教材与目前奥林匹克图书市场上名牌教材《华罗庚数学奥林匹克教材》(由知识出版社、前任国家奥林匹克总教练单墫主编)，堪称姊妹篇，有不少作者同时是这两套书的编者或编委。比较而言，《华罗庚数学奥林匹克教材》相对难些，对学生的要求相对高些，比较适合竞赛和强化班使用；本套《数学奥林匹克思维训练教材》则在内容和难易程度上更贴近一般学生，贴近小学数学课的常规教学，力求基础知识和竞赛能力双"丰收"，因此特别适合学校或社会上各种奥林匹克培训班作为教材使用。两套教材互为补充，相得益彰，全方位地展示了奥林匹克数学的特殊魅力，让学生从中感受到美感和动力，从而喜欢数学、迷恋数学。条件许可的情况下，两套书可配合使用，则会收到事半功倍的效果。

本套教材在编写过程得到许多从事一线教学的特高级教师和专门从事数学奥林匹克竞赛的领队和教练的帮助和支持，在此，一并致以衷心的感谢。最后，愿广大师生及家长喜欢这套教材，希望本套教材在培养学生数学能力和提高学习兴趣方面有所作为，这是我们为提高全民族素质所尽的一点微薄之力。

(陈永高主审系全国著名年轻数学家、南师大数学系博士生导师、中国数学奥林匹克队领队)

目 录

第一讲　分数大小的比较

同学们已熟悉整数、小数大小的比较方法,而分数大小的比较就不那么简单了。对于两个不同的分数,有分母相同、分子相同以及分子、分母都不相同三种情况,前两种情况判别大小的方法是:

分母相同的两个分数,分子大的那个分数较大,分子小的那个分数较小;分子相同的两个分数,分母大的那个分数较小,分母小的那个分数较大。

对于第三种情况,即分子、分母都不相同的两个分数,通常可根据分数的基本性质(即分子分母同时乘以或除以同一个不为 0 的数,分数的值不变),将它变为分子相同或分母相同的情况再进行比较。

当然,由于要比较的分数千差万别,所以这些方法不一定是最简便的方法。我们必须认真分析,灵活运用所学知识,才能提高解题能力。

【例 1】 将下列分数由小到大排成一列不等式:

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{8},\quad \frac{15}{23},\quad \frac{10}{17},\quad \frac{12}{19}。$$

【分析】 一种方法是将每个分数化为小数,将问题转化为小数大小的比较,这种方法对任意分数都适用,称为万能方法。但万能方法是否简便,要看具体情况。另一种方法是设法将分子或分母化为相同的方法。经过观察,这里容易将分子化为相同。

【解法一】 $\frac{2}{3}=0.66666\cdots\cdots$, $\frac{5}{8}=0.625$,

$\frac{15}{23}=0.65217\cdots\cdots$， $\frac{10}{17}=0.58823\cdots\cdots$，

$\frac{12}{19}=0.63157\cdots\cdots$。

由小数大小的比较可知：$\frac{10}{17}<\frac{5}{8}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{2}{3}$。

【解法二】 注意到各分子的最小公倍数为

$$[2,5,15,10,12]=60。$$

由分数的基本性质可知：

$\frac{2}{3}=\frac{60}{90},\frac{5}{8}=\frac{60}{96},\frac{15}{23}=\frac{60}{92},\frac{10}{17}=\frac{60}{102},\frac{12}{19}=\frac{60}{95}$。

由于 $90<92<95<96<102$，所以$\frac{10}{17}<\frac{5}{8}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{2}{3}$。

【例 2】 比较下列三个分数的大小：

$\frac{4443}{5554}$，$\frac{5557}{6668}$，$\frac{6668}{7779}$。

【分析】 对于这三个分数，无论是将分子还是将分母化为相同的都不很方便，即使全化为小数也不太方便。但是可先讨论它们的倒数。注意到，倒数愈大，这个数反而愈小。

【解】 $\frac{4443}{5554}$ 的倒数为$\frac{5554}{4443}=1+\frac{1111}{4443}$，

$\frac{5557}{6668}$ 的倒数为$\frac{6668}{5557}=1+\frac{1111}{5557}$，

$\frac{6668}{7779}$ 的倒数为$\frac{7779}{6668}=1+\frac{1111}{6668}$。

由于$\frac{1111}{4443}>\frac{1111}{5557}>\frac{1111}{6668}$，所以$\frac{4443}{5554}<\frac{5557}{6668}<\frac{6668}{7779}$。

【注】 用同样的方法可以得到：若两个真分数的分母与分子之差相等，则分母(分子)大的那个分数较大；若两个假分数的分子与分母之差相等，则分母(分子)小的那个分数较大。因此，在比较某些分数的大小时，可以先比较两个分数的分母、分子的差，再依

据结论确定分数间的大小。

【例 3】 将下列分数由小到大排成一列不等式：

$$\frac{17}{27}，\frac{19}{31}，\frac{23}{38}，\frac{101}{161}。$$

【分析】 这里将分子或分母化为相同的都不太方便，似乎只能用万能方法，将它们化为小数再进行比较。其实不然，我们先考察倒数的大小关系，便可得不等式。

【解】 考虑$\frac{17}{27},\frac{19}{31},\frac{23}{38},\frac{101}{161}$的倒数：$\frac{27}{17},\frac{31}{19},\frac{38}{23},\frac{161}{101}$。

即 $1+\frac{10}{17},1+\frac{12}{19},1+\frac{15}{23},1+\frac{60}{101}$。

先比较：$\frac{10}{17},\frac{12}{19},\frac{15}{23},\frac{60}{101}$，注意到$[10,12,15,60]=60$，有

$\frac{10}{17}=\frac{60}{102},\frac{12}{19}=\frac{60}{95},\frac{15}{23}=\frac{60}{92},\frac{60}{101}=\frac{60}{101}$，

而 $92<95<101<102$，所以$\frac{10}{17}<\frac{60}{101}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}$。

从而$\frac{17}{27}>\frac{101}{161}>\frac{19}{31}>\frac{23}{38}$，即$\frac{23}{38}<\frac{19}{31}<\frac{101}{161}<\frac{17}{27}$。

【例 4】 比较大小：$\frac{218191}{654321}$与$\frac{152347}{456789}$。

【分析】 注意到这两个分数都比$\frac{1}{3}$略大，于是，可以借助于第三个数$\frac{1}{3}$来比较大小。

【解】 由于$\frac{218191}{654321}-\frac{1}{3}=\frac{84}{654321}$，

$\frac{152347}{456789}-\frac{1}{3}=\frac{84}{456789}$，

且$\frac{84}{654321}<\frac{84}{456789}$，所以$\frac{218191}{654321}<\frac{152347}{456789}$。

【注】 借助第三个数进行比较，有以下几种情况：

(1)若 $m>k$, $k>n$，则 $m>n$；(2)若 $m-k>n-k$，则 $m>n$；(3)若 $k-m>k-n$，则 $m<n$。

【例 5】 比较$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{99}{100}$与$\frac{1}{10}$的大小。

【分析】 若要计算后比较，则几乎是不可能的。为了能够计算，在分数之间分别插入$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{5}$，…，于是有下面的解法。

【解】 设 $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{99}{100}$，

再设 $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{98}{99}$，

则有 $A\times B=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$。

但由于$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，…，$\frac{97}{98}<\frac{98}{99}$，$\frac{99}{100}<1$，

所以 $A<B$，从而 $A<\frac{1}{10}<B$。

即$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$。

【小结】 分数大小的比较方法多种多样，诸如通分母、通分子、倒数比较、借助于第三个数比较等等，但本质上都是利用分数的基本性质“将分子或分母化为相同的”这个基本方法，或将不熟悉的分数大小的比较转化为熟悉的小数大小的比较。

练 习 一

1. 将下列分数由小到大排成一列不等式。

(1)$\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{11}, \frac{4}{15}$;　　(2)$\frac{10}{7}, \frac{14}{9}, \frac{7}{5}, \frac{35}{23}$;

(3)$\frac{5}{12}, \frac{12}{19}, \frac{10}{23}, \frac{4}{7}, \frac{15}{22}$。

2. 比较下列各题中分数的大小。

(1)$\frac{3}{11}, \frac{4}{15}$;　　(2)$\frac{32}{66}, \frac{36}{75}$;

(3)$\frac{17}{69}, \frac{15}{67}$;　　(4)$\frac{11234}{12345}, \frac{33456}{34567}, \frac{55678}{56789}$。

3. 比较分数的大小:$\frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{23}{61}, \frac{17}{44}$。

4. 比较分数的大小:

(1)$\frac{5}{11}, \frac{7}{13}$;　　(2)$\frac{23}{30}, \frac{22}{31}$;

(3)$\frac{16}{19}, \frac{14}{17}$;　　(4)$\frac{117}{448}, \frac{207}{808}$。

5*. 下面给出 6 个分数算式:

$\frac{3}{7}+\frac{6}{24}, \frac{3}{8}+\frac{7}{24}, \frac{3}{9}+\frac{8}{25}, \frac{3}{10}+\frac{9}{25}, \frac{3}{11}+\frac{10}{25}, \frac{3}{12}+\frac{11}{25}$。

问:其中哪一个计算结果最小,并求出它的值。

第二讲 分数的分拆

不同分母的分数相加减时，通常先通分，化为同分母的分数后再相加减。对于一些分数计算题，若按这种通常的方法计算就会十分复杂，必须借助某些技巧，寻找简便运算的方法。这里所讨论的分数的分拆，就是设法将分数写成两个或几个分数的和或差的形式。当分母之间存在某种特殊规律时，运用这些规律进行分析，使得其中一部分分数可以相互抵消，从而简化计算过程。

通常，可利用下面的等式进行分数的分拆：

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\frac{d}{n(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}。$$

这里，n，d 都是自然数。

【例 1】 在下面的括号中填入两个不同的自然数，使等式成立：

$$\frac{1}{18}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}。$$

【分析】 利用等式$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

可得$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$。

于是可得一种填法。此外，还可以将$\frac{1}{18}$的分子分母同乘以两个数的和，比如 $3+6$，再按分子拆成两项，约简也可得分拆。

【解法一】 $\frac{1}{18}=\frac{1}{19}+\frac{1}{18\times19}=\frac{1}{19}+\frac{1}{342}$。

【解法二】 $\frac{1}{18}=\frac{3+6}{18\times(3+6)}=\frac{3}{18\times(3+6)}+\frac{6}{18\times(3+6)}$

$=\frac{1}{54}+\frac{1}{27}$。

【注】 注意到 3 与 6 为 18 的约数，因此，拆分后的两个分数必可化为单位分数。事实上，18 的不同约数共有 6 个：

1，2，3，6，9，18。

从中任选两个，还可以给出其他填法，如：

$$\frac{1}{18}=\frac{2+3}{18\times(2+3)}=\frac{2}{18\times(2+3)}+\frac{3}{18\times(2+3)}=\frac{1}{45}+\frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{18}=\frac{1+9}{18\times(1+9)}=\frac{1}{18\times(1+9)}+\frac{9}{18\times(1+9)}=\frac{1}{180}+\frac{1}{20}$$等

等。细心的读者不难发现，第一种解法即：

$$\frac{1}{18}=\frac{1}{18\times(1+18)}+\frac{18}{18\times(1+18)}=\frac{1}{18\times19}+\frac{1}{19}=\frac{1}{19}+\frac{1}{342}。$$

一般地，设 A 为大于 1 的自然数，则可用如下方法将$\frac{1}{A}$写成两个单位分数之和：

(1)任选 A 的两个约数 a 与 b；

(2)将$\frac{1}{A}$的分子与分母同乘以$(a+b)$，得

$$\frac{1}{A}=\frac{a+b}{A\times(a+b)};$$

(3)再将上式拆成两个分数之和，约分即可。

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\frac{A}{a}\times(a+b)}+\frac{1}{\frac{A}{b}\times(a+b)}。$$

同学们，你能将上述方法推广，给出下面的分拆吗？

$$\frac{1}{18}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}。$$

$$\frac{1}{18}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}。$$

【例 2】 计算：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}。$$

【分析】 由于每个分数的分子都是1，分母都是两个连续自然数的乘积，所以可以利用$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$。

将每个分数写成两个分数之差，运算时，一些分数可以相互抵消，以达到简化计算的目的。

【解】 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})$$

$$+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})$$

$$=1-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{7}{8}。$$

【例 3】 计算：$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$。

【分析】 经过观察可以发现，每个分数可以写成分子为1，分母为两个连续自然数的乘积的形式，从而可利用分数的分析求和。

【解】 $\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$

$$=\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$$

$$=(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$$

$$=\frac{1}{10}。$$

【例 4】 计算：$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}+\frac{1}{13\times16}$。

【分析】 每个分数的分子为 1，分母为两个差为 3 的自然数的乘积，因此，可以利用等式：$\frac{1}{n(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$，

即 $\frac{1}{n(n+d)}=(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d})\times\frac{1}{d}$，

将每个分数拆分。

【解】 $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}+\frac{1}{13\times16}$

$=(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{10}-\frac{1}{13})\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{13}-\frac{1}{16})\times\frac{1}{3}$

$=(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{16})\times\frac{1}{3}$

$=(1-\frac{1}{16})\times\frac{1}{3}$

$=\frac{15}{16}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{5}{16}$。

【注】 将$\frac{1}{n(n+d)}$分拆时，不能忘记乘以$\frac{1}{d}$。同学们解题时要特别注意。

【例 5】 计算：

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{48\times49\times50}。$$

【分析】 前面我们将分母为两个数相乘的分数分拆成两个分数之差，使得一些分数可以相互抵消。这里设法将分母为三个数相乘的分数也拆成两个分数之差，且同样使得一些分数可以相互抵

消，从而达到简便计算的目的。注意到

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]\times\frac{1}{2}。$$

于是可以实现上述目标。

【解】 $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{48\times49\times50}$

$$=(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{48\times49}-\frac{1}{49\times50})\times\frac{1}{2}$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{49\times50})\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{49\times25})\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1224}{1225}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{306}{1225}。$$

【小结】 利用分数的分析，可以巧妙地解决一些分数的求和问题。

练 习 二

1. 在下面的括号里填入不同的自然数，使等式成立：

(1) $\frac{1}{12}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$；

(2) $\frac{1}{12}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$；

(3) $\frac{1}{20}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$。

2. 计算：$\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{9\times 10}$。

3. 计算：

(1) $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$。

(2) $\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$。

4. 计算：

(1) $\frac{2}{11\times 13}+\frac{2}{13\times 15}\div\frac{2}{15\times 17}+\frac{2}{17\times 19}+\frac{1}{19}$。

(2) $\frac{1}{1\times 6}+\frac{1}{6\times 11}+\frac{1}{11\times 16}+\cdots+\frac{1}{51\times 56}$。