高校财经类专业核心课教材

经济数学基础

线性代数

主　编　邓国俊
副主编　周道林

江西科学技术出版社

赣新登字第003号

线性代数

邓国俊主编

江西科学技术出版社出版发行

各地新华书店经销　江西财经学院印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张:8.625　字数:20万

1994年10月第1版　1994年10月第1次印刷

印数:1—2000

ISBN7—5390—0881—4/G·110　定价:8.00元

前　言

本书是根据国家教委颁发的高等学校财经类专业核心课程《经济教学基础》大纲编写的。在编写过程中，我们遵循大纲的基本原则和指导思想，并根据编者多年教学实践的经验，注意到经济管理专业的特点，对内容精心选择，叙述上力求简明扼要，通俗易懂，便于学习者接受。内容上由浅入深，联系实际，兼顾发展，注意吸取本学科研究中的新成果，体现学科的系统性、科学性、实用性和先进性。特别注意学生的三基训练，每章习题分A组(基本练习)、B组(客观性习题)，并附小结。本书可作高等财经院校或理工学校经济类专业教材或教学参考用书。

本书由江西财经学院信息系高等数学教研室组织教师编写。邓国俊任主编，周道林任副主编。第一章由柳健编写，第二章由邓国俊编写，第三章由华长生编写，第四、六章由王平平编写，第五章由周道林编写，并由周道林总纂，最后由刘序球教授主审。

在编写过程中，我们参阅了兄弟院校编写的有关教材及参考资料，江西财经学院信息系主任程理民教授给予了大力帮助和支持，本室全体教师给予了大力支持，在此表示谢意。

由于我们对大纲的理解和水平有限，书中的错误和缺点在所难免，欢迎广大读者和经济数学界同仁不吝批评指正。

编者　1994.4.1

目　　录

第一章　行列式

线性方程和矩阵是线性代数的重要组成部分，而行列式是解线性方程组和讨论矩阵的重要工具，而且在数学和其他学科中都有广泛应用，本章研究的主要内容是：

(1) n 阶行列式的定义；

(2) n 阶行列式的性质及计算方法；

(3) 用行列式求解线性方程组。

§1.1　排列和逆序

[定义 1.1] 经 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列也叫 n 元排列。

如　3　2　4　1 是一个四阶排列，或为四元排列，3　1　4　2　5 是一个五阶排列，或为五元排列。

n 阶排列就是 n 个自然数的全排列，所以，n 阶排列的总数为 $n!$ 个。

[例 1] 由 1，2，3 为三个自然数能组成多少三阶排列？

解　我们知道 n 排列总数为 $n!$，而此例中 n 为 3，故排列总数为 $3!=6$，它们是：

1　2　3　　1　3　2　　2　1　3　　2　3　1

3　1　2　　3　2　1

从此例中可看出，除排列 1　2　3 中的各数是按自然顺序排列外，在其他排列中都有较大的数排在较小的数前面，为此，我们有必要引入逆序和逆序数的概念。

[定义 1.2] 在一个 n 阶排列中，若有一个较大数排列在较小数前面，就说这两个数构成一个逆序，一个 n 阶排列中逆序的总数，称为它的逆序数。一个 n 阶排列 $j_1, j_2, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1, j_2, \cdots j_n)$。

按定义，一个 n 阶排列 $j_1, j_2, \cdots j_n$ 的逆序数的计算方法是：先算出 j_n，前面比 j_n 大的数的个数 K_n，然后算出 j_{n-1} 前面比 j_n 大的数的个数 K_{n-1}……，从后往前，用类似方法计算下去，直到算出 j_2，前面比 j_2 大的数的个数 K_2，这样就得到排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数 $K_n + K_{n-1} + \cdots + K_2$，即为：

$$\tau(j_1, j_2, \cdots j_n) = K_n + K_{n-1} + \cdots + K_2$$

[例 2] 计算排列 4　2　1　3 的逆席数。

解　由上述方法可得：$K_4 = 1, K_3 = 2, R_2 = 1, \tau(4\quad 2\quad 1\quad 3) = 1 + 2 + 1 = 4$

[例 3] 计算排列 2　6　1　4　5　3 的逆席数。

解　$k_6 = 3, k_5 = 1, k_4 = 1, k_3 = 2, k_2 = 0$，

$\therefore \tau(261453) = 3 = 1 + 1 + 2 + 0 = 7$。

[例 4] 计算排列 $n(n-1)\cdots 3\quad 2\quad 1$ 的逆序数。

解　$k_n = n - 1, k_{n-1} = n - 2, \cdots k_3 = 2, k_2 = 1$，

$\therefore \tau(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$。

[定义 1.3] 逆序数为偶数或零的排列，称为偶排列，逆序数为奇数的排列，称为奇排列：

如：例 2 中的 4　2　3　1 为偶排列，例 3 中的 2　6　1　4　5　3 为奇排列。

[定义 1.4] 将一个排列中的某两个数的位置互换，其余数的位置不动，这种变换称为对换。

如　排列 4　2　1　3，将 2 和 1 对换，得排列 4　1　2　3，而 $\tau(4\quad 1\quad 2\quad 3) = 3$，即排列 4　1　2　3 为奇排列，从此发现，对换对

排列的奇偶性有影响，下面给出有关的定理。

[定理 1.1] 排列经过一次对换，其奇偶性改变。

证 先证对换排列中相邻两数将改变排列的奇偶性，设排列

$$\cdots i,j\cdots \tag{1.1}$$

对换(1.1) 相邻两数 i,j 得一新排列

$$\cdots j,i\cdots \tag{1.2}$$

比较(1.1)、(1.2) 可知：(1.1)、(1.2) 两端的数相同，两数间没有逆序数变动，并且与 i,j 间也没有逆序数变动，故排列(1.1)、(1.2) 逆序数的不同，只取决于 i,j 的次序。

当 $i<j$ 时，排列(1.2) 比排列(1.1) 增加了一个逆序，当 $i>j$ 时，排列(1.2) 比排列(1.1) 减少一个逆序，总之，由排列(1.1) 到排列 (1.2)，逆序无论增加一个还是减少一个，都改变了原排列的奇偶性。

再证对换排列中非相邻两数也改变排列的奇偶性。

设排列

$$\cdots i,k_1,k_2,k_s,j\cdots \tag{1.3}$$

对换(1.3) 中的 i、j 两数得一新排列

$$\cdots j,k_1,k_2\cdots k_s,i\cdots \tag{1.4}$$

事实上，上述对换可看成排列(1.3) 经过若干次相邻两数对换所得到，将排列(1.3) 中的 i 与 k_1 对换，再与 k_2 对换……，直到与 k_s 对换得到排列

$$\cdots k_1,k_2\cdots k_s,i,j\cdots \tag{1.5}$$

然后将排列(1.5) 中 j 与 i 对换，再与 k_s 对换……，直到与 k_1 对换得到排列

$$\cdots\cdots j,k_1,k_2\cdots k_s,i \tag{1.4}$$

我们知道，由排列(1.3) 到排列(1.5) 经过 s 次相邻两数对换，由排列(1.5) 到排列(1.4) 经过 $s+1$ 次相邻两数对换，即排列(1.3) 经过总共 $2s+1$ 即奇数次相邻两数对换得到排列(1.4)，因一次相邻两数对换改变排列的奇偶性，因此排列(1.3)、(1.4) 的奇偶性必然相反，即原排列的奇偶性改变了。

[定义 1.2] 在一个 n 阶排列中，若有一个较大数排列在较小数前面，就说这两个数构成一个逆序，一个 n 阶排列中逆序的总数，称为它的逆序数。一个 n 阶排列 $j_1,j_2,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots j_n)$。

按定义，一个 n 阶排列 $j_1,j_2,\cdots j_n$ 的逆序数的计算方法是：先算出 j_n，前面比 j_n 大的数的个数 K_n，然后算出 j_{n-1} 前面比 j_n 大的数的个数 K_{n-1}……，从后往前，用类似方法计算下去，直到算出 j_2，前面比 j_2 大的数的个数 K_2，这样就得到排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数 $K_n+K_{n-1}+\cdots+K_2$，即为：

$\tau(j_1,j_2,\cdots j_n)=K_n+K_{n-1}+\cdots+K_2$

[例 2] 计算排列 4　2　1　3 的逆席数。

解　由上述方法可得：$K_4=1,K_3=2,R_2=1,\tau(4\quad 2\quad 1\quad 3)=1+2+1=4$

[例 3] 计算排列 2　6　1　4　5　3 的逆席数。

解　$k_6=3,k_5=1,k_4=1,k_3=2,k_2=0$,

$\therefore\tau(261453)=3=1+1+2+0=7$。

[例 4] 计算排列 $n(n-1)\cdots 3\quad 2\quad 1$ 的逆序数。

解　$k_n=n-1,k_{n-1}=n-2,\cdots k_3=2,k_2=1$,

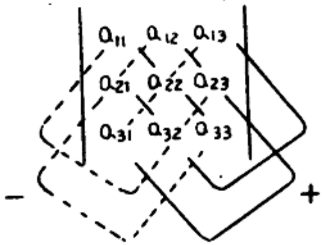
$\therefore\tau(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

[定义 1.3] 逆序数为偶数或零的排列，称为偶排列，逆序数为奇数的排列，称为奇排列：

如：例 2 中的 4　2　3　1 为偶排列，例 3 中的 2　6　1　4　5　3 为奇排列。

[定义 1.4] 将一个排列中的某两个数的位置互换，其余数的位置不动，这种变换称为对换。

如　排列 4　2　1　3，将 2 和 1 对换，得排列 4　1　2　3，而 $\tau(4\quad 1\quad 2\quad 3)=3$，即排列 4　1　2　3 为奇排列，从此发现，对换对



我们把左上角与右下角元所联成的对角线称为主对角线，把右上角与左下角元所联成的对角线称为次对角线。三阶行列式展开共有六项，取正号的三项分别是位于图中实线上的三个元素的乘积取负号的三项分别位于图中虚线上三个元素的乘积，通常称此法则为对角线法则。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式 D 中每个数称为行列式的元素用 a_{ij} 表示，其中 i 表示元素所在的行数，j 表示元素所在的列数。

(1) 行列式展开式的每一项都是来自于不同行不同列的三个元素的乘积，每项一般形式可写成：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，该项元素的第一下标按自然顺序排列，第二下标是 1,2,3 所有的排列

1 2 3,2 3 1,3 1 2,1 3 2

2 1 3,3 2 1,中的某一个

(2) 展开式中共有 $3! = 6$ 项

(3) 由于 $\tau(1\ 2\ 3) = 0$，$\tau(2\ 3\ 1) = 2$，$\tau(3\ 1\ 2) = 2$，故知列指标为偶排列的项前面取正号，由于 $\tau(1\ 3\ 2) = 1$，$\tau(2\ 1\ 3) = 1$，$\tau(3\ 2\ 1) = 3$，因此，列指标为奇排列的项前面取负号，由此可知，每项的符号完全可由列指标排列的逆序数决定，即每项的符号可写成 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$ 这样三阶行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列求和。

对于二阶行列式，它的展开式也有类似规律，这里不详述了，因此，我们可定义 n 阶行列式

二、n 阶行列式的定义

[定义 1.5] 把 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并规定 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

我们称此数学符号为 n 阶行列式，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $j_1j_2\cdots j_n$ 所有可能排列求和。

注：(1)n 阶行列式，当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$ 称为一阶行列式。

(2) 行列式定义中各项元素都来自不同行不同列。

(3) 行列式定义中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对 $j_1j_2\cdots j_n$ 的排列求和，共 $n!$ 项

(4) 行指标按自然顺序排列，每项符号由列指标排列的逆序数确定。

[例 6] 利用行列式定义计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　$\because D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$因各项元素都是来自不同行不同列，而 a_{1j_1} 只有当 $j_1=1$ 才有 $a_{1j_1}\neq 0$ 即 $a_{1j_1}=a_{11}$，而 a_{2j_2} 当 $j_2\neq 1,2$ 时 $a_{2j_2}=0$，只有当 $j_2=1,2$ 时，a_{2j_2} 才可能不为零，又因 $j_1=1$，故 j_2 只能取 2，即 $a_{2j_2}=a_{22}$，依此类推，得 $a_{1j_1}=a_{11}, a_{2j_2}=a_{22}$，$\cdots, a_{nj_n}=a_{nn}$，即除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这项外，其他各项均为零。因此有 $D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

我们称$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}$对角行列式，且有：

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}=d_1d_2\cdots d_n$$

此结论可由例 6 的结果直接得出，它是例 6 的特殊情况。

在行列式定义中，行列式各项每一元素都是我们有意识地将行指标按自然顺序排列起来的，但作为数的乘积，每一元素的次序可以任意，即行指标也可任意按顺序排列。行列式各项一般形式可记为：

$$a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \cdots, a_{i_nj_n} \tag{1.7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n, j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 阶排列。

现在，我们来讨论(1.7)的符号，可以证明，行列式一般项(1.7)的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{1.8}$$

把(1.7)中的 n 个元素重新调换次序，行指标按自然顺序排列，这样，(1.7)变成：

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'} \tag{1.9}$$

它的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')} \tag{1.10}$$

我们知道，由(1.7)到(1.9)是经过若干元素调换次序得到的，在作每一次调换的过程中，元素的行指标和列指标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都作一次对换，由定理1.1可知：排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时改变奇偶性，也即，它们的逆序数和 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不会改变，而(1.9)中的行指标和列指标所组成的排列 $1\ 2\ 3\cdots n$ 和 $j_1'j_2'\cdots j_n'$ 的逆序数和为 $\tau(1\ 2\cdots n)+\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')=\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')$ 故有 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')$ 的奇偶性相同，也即：

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

(1.8)与(1.9)的符号相同

由此可得：每一项符号可由排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数和来确定，若我们将每项列指标按自然顺序排列，一般项记为

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

它的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(1\ 2\cdots n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$ 那么每项可表示为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$

由此，我们可给出另外一个行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

在应用当中使用哪一个定义，要视具体情况而定。

[例7] 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

解　据等价定义 $D=\sum\limits_{i_1i_2i_3i_4}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3i_4)}a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33}a_{i_44}$ 现在考察每项元素的结构规律。

因为 a_{i_11} 来自第一列，只有当 $i_1=1$，即 $a_{i_11}=1$ 时，才使 a_{i_11} 非零，

故取 $i_1 = 1$，同样，$a_{i_2 2}$ 来自第二列，只有取 $i_2 = 3$，即 $a_{i_2 2} = 2$，$a_{i_3 3}$ 来自第三列，因 $i_1 = 1$，$i_2 = 3$，所以 i_3 只能取 2 或 4，即 $a_{i_3 3} = 5$ 或 2，$a_{i_4 4}$ 来自第四列，当 i_3 取 2 时，i_4 取 4，当 i_3 取 4 时，i_4 取 2，这样有

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4} \\
&= (-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{32} a_{23} a_{44} + (-1)^{\tau(1342)} a_{11} a_{32} a_{43} a_{24} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 + (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -82
\end{aligned}
$$

§1.3 行列式的性质

上面讲述了行列式定义，我们发现，用定义计算行列式显得比较复杂，只便 于计算一些特殊的行列式，因而，必须进一步研究行列式所固有的性质，以便简化行列式的计算。

设

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

它的转置行列式定义为

$$
D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

说明　转置行列式 D' 的列是原行列式 D 的行，D' 的行就是原行列式 D 的列。

[性质 1] 行列式 D 与它的转置行列式 D' 相等，即 $D = D'$

证　设

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$　据定义

$$D' = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 1 j_2 2 \cdots j_n n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

由等价定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 1 j_2 2 \cdots j_n n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

故 $D' = D$

注　本性质告诉我们：行列式行所具备的性质，其列同样具备，这就是说，行列式的行与列有相同地位。

[性质 2] 互换行列式的两行(列)，行列式的值变号。

证　设

$$D_1 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots s\text{ 行} \\ \\ \cdots k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

s 行与 k 行互换得

$$D_2 = \begin{array}{l} \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right| \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots s\text{ 行} \\ \\ \cdots k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

D_2 的一般项可写成

$$a_{1j1}\cdots a_{kjk}\cdots a_{sjs}\cdots a_{njn}$$

将 a_{kjk},a_{sjs} 互换次序得

$$a_{1j1}\cdots a_{sjs}\cdots a_{kjk}\cdots a_{njn}$$

而这恰好是 D_1 的一般项,现在来考察一下它们的符号。

在 D_1 的符号为$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}$

D_2 的一般项 $a_{1j1}\cdots a_{kjk}\cdots a_{sjs}\cdots a_{njn}$ 中的 a_{kjk} 是 D_2 中的第 s 行的元素,a_{sjs} 是 D_2 中第 k 行的元系,其行指标排列为 $1\cdots s\cdots k\cdots n$,列指标排列为 $j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n$,故其符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots k\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}$$

又排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_m$ 与排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n$ 的逆序数只差一,故有

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)} = -(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}$$

也即,D_2 的一般项与 D_1 的一般项只差一个符号,故 $D_2 = -D_1$

[推论]若行列式两行(列),对应元素相同,则此行列式为零。

证　将相同的两行互换,得 $D = -D$,故 $D = 0$

[性质 3]　行列式某一行(列)的公因子,可以提到行列式符号的前面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$