

高等学校教学参考书

张文灿 邓亲俊 编

电磁场 的 难题和例题

分析



高等教育出版社

电磁场的难题和例题分析

张文灿 邓亲俊 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书题材广泛，包括工科本科电磁场、电磁波教学内容，以及部分电动
力学和研究生教学内容等。全书共分十章，每章都由基本公式、例题分析和
习题三部分组成，重点放在例题分析。全书共计例题 300 余道（其中研究生
入学试题约占一半左右），习题 200 余道（其中研究生试题 80 余道），一部
分例题和习题难度较大。

本书适用于大专院校电工、电讯专业师生作教学参考书，也适用于报考
硕士研究生者入学考试之用，以及在校研究生学习的参考，对于电气工程技
术人员也有参考价值。

责任编辑 马 达

电磁场的难题和例题分析

张文灿 邓亲俊 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

文字六〇五厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 18 字数 430 000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 00 001—5 640

书号 15010·0780 定价 4.00 元

前　　言

电磁场理论是一门重要的技术基础课，又是一门难学、难用的课，即使弄懂了基本理论，但仍不会应用、不会解题是常有的事。这是因为电磁场理论概括性强、内容抽象，使用数学知识广泛，解题技巧要求较高的缘故。因此编写一本题材广泛，具有一定难度、理论联系实际、适用性强和侧重于计算的参考书，是很必要的。为使本书能作为教学参考书，又能作为例题习题集使用，因此每章前边都简要地写出了该章所用的基本公式。

本书的内容不局限于当前国内工科电磁场和电磁波的教学内容，还包括了物理的电磁学和电动力学以及研究生的部分教学内容。例题分析和习题部分选入了大量国内各高等院校的研究生入学试题和部分国外研究生试题，以及具有一定难度和启发思路的典型题目，国内现有电磁场教科书上的题目基本未选。例题分析均给出了详细的解答，习题也给出了答案。

本书编排的次序是从静态场到动态场，从非相对论到相对论。第一章静电场（I）和第二章静电场（II）的区别是：第二章着重讨论了边值问题和复位函数法，编入了电荷分布和电容的近似计算法；第三章是恒定电流的电场；第四章是恒定电流的磁场，其中也包括了电感的计算和边值问题；第五章是电磁感应和电场、磁场中的带电粒子；第六章是时变电磁场；第七章是平面电磁波与均匀传输线；第八章是波导与谐振腔；第九章是辐射与天线；第十章是狭义相对论和运动电荷的电场和磁场。书末附有四个附录和各章习题答案。

本书第一至第五章和第十章由张文灿编写，第六章至第九章由邓亲俊编写，张文灿统校了全书。雷良钦认真审阅了全稿，并逐题进行了核算，提出了很多宝贵的修改意见。在编写过程中，成都电讯工程学院时振株和华中工学院徐乃风为本书提供了部分资料；谢处方、饶克谨两位教授，方虎堂老师、高等教育出版社的同志、其他院校的老师和同学们给予了大力支持和帮助；作者在此谨致谢意。

由于电磁场题目比较难做，我们虽作了一定的努力，但错误和不妥之处仍可能不少，如蒙读者指正，不胜感激。

编 者
于一九八五年九月十日教师节

目 录

第一章 静电场(Ⅰ)	1
一 基本公式	1
二 例题分析	11
三 习题	108
第二章 静电场(Ⅱ)	117
一 基本公式	117
二 例题分析	120
三 习题	186
第三章 恒定电流的电场	191
一 基本公式	191
二 例题分析	193
三 习题	218
第四章 恒定电流的磁场	223
一 基本公式	223
二 例题分析	229
三 习题	303
第五章 电磁感应和电场、磁场中的带电粒子	312
一 基本公式	312
二 例题分析	315
三 习题	362
第六章 时变电磁场	368
一 基本公式	368
二 例题分析	373

三	习题	403
第七章	平面电磁波与均匀传输线	408
一	基本公式	408
二	例题分析	417
三	习题	448
第八章	波导与谐振腔	458
一	基本公式	453
二	例题分析	458
三	习题	475
第九章	辐射与天线	477
一	基本公式	477
二	例题分析	480
三	习题	495
第十章	狭义相对论和运动电荷的电场与磁场	497
一	基本公式	497
二	例题分析	501
三	习题	535
附录一	坐标系及其相互之间的关系	538
附录二	矢量分析公式	540
附录三	贝塞尔函数	543
附录四	勒让德函数	547
习题答案		551

第一章 静电场(Ⅰ)

一、基本公式

库仑定律、电场强度和电位的表达式分别为

$$\mathbf{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (1-1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (1-2)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1-3)$$

式中, $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, \mathbf{e}_r 是径向单位矢量。

多个点电荷系的电场强度和电位, 由叠加原理, 得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k^2} \mathbf{r}_k \quad (1-4)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} \quad (1-5)$$

以上公式对于点电荷系的场强和电位的计算非常有用。若场中还有连续分布的电荷, 电位为

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_k} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\tau dl}{r} \end{aligned} \quad (1-6)$$

场强 \mathbf{E} 也有类似的计算公式, 式中 ρ 、 σ 、 τ 分别为电荷体、面、线密度。

静电场是守恒场(无旋场)，它有

$$\oint_s E \cdot dI = 0 \quad \nabla \times E = 0 \quad (1-7)$$

场强和电位的关系是

$$\varphi = \int_p E \cdot dI \quad (1-8)$$

$$E = -\nabla \varphi \quad (1-9)$$

利用(1-6)式求得电位函数后，再由(1-9)式即可计算场强。这是由于电位是标量，只需进行一个积分的计算，而场强矢量 E 则需计算三个积分，并且含有 $\frac{1}{r}$ 的积分往往比含有 $\frac{x}{r^3}$ 的积分又稍简便一些。所以，大多数情况下，往往先计算 φ ，再由 φ 的梯度计算场强。

在直角坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系中，电力线的微分方程分别为

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1-10)$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\alpha}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} \quad (1-11)$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\alpha}{E_z} \quad (1-12)$$

真空和介质中的高斯定律以及介质的成分方程分别为

$$\oint_s E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-13)$$

$$\oint_s D \cdot dS = q \quad \nabla \cdot D = \rho \quad (1-14)$$

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \chi \epsilon_0 E = (1 + \chi) \epsilon_0 E = \epsilon_r \epsilon_0 E = \epsilon E \quad (1-15)$$

ϵ_r 是相对介电常数。 $D = \epsilon E$ 仅适用于各向同性的线性媒质。

使用高斯定律算出电场强度的情况是很有限的；当电荷分布具有平面、球形或轴线对称时，才能由高斯定律算得场强。例如：电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面的场强 $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ ；平板电容器的场强 $E = \sigma/\epsilon_0$ ；半径为 a 的均匀带电圆球之场强 $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ ；电荷线密度为 τ 的均匀带电导线之场强 $E = \tau/(2\pi\epsilon_0 r)$ 等，由高斯定律都很容易算得，也只有在这种情况下，先计算场强，再由场强求电位才是方便的。

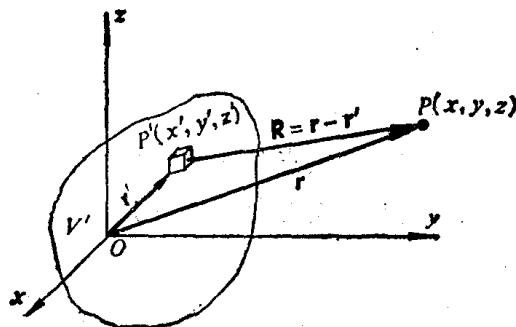


图 1-1

观察点 P 离电荷区域 V' 很远，电位函数 $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{dq}{R}$ 中的 $\frac{1}{R}$ 在原点附近可展开成泰勒级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{r} + \left[x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + z' \frac{\partial}{\partial z'} \right]_0 \left(\frac{1}{R} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + z' \frac{\partial}{\partial z'} \right]^2_0 \left(\frac{1}{R} \right) + \dots\end{aligned}$$

式中， $R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$ 。注意 $\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^3} \frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{x-x'}{R^3}$ 和 $\left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) \right]_0 = \frac{x}{r^3} = \frac{l}{r^2}$ ， $l = x/r$ 是矢量 r 和 x 轴间的夹角余弦，脚标 0 表示导数取原点处的值。二阶导数

同样处理，并把 $x' = y' = z' = 0$, $R = r$ 代入，则得 P 点的电位表达式

$$\begin{aligned}\varphi = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \frac{dq}{r} + \int_{r'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (lx' + my' + nz') dq \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \frac{1}{r^3} \left[3mny'z' + 3nlz'x' + 3lmx'y' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(3l^2 - 1)x'^2 + \frac{1}{2}(3m^2 - 1)y'^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(3n^2 - 1)z'^2 \right] dq + \dots \\ = & \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots\end{aligned}\quad (1-16)$$

式中， l, m, n 是原点和观察点 P 连线的方向余弦。第一项是零阶电位或单极子项，它是所有电荷都集中于原点时， P 点的电位。第二项可写为

$$\begin{aligned}\varphi_1 = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{r}' dq = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \int_{r'} \mathbf{r}' dq \\ = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{P}}{r^4} \right)\end{aligned}\quad (1-17)$$

是一阶电位或偶极子项； $\mathbf{e}_r = li + mj + nk$ 是 r 方向的单位矢量； $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$ ， $\mathbf{P} = \int_{r'} \mathbf{r}' dq$ 是偶极矩矢量。如果是一个偶极子电荷，则 $\mathbf{P} = q \mathbf{d}$ ，(1-17) 式即为电偶极子的电位。(1-16) 式中的第三项是二阶电位或四极子项，其余依此类推。

静电场的分界面条件为

$$E_{1s} = E_{2s} \quad D_{2s} - D_{1s} = \sigma \quad (1-18)$$

分界面上没有自由电荷时，

$$E_{1s} = E_{2s} \quad D_{1s} = D_{2s} \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (1-19)$$

通过极化强度求极化电荷面密度和体密度的公式为

$$\sigma' = \epsilon_0(E_2 - E_1) \cdot e_s = (P_2 - P_1) \cdot e_s = P \cdot e_s, \quad \rho' = -\nabla \cdot P \quad (1-20)$$

由 $E = -\nabla \varphi$ 和 $\nabla \cdot D = \rho$, 得泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-21)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1-22)$$

用电位函数表示的分界面条件是

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{和} \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (1-23)$$

在求电位函数时, 除电位应满足(1-21)式或(1-22)式外, 还必须知道定解条件, 静电场中的定解条件是指对空间变量的边界条件; 通常把边界条件分为三类, 即给定边界值的狄里赫利问题、给定边界法向导数值的聂曼问题和两种形式混合给定的劳平问题。当场中不止一种介质时, 在分界面上还需满足(1-23)式的分界面条件。边界条件往往是对包围场域整体的面而言的, 不包括整体内不同材料的分界面, 但一般参考书中, 两者常不加区分, 通称之为边界条件。

满足边界条件的拉普拉斯方程或泊松方程的任一解, 必定是唯一的, 称为唯一性定理。镜像法的出发点, 就是用假想镜像电荷代替真正的电荷分布, 并保持边界条件不变, 从而得到真实解的一种特殊计算方法。

两导体平板互成 α 角, $\alpha = \frac{\pi}{n}$, 只要 n 是正整数, 即可用镜像法求得介质区域中的电场, 如图 1-2 所示。若 $\alpha = \pi$, 则成为

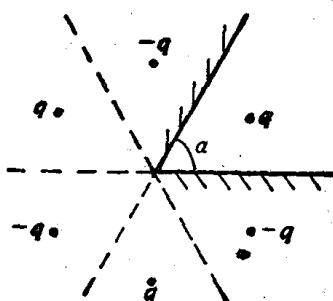


图 1-2

两个点电荷 q 和 $-q$ 所产生的场。

对于图 1-3 所示的电介质分界面，

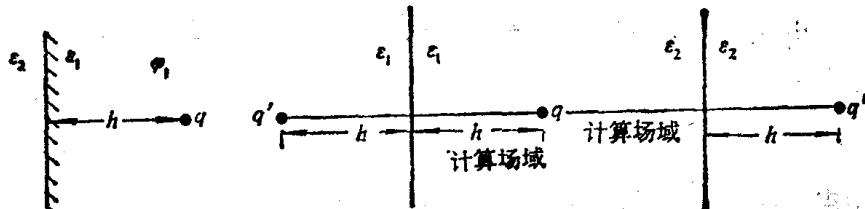


图 1-3

镜像电荷为

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (1-24)$$

半径为 a 的接地导体球附近 d 处放一点电荷 q ，则镜像电荷 q' 及其所在的位置（图 1-4）为

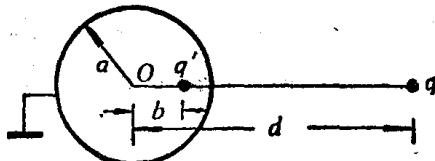


图 1-4

$$q' = -\frac{a}{d} q \quad \text{和} \quad b = \frac{a^2}{d} \quad (1-25)$$

若导体球不接地，则应在球心放置 $-q'$ ，相当于三个点电荷系的计算。又若不接地导体球带电荷 Q ，则 Q 也应置于球心，才能保持球等位，这时球心的电荷为 $(Q - q')$ 。

半径不能忽略的双输电线，如图 1-5 所示，其电轴的位置和电位的表达式分别为

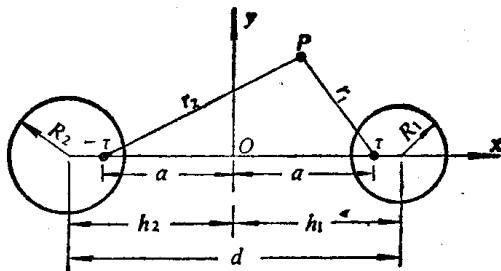


图 1-5

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d}, & h_2 &= \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2d} \\ a &= \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-27)$$

如果在导体圆筒内偏心放置圆柱导体，关键也在于求得电轴的位置，(1-26)式仍然正确，所不同的是两圆柱几何轴心之间的距离是 $d = h_2 - h_1$ ，而不是像图 1-5 所示的 $d = h_1 + h_2$ 。

使用镜像法可以计算看来不易求解的一些问题。以上问题如果直接计算，则需知道电荷的分布，如果用分离变量法，则需由边界条件确定常数，都非常麻烦，而镜像法却使问题变得相当简单。在使用镜像法时，应注意适用的场域，不要弄错。

电容

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U} \quad (1-28)$$

电容器的电容由电容器的几何形状、尺寸、中间填充的介质及极板的相对位置确定，与其是否带电无关，因此求电容时，可假设两极板的电荷各为 $\pm Q$ ，求出场强，再由场强求出两极板之间的电位差（也可直接求出电位差），代入(1-28)式，即得电容。

对于多导体系统，有

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \dots \\ \varphi_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (1-29)$$

或解出电荷

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \dots \\ q_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (1-30)$$

式中， α 是电位系数， β 是静电感应系数，上式用部分电容表示，则

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = C_{11}U_{10} + C_{12}U_{12} + \dots \\ q_2 = C_{21}U_{21} + C_{22}U_{22} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (1-31)$$

部分电容与电容是不同的，利用部分电容可求得多导体系统的等值电容(工作电容)。

设 φ_i 是电荷 q_i 产生的电位， φ'_i 是 q'_i 产生的电位，格林互易定理告诉我们

$$\sum_{i=1}^n q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n q'_i \varphi_i \quad (1-32)$$

格林互易定理的应用，是因为可任意假设电荷值。譬如要证明电位系数 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ ，可假设 $q'_i \neq 0$ ，其余带电的电荷为零， $q_i \neq 0$ ；其余电荷为零，代入(1-32)式，并令 $q_1 = q'_1$ ，即得 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ 。

一个单位点电荷的电位，用 G 表示(图 1-6)，它满足泊松方程

$$\nabla^2 G = -\frac{1}{\epsilon} \delta(r - r') \quad (1-33)$$

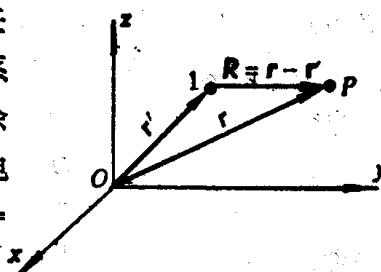


图 1-6

式中， $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 是狄拉克函数，由下面式子定义

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{R}) = \begin{cases} \infty & (\mathbf{r}=\mathbf{r}') \\ 0 & (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \end{cases}$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV = \begin{cases} 1 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \\ 0 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 外}) \end{cases}$$

G 称为格林函数。对单位电荷而言，其电位或格林函数为

$$\varphi = G = \frac{1}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \quad (1-34)$$

上式又称为三维基本解。对于连续分布的电荷，其电位可通过格林函数写为

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon R} = \int_V \rho G dV \quad (1-35)$$

对于有界区域，利用格林定理和格林函数，经过一定的推导之后，得电位的一般表达式

$$\varphi = \int_V \rho G dV + \epsilon \oint_S G \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \epsilon \oint_S \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (1-36)$$

上式的可贵之处，在于通过体积 V 内的电荷分布和边界 S 上的给定值，即可确定电位函数，勿需再对拉普拉斯方程或泊松方程求解，因而对边值问题的计算，开辟了另一途径。

n 个点电荷系的相互作用能

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i \quad (1-37a)$$

式中， φ_i 表示除去 q_i 外，所有其他点电荷在 q_i 点上产生的电位。

若电荷以体密度 ρ 分布在某一体积内，或分布在 n 个导体表面上，其电场能量分别为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \sigma_i \varphi_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i$$

(1-37b)

式中, Q_i 为第 i 个导体的电位, 它等于本身电荷 Q_i 和其他电荷共同产生的电位。

通过电场能量密度 w_e , 电场能量又可写成

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V D \cdot E dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV$$

(1-37c)

$$w_e = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

(1-38)

导体单位面积上所受的电场力, 可用(1-38)式计算。电场对电荷的作用力, 原则上可用 $f = qE$ 计算, 但对于作体分布或面分布的电荷, 其所受的电场力, 一般需作矢量的体积分或面积分计算, 相当复杂, 甚至无法进行。利用虚位移法, 可得电场力的计算公式

$$f = -\frac{\partial W_e}{\partial g} \Big|_q = \frac{\partial W_e}{\partial g} \Big|_0$$

(1-39)

式中, g 为广义坐标, f 为广义力。只要电场能量求得, 任意假设带电导体的电荷不变或电位不变, 利用(1-39)式, 即可求得电场力。

若电偶极子的偶极矩 $p = ql$ 处于静电场中, l 是由负电荷指向正电荷的矢量, 点电荷 q 和 $-q$ 在电场中的能量 $W_e = q\varphi_1 - q\varphi_2$, φ_1 和 φ_2 各表示在 $+q$ 和 $-q$ 处的电位, 由于 l 很小, 故

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l = \nabla \varphi \cdot l = -l \cdot E$$

电偶极子 p 在外电场中的能量

$$W_e = -ql \cdot E = -p \cdot E = -PE \cos \theta$$

(1-40)

式中, θ 为电偶极子的偶极矩 p 与场强 E 的夹角。若取 θ 为广义