小学数学活动课程研究丛书

XIAO XUE SHU XUE JING SAI FU DAO

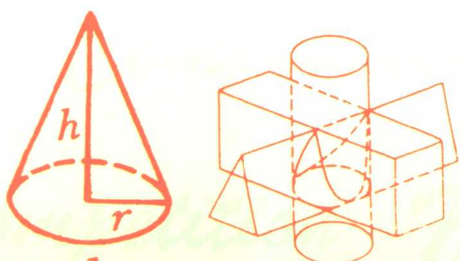
5

小学数学竞赛辅导

综合训练

（六年级适用）

孙瑞清 主编



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

北京大学出版社

小学数学活动课程研究丛书

小学数学竞赛辅导

综合训练

（六年级适用）

孙瑞清　主编

孙瑞清　刘仁权　编撰

北京大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

小学数学竞赛辅导：综合训练/孙瑞清主编. —北京：北京大学出版社，2002.4
（小学数学活动课程研究丛书）

ISBN 7-301-04437-2

Ⅰ.小… Ⅱ.孙… Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料
Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第018108号

书　　　名：**小学数学竞赛辅导：综合训练**（六年级适用）
著作责任者：孙瑞清　主编
责 任 编 辑：王　艳
标 准 书 号：ISBN 7-301-04437-2/G·0551
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者：北京飞达印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850mm×1168mm　32开本　8.125印张　211千字
2002年4月第1版　2002年4月第1次印刷
定　　　价：10.00元

《小学数学竞赛辅导》编委会

前　言

为迎接信息时代的挑战，培养新世纪的人才，加强素质教育现已成为全民的共识．这就要求数学基础教育从小学开始就要在普及的基础上，逐步提高水平，特别在提高学生的创造才能和应用意识上进行研究．为此，我们以现行小学数学教学大纲为基础，编写了这套《小学数学竞赛辅导》丛书．

本丛书编写的目的是：

1．为学有余力的同学，提供一套水平较高的小学数学课外读物，以利于开展小学数学活动，加强数学实践与应用；

2．激发学生学习数学的兴趣，提高学生学习数学的主动精神和数学能力，发展学生的创造才能；

3．为扩展小学数学知识的视野，适当提供小学数学的背景材料，以利于教者、学者加深对小学数学教材的理解；

4．为小学生参加各类小学数学竞赛，提供实用、有效的辅导材料．

为此，本丛书在编写中注意：

1．精选例题、习题，重视激发学生的学习兴趣；

2．在夯实基础知识与基本技能的基础上，重视渗透数学思想方法；

3．重视练习，从数学实践中，启迪学生的数学思维，重视数学应用；

4．精选课题，重视循序渐进地培养学生的创造才能．

本丛书具体内容共分五册，前四册为小学数学竞赛的基础部分，每册 20 讲，供小学三、四、五、六年级使用．在每讲中既有知识要点，又有例题精讲，并配有适当的习题，每 5 讲后配备一套自测

题，每册书末有40个复习题，并附有习题、自测题、复习题的答案，方便读者查阅.

最后一册为综合提高部分，供小学六年级赛前辅导使用，也可单独作为数学爱好者的课外读物，其特点是在综合概括前四册知识内容的基础上，补充与加深了小学数学奥林匹克竞赛的重点内容.本着激发兴趣，适当加大难度，适当提高水平，适当提高解题的灵活性和开发性，适当提高创造能力和应用意识的原则，精选了15讲讲座，作较深入讨论，并配有习题、复习题和解答.这样不仅使小学数学奥林匹克的学习内容更加系统化，而且还能进一步培养学生对数学思想方法的理解，发展数学思维能力，提高数学素养和创造精神.

读者在阅读本丛书时，最好从第一册开始，循序渐进地学习，对书中的例题要仔细体会其解题的思想和方法，并注意有些例题后的简要说明，然后再做习题和自测题.这样可以在实践的基础上，逐步提高自己的数学才能和创造性.

参加本丛书编写工作的有：数学教育专家、数学教育博士、数学高级教师.我国著名数学教育家和数学家钟善基和王梓坤先生为本书的顾问，这对我们是极大的鼓舞，在此深表谢意.

在本丛书编写过程中，我们参阅了不少国内外有关资料，收益匪浅.此外，北京大学出版社的王明舟先生和王艳女士对本丛书的出版给予了很多帮助，在此，一并表示感谢.

由于我们的水平有限，尽管我们尽了努力，但其中缺点，甚至错误，在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2002年1月16日

目　录

第一讲　集合初步

在日常生活中，我们常常要考虑一些事物的总体.

例如，我们把马、牛、羊、鸡、犬、猪等称为“动物”；把杨树、柳树、桃树、松树、柏树等称为“树”；把桌子、椅子、床、柜子、沙发等称为“家具”.

这种用总称来考虑事物整体的方法，可以使我们分门别类地去认识事物及其性质. 在数学上，就把这种“整体”称做集合. 这一讲，我们就来学习集合的初步知识.

一、集合和元素

在考察事物时，我们把一些具有共同性质的事物放在一起，便组成了一个集合. 组成某个集合的事物叫做这个集合的元素. 例如：

(1) 你的家庭中所有的成员组成一个集合，你和你家庭中的其他每个成员都是这个集合中的元素.

(2) 你所在的学校里，所有学生组成一个集合，你和你的每个同学都是这个集合的元素.

(3) 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，这十个数字组成一个集合，我们称它为数字集合，其中每个数字都是数字集合的元素.

(4) 自然数全体 1，2，3，…，2001，2002，…组成一个集合，通常称为自然数集合，每一个自然数都是自然数集合的元素.

总之，组成集合的元素不同就是不同的集合，因此，集合是由组成它的元素所决定的.

我们通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，并习惯上用字母 $\boldsymbol{N}$ 表示自然数集合；用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，我们就说"a 属于 A"，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，我们就说"a 不属于 A"，记作 $a\notin A$. 例如 $2\in N$；而$\frac{1}{2}$不是自然数集合的元素，就说$\frac{1}{2}$不属于自然数集合，记作$\frac{1}{2}\notin N$.

二、集合的表示方法

1. 列举法

当一个集合所含的元素个数较少时，那么最简单的表示方法，就是把它所含的元素都一一列举出来，这叫做列举法. 用列举法表示集合时，通常是将这个集合的每个元素一一填写在{　}中，每个元素之间用逗点隔开，填写集合的元素与次序无关. 例如：

(1) 由 1,2,3,4,5 五个数字组成的集合 A，记作

$$A=\{1,2,3,4,5\},$$

也可记作

$$A=\{3,2,1,5,4\}.$$

(2) 由 a,b,c,d 四个字母组成的集合 B，记作

$$B=\{a,b,c,d\},$$

显然，$a\in B, e\notin B$.

(3) 由小于 40 的质数组成的集合 C，记作

$$C=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37\},$$

显然，$20\notin C, 41\notin C$.

2. 描述法

把集合中元素的公共属性描述出来，并写在大括号中，这种表示集合的方法叫做描述法. 它的一般表示式是：

$$\{x;x\text{ 具有性质}\},$$

其中，"；"左边的 x 表示的是集合中的元素，"；"右边表示的是集合中元素 x 所具有的共同性质.

例如，由所有大于零的数组成集合 F，可描述如下：

$$F = \{x; x > 0\}.$$

在不引起混乱的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可以把具有共同性质的元素写在大括号内. 例如：

由等腰三角形组成的集合，可以表示为

$$\{等腰三角形\}.$$

由平行四边形组成的集合，可以表示为

$$\{平行四边形\}.$$

例 1 用适当的方法把下列集合表示出来：

(1) 平方数等于原数的集合；

(2) 不大于 30 的质数的集合；

(3) 由大于零的偶数组成的集合.

解 (1) 设平方后仍等于原数的数组成的集合为 A，那么，由于只有 $0^2=0$，$1^2=1$，所以用列举法表示集合 A 为

$$A = \{0,1\},$$

用描述法表示集合 A 为

$$A = \{x; x^2 = x\}.$$

(2) 设不大于 30 的质数组成的集合为 B，那么用列举法表示集合 B 为

$$B = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\},$$

用描述法表示集合 B 为

$$B = \{x; x\text{ 是小于 30 的质数}\}.$$

(3) 设大于 0 的偶数组成的集合为 C，那么用描述法表示集合 C 为

$$C = \{x; x\text{ 是大于零的偶数}\};$$

或 $$C = \{x; x > 0, x\text{ 能被 2 整除}\};$$

或 $$C = \{x; x = 2n, n \in N\}\ (n\text{ 表示自然数}).$$

由有限个元素组成的集合称为有限集合，由无限个元素组成的集合称为无限集合. 例 1 中，(1)和(2)为有限集合，(3)为无限集合，自然数集合也是无限集合.

三、集合之间的关系和运算

1. 包含与子集

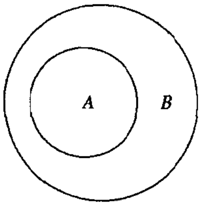


图 1-1

设有两个集合 A 和 B，若任何属于 A 的元素也必定属于 B，则称 A 为 B 的子集，或称 B 包含 A. 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

如果集合 A，B 分别用一个圆来表示，那么 A 是 B 的子集可用图 1-1 表示，这种图称为文氏图. 例如：

(1) 你班上同学的集合，是你所在学校的同学所成集合的一个子集.

(2) 设集合

$$A = \{1,2,3,4,5\}, \quad B = \{4,5,1\}, \quad C = \{1,5\},$$

则有
$$C \subseteq B, \quad B \subseteq A, \quad C \subseteq A.$$

如果集合没有任何元素，我们称这种特殊的集合为空集. 用符号 $\varnothing$ 表示. 我们规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subseteq A$.

另外，任何集合 A 是它自身的子集，即 $A \subseteq A$. 如果有两个集合 A，B 的所有元素都相同，就说这两个集合相等，记作 $A = B$.

例如，

$$A = \{x; x > 0, x \text{ 不能被 2 整除}\},$$
$$B = \{x; x = 2n - 1, n \in N\},$$

则
$$A = B.$$

例 2 设 $A = \{1,2,3,4\}$，试写出 A 的所有子集.

解 A 的所有子集是：

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\},$$
$$\{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\},$$
$$\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}.$$

2. 交集

对于给定的集合 A，B，由它们的公共元素所组成的集合，叫

做集合 A 和集合 B 的交集. 用符号 $A\cap B$ 表示 A 与 B 的交集(图 1-2).

由交集定义可知,对于任何集合 A,B 都有

$$A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,\quad A\cap B=B\cap A.$$

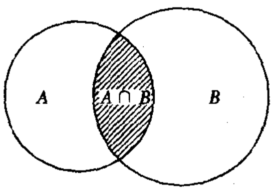


图 1-2

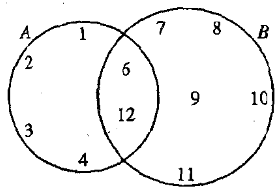


图 1-3

例 3 如图 1-3,设

$$A=\{x;x\text{ 是 12 的约数}\},$$

$$B=\{x;x\text{ 是整数,且 }5<x<13\}.$$

求 $A\cap B$.

解 因为

$$A=\{1,2,3,4,6,12\},$$

$$B=\{6,7,8,9,10,11,12\},$$

所以 $$A\cap B=\{6,12\}.$$

3. 并集

对于给定的两个集合 A,B,把它们所含的元素合并起来所构成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的并集,用 $A\cup B$ 来表示 A,B 的并集(如图 1-4).

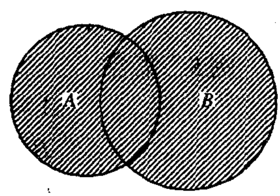


图 1-4

例 4 (1) 设 M,N 分别表示你班上男生、女生的集合,那么你班上同学的集合,怎样表示?

(2) 设集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, 求 $A\cap B$, $A\cup B$.

解 (1) 设班上同学的集合为 Q,则

$$Q = M \cup N.$$

(2) $$A \cap B = \{3,5\},$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}.$$

注意 在求上述集合 A,B 的并集时，虽然在 A,B 中都有元素 3 和 5，但在 $A \cup B$ 中，3 和 5 只取一次.

4. 补集

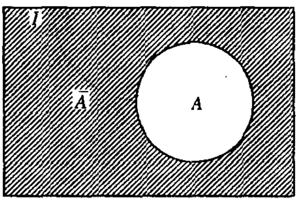


图 1-5

如果我们所考虑的集合都是某一个给定集合的子集，我们可称这个给定集合为全集，用符号 I 表示. 例如 A 是 I 的子集，那么集合 I 中所有不属于 A 的元素所构成的集合，称为 A 在 I 中的补集，用符号 $\overline{A}$ 表示，读作 A 的补集（如图 1-5）.

例如，

(1) 设全集 $I = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，子集 $A = \{0,3,5,8\}$，那么

$$\overline{A} = \{1,2,4,6,7,9\}.$$

(2) 设 $$I = \{1,3,2,6,5,4\},$$

$$A = \{1,4\}, \quad B = \{2,3,5\},$$

则 $$\overline{A} = \{2,3,5,6\}, \quad \overline{B} = \{1,4,6\}.$$

例 5 集合

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},$$

$$B = \{x; x \text{ 是 6 的约数}\},$$

$$C = \{x; x \text{ 是 8 的约数}\}.$$

求集合 $\overline{B}, \overline{C}, \overline{B} \cap \overline{C}, \overline{B} \cup \overline{C}, \overline{B \cap C}, \overline{B \cup C}$.

解 因为 6 的约数有 1,2,3,6，所以

$$B = \{1,2,3,6\}.$$

因为 8 的约数为 1,2,4,8，所以

$$C = \{1,2,4,8\},$$

显然 $B\subseteq A, C\subseteq A$（如图 1-6）.

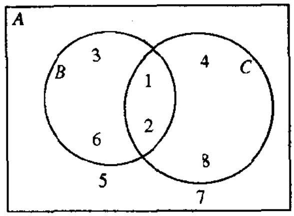


图 1-6

如果把 A 叫做全集，则

$$\overline{B}=\{4,5,7,8\},$$
$$\overline{C}=\{5,7,3,6\},$$
$$\overline{B}\cap\overline{C}=\{5,7\},$$
$$\overline{B}\cup\overline{C}=\{5,7,3,4,6,8\},$$
$$\overline{B\cap C}=\{3,4,5,6,7,8\},$$
$$\overline{B\cup C}=\{5,7\}.$$

由例 5 的计算中，我们发现：

(1) $\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}$；

(2) $\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{B\cap C}$.

这只是一个特例，一般情况下，上述等式是否成立呢？请同学们自己举例验证一下.

四、包含和排除原理

我们先看一个例题.

例 6　某班同学有 40 人爱打乒乓球，27 人爱踢足球，有 22 人既爱打乒乓球又爱踢足球，试求全班同学中爱打乒乓球和爱踢足球的总人数是多少？

分析与解　如果你简单地把喜爱这两种运动的人数直接加起来，得 $40+27=67$（人），那就错了，因为，这样就把两种运动都喜欢的人重复计算了.

实际上,这个问题涉及到两个集合的并集中的元素个数的计算问题.

如果有集合 $M=\{2,3,5\}$,我们约定 $|M|$ 表示集合 M 中元素的个数,则 $|M|=3$.

在例 6 中,我们设集合

$$A=\{爱打乒乓球的同学\};$$
$$B=\{爱踢足球的同学\};$$
$$A\cap B=\{爱打乒乓球又爱踢足球的同学\};$$
$$A\cup B=\{爱打乒乓球或爱踢足球的同学\}.$$

那么,由已知有

$$|A|=40(人),\quad |B|=27(人),\quad |A\cap B|=22(人).$$

但 $|A\cup B|$ 等于什么呢?

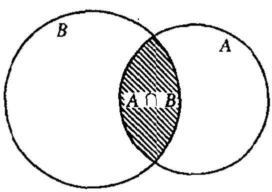


图 1-7

我们看图 1-7,易知:要求 A,B 两个集合的并集,可以先把这两个集合的元素写在一起,再去掉重复的元素(即交集中的元素).因此,并集的元素的个数有如下的公式:

$$\begin{aligned}A,B\text{ 并集元素的个数}=&A\text{ 中元素的个数}\\&+B\text{ 中元素的个数}\\&-A,B\text{ 交集中元素的个数},\end{aligned}$$

所以,在例 6 中,

$$|A\cup B|=40+27-22=45(人).$$

在解答例 6 中,我们应用了一个非常重要的数学原理,就是"包含排除原理",简称"容斥原理".

对于两个集合来说,容斥原理就是:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

例 7 求不超过 20 的自然数中,是 2 的倍数或是 3 的倍数的数的个数.

分析与解 设 $I=\{1,2,3,4,5,\cdots,18,19,20\}$,

$$A=\{I\text{ 中的 2 的倍数}\},\quad B=\{I\text{ 中的 3 的倍数}\}.$$

这道题所求的就是：A 和 B 的并集 $A\cup B$ 中元素的个数，即求 $|A\cup B|$.

由于

$$A=\{2,4,6,\cdots,18,20\}$$

中共有 10 个元素，即 $|A|=10$，

$$B=\{3,6,9,12,15,18\}$$

中共有 6 个元素，即 $|B|=6$，

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{I\text{ 中既是 2 的倍数又是 3 的倍数}\}\\&=\{6,12,18\}\end{aligned}$$

中共有 3 个元素，即 $|A\cap B|=3$. 所以根据容斥原理

$$\begin{aligned}|A\cup B|&=|A|+|B|-|A\cap B|\\&=10+6-3=13,\end{aligned}$$

即 $A\cup B$ 中共有 13 个元素. 用列举法表示：

$$A\cup B=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}.$$

我们还可以用图示的方法来解此题. 设在图 1-8 中，圆 A 中放的是不超过 20 的自然数中 2 的倍数的全体；圆 B 中放的是不超过 20 的自然数中 3 的倍数的全体，其阴影部分的数既是 2 的倍数又是 3 的倍数的自然数，那么只要数一数集合 $A\cup B$ 中数的个数，就得出解答了.

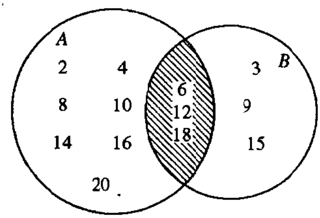


图 1-8

请同学们自己数一数.

例 8 某班统计考试成绩，数学得 90 分以上的有 25 人，语文得 90 分以上的有 21 人，两科中至少有一科在 90 分以上的有 38 人，试问两科都在 90 分以上的有多少人？

分析与解 如果设

$$A=\{\text{数学得 90 分以上的人}\},$$

$$B=\{\text{语文得 90 分以上的人}\},$$

那么

$$A\cup B=\{\text{两科中至少有一科在 90 分以上的人}\},$$

$$A\cap B=\{\text{两科都在 90 分以上的人}\}.$$

本题所求的就是 $A\cap B$ 中元素的个数,即 $|A\cap B|$.

由已知有

$$|A|=25(\text{人}),\quad |B|=21(\text{人}),\quad |A\cup B|=38(\text{人}).$$

根据容斥原理:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

易知

$$\begin{aligned}|A\cap B|&=|A|+|B|-|A\cup B|\\&=25+21-38=8(\text{人}).\end{aligned}$$

答 两科都在 90 分以上的同学有 8 人.

注意 本例中,是灵活应用了容斥原理:在已知 $|A|$,$|B|$,$|A\cup B|$ 的条件,求 $|A\cap B|$.

下面介绍三个集合 A,B,C 的容斥原理:

设给定三个集合 A,B,C,要计算 $A\cup B\cup C$ 中元素的个数,可按下面程序进行:

(1) 先求 $|A|+|B|+|C|$;

(2) 减去 $|A\cap B|$,$|B\cap C|$,$|A\cap C|$;

(3) 再加上 $|A\cap B\cap C|$.

即有以下公式:

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|=&|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|\\&-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.\end{aligned}$$

参看图 1-9,这个公式可做如下解释:要求 $|A\cup B\cup C|$,当求出 $|A|+|B|+|C|$ 时,这个"和"已经把 $|A\cap B|$,$|B\cap C|$,$|A\cap C|$ 重复计算了两次,因此应该由这个和中分别减去一次,即得

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|.$$