现代数学丛书

齐性空间微分几何学

谷 超 豪 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

齐性空间微分几何学

谷 超 豪 著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是現代数学丛书中的一种，系統地反映了作者和复旦大学微分几何組近年来在齐性空間研究中所取得的成果，有些結果尙属初次发表. 全书是从局部的观点来写作的，內容包括七章和一个附录. 第一章介紹張量代数和綫性群的基本概念，第二章介紹本书所用的分析工具——外微分形式，第三章用外形式法介紹局部李群的基本定理，第四章闡述李代数的某些性质以及綫性群和綫性李代数的关系，第五章闡述齐性空間的一般性质，第六章是本书的中心，从迷向群和齐性空間的关系来研究齐性空間的构造，第七章討論对称空間的基本性质. 在附录中，介紹了用整体观点来看本书內容的若干注意，并补充了一些說明. 供高等学校数学系高年級学生、研究生及这方面的数学工作者参考.

現代数学丛书

齐性空間微分几何学

谷 超 豪 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 10　排版字数 227,000
1965年3月第1版　1965年3月第1次印刷
印数 1—4,500（其中精装本300册）

統一书号 13119·630　定价(科六) 1.50 元

序

本书是以复旦大学微分几何专門組的教材和研究生的学习資料为基础，加以适当的修改和增补而成．全书是从局部的观点来写作的，又尽可能地介紹了一些必需的預备材料，使得讀者在掌握了大学的基础課程并对張量分析和黎曼几何学有初步的了解之后，就可以閱讀本书．

齐性空間微分几何学的內容現在已相当充实，除 E. Cartan 的工作外，也出現了不少的专著．本书不准备全面地叙述这一方面的最近成果，我們的目的在于：一、介紹若干基本工具和方法；二、着重討論迷向群和齐性空間(特别是齐性黎曼空間)之間的关系，因为弄清楚这一关系就能对齐性空間(特别是齐性黎曼空間)提供一个重要的研究途徑．本书的一部分內容是复旦大学微分几何組近年来科学研究的成果，有些結果尙未发表过．

全书分七章和一个附录．第一章介紹張量代数，引出張量在綫性变换下不变的概念，导出各种典型群．在这一章中对于实綫性群的实不可約性和复不可約性之間的关系也予以一定的注意．第二章介紹本书的分析工具——外微分形式，这里所涉

及的只是一些最基本的內容，除基本运算外，我們着重于完全可积的法甫方程組和特征系統的理論．第三章用外形式法介紹局部李群的基本定理，叙述子群的构成，变换群微分算子的构造等．第四章除給出綫性群和綫性李代数的关系外，还对李代数的某些基本事項作了介紹，对于旋轉群的李代数的某些性质，特别是交换矩陣的决定作了較完备的叙述．第五章中介紹齐性空間的活动标形法，初步地提出了迷向群和空間本身性质的一些关系，并簡单地介紹了几何对象場运动群的理論．这一章的若干內容是在 E. Cartan 的无限連續变换群理論的影响下写成的，虽然它本身并不牽涉到无限連續变换群．这些內容对第六章也产生一定的作用．第六章是本书中篇幅最多的部分，除了簡略地介紹齐性黎曼空間（正定）的一般性质之外，重点在于研究齐性黎曼空間的构造，我們特别注意迷向群具不变向量場的情形，由于发現了群的某些結构常数的几何意义而使得对这类空間的决定在一定的意义下趋向完备．在这一章中并对黎曼空間的运动群的参数的“空隙性”問題作了分析．由 Fubini 开始发現，后来由王宪鍾，Егоров 等人所继續研究的“空隙性”現象已有了較完善的解釋．当空間維数 n 大时，我們指出制作逐次空隙的途徑，并指出各种运动群参数較大时的具体綫素．在这一章中我們还討論了不可迁运动群，相似变换群，仿射变换群，共形变换群．这些論述表明，上述变换群的研究最終都可归結于对齐性黎曼空間的研究．第七章中介紹对称黎曼空間的基本性质，并指出它在迷向群为不可約的齐性黎曼空間中的地位．在附录中，我們介紹了用整体的观点来看本书的对象时的若干注意点，对各个术語的意义作了补充的說明．

由于作者水平所限，最近几年来对数学这一分支的注意也很少，本书的缺陷一定很多，請各方面的同志們多加指正．

本书的初稿是作者在 1959 年至 1960 年写成的，当时曾将內容讲授过一次．胡和生同志后来又对初稿作了相当的增补，并讲授过二次．在这一年来，对內容又重新作了全面的整理，研究生沈純理同志也帮助做了不少的整理工作，此外，研究生張爱和同志，蕭尔健同志，应紹箕同志和五年級微分几何专門組的同学也都帮了很多的忙，特向上述的同志們致謝．

最后，还要特别感謝苏步青教授对本书的写作所給予的热情支持和督促．

谷 超 豪

复旦大学

目　　录

第一章　張量. 綫性群

§1·1 張　量

我們經常要用到复数域和实数域上有限維的綫性空間，在本章中将叙述若干有关綫性空間的預备知識，介紹綫性空間中的張量运算. 我們的論述从复数域上綫性空間的張量运算开始.

設 P_n 是一个 n 維的复向量空間，用 x, y 表其中的元素. 在引入一般張量之前，我們先討論 P_n 上的綫性函数. 如所知，P_n 上的綫性函数是定义在 P_n 上的复値函数 $f(x)$，它滿足

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y), \qquad (1\cdot1\cdot1)$$

这里 x, y 为 P_n 中的任意两个元素，λ, μ 为任意两个复数.

設在 P_n 中已选好一組基 e_1, e_2, $\cdots$, e_n；P_n 中的任一元素 x 可写成

$$x=\sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^i e_i$$

(在本书中我們对和式将采取省略的記法，即对上下指标重复的和式，一概略去記号 $\sum$). 式中的 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为向量 x 对应于

这一組基的坐标．又若

$$f(e_i)=f_i, \tag{1·1·2}$$

綫性函数 $f(x)$ 可用向量 x 的坐标的齐一次式表示，即

$$f(x)=f(x^ie_i)=x^if(e_i)=f_ix^i. \tag{1·1·3}$$

空間 P_n 的綫性函数的全体也組成一个 n 維的綫性空間，称为 P_n 的共軛空間，記为 P_n^*.

对应于 P_n 的一組已給的基 $\{e_i\}$，在 P_n^* 中也可选出 n 个元素 e^i $(i=1, 2, \cdots, n)$，使

$$e^i(e_j)=\delta^i_j, \tag{1·1·4}$$

这里

$$\delta^j_i=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

容易見到，e^i 也构成 P_n^* 的一組基，它称为 P_n 的基 $\{e_i\}$ 的对偶基．基 $\{e_i\}$ 也称为 P_n 的一个标形，因此对偶基 $\{e^i\}$ 也称为标形 $\{e_i\}$ 的对偶标形．当空間 P_n 的基 $\{e_i\}$ 改变为 $\{e'_i\}$ 时，如

$$e'_i=a^j_ie_j, \tag{1·1·5}$$

那末对偶基 $\{e^i\}$ 也要变为 $\{e'^i\}$．依据

$$e'^i(e'_j)=e'^i(a^l_je_l)=a^l_je'^i(e_l)=\delta^i_j$$

可知，

$$e'^i=\tilde{a}^i_he^h, \tag{1·1·6}$$

这里 $\tilde{a}^i_j$ 为非异方陣 (a^i_j) 的逆陣的一般元素[1]，而 a^i_j 常表陣 (a^i_j) 中第 i 行第 j 列的元素．

在基变换 (1·1·5) 之下，向量 x 的坐标从 $(x^1, \cdots, x^n)$ 变为 $(x'^1, \cdots, x'^n)$，而且

$$x^i=a^i_jx'^j, \quad x'^i=\tilde{a}^i_jx^j. \tag{1·1·7}$$

参考于对偶标形 $\{e^i\}$，任一 P_n 的綫性函数 f 依 (1·1·2), (1·1·4) 可写作

---

[1] 今后我們对逆陣的元素均以記号～表示．

$$f=f_i e^i, \tag{1·1·8}$$

这里的 f_i 就是 f 参考于标形 $\{e^i\}$ 的坐标．当标形 $\{e^i\}$ 依 (1·1·6) 改变为 $\{e'^i\}$ 时，我們也有

$$f'_i=a_i^j f_j, \quad f_i=\tilde{a}_i^j f'_j. \tag{1·1·9}$$

联系于綫性空間 P_n，除 P_n^* 外，还有一系列其他的綫性空間．我們要举出其中相当广泛的一类，这就是在 P_n 上的各种張量所成的空間，P_n^*，甚至 P_n 本身都可以視为它的特殊情形．关于張量的討論，在微分几何学和群論中都是很基本的．

先定义任意两个綫性空間的"張量积"．設 $\underset{1}{P_n}$ 和 $\underset{2}{P_m}$ 为任意两个复向量空間，設 $\underset{1}{P_n}$ 中有一組基 $\underset{1}{e_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$\underset{2}{P_m}$ 中有一組基 $\underset{2}{e_\alpha}$ $(\alpha=1, 2, \cdots, m)$，形式上作元素 $e_{i\alpha}=(\underset{1}{e_i}, \underset{2}{e_\alpha})$，又作形状为 $\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha}$ 的元素的全体，記为 P_{nm}，并規定

1.　$$\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha}+\mu^{i\alpha}e_{i\alpha}=(\lambda^{i\alpha}+\mu^{i\alpha})e_{i\alpha}, \tag{1·1·10}$$

2.　$$\lambda(\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha})=(\lambda\lambda^{i\alpha})e_{i\alpha}, \tag{1·1·11}$$

3.　$\lambda^{i\alpha}e_{i\alpha}=\mu^{i\alpha}e_{i\alpha}$ 的充要条件是 $\lambda^{i\alpha}=\mu^{i\alpha}$.　(1·1·12)

显然可見，P_{nm} 构成一个綫性空間，維数为 $n\times m$ 且具有基 $e_{i\alpha}$．这样制作的空間 P_{nm} 称为空間 $\underset{1}{P_n}$ 和 $\underset{2}{P_m}$ 的"張量积"．按定义来看，"張量积"的形式似乎和空間 $\underset{1}{P_n}$，$\underset{2}{P_m}$ 的基的选擇有关，但是，如果在 $\underset{1}{P_n}$ 中选基 $\underset{1}{e'_i}=a_i^j\underset{1}{e_j}$，在 $\underset{2}{P_m}$ 中选基 $\underset{2}{e'_\alpha}=b_\alpha^\beta\underset{2}{e_\beta}$，形式地作出 $e'_{i\alpha}=(\underset{1}{e'_i}, \underset{2}{e'_\alpha})$，再規定 $e'_{i\alpha}=a_i^j b_\alpha^\beta e_{j\beta}$，我們就能把所作出的張量积空間等同于依基 $\underset{1}{e_i}$，$\underset{2}{e_\alpha}$ 所作出的空間，因而"張量积"的形成就不再依賴于基的选擇了．同样，我們也可以作出若干个綫性空間的張量积．

特别，我們取 a 个 P_n，b 个 P_n^* 作張量积 (a, b 非負整数)，并且各个 P_n 的标形均选为同一的 $\{e_i\}$，而各个 P_n^* 的标形选为

$\{e_i\}$ 的对偶标形 $\{e^i\}$，那末这張量积空間为 $n^{(a+b)}$ 維的，它的基为 $e^{j_1j_2\cdots j_b}_{i_1i_2\cdots i_a}$．当标形 $\{e_i\}$ 进行变换 $(1\cdot1\cdot5)$ 时，基变化的規則为

$$e'^{j_1j_2\cdots j_b}_{i_1i_2\cdots i_a}=a^{k_1}_{i_1}a^{k_2}_{i_2}\cdots a^{k_a}_{i_a}\tilde{a}^{j_1}_{l_1}\tilde{a}^{j_2}_{l_2}\cdots\tilde{a}^{j_b}_{l_b}e^{l_1l_2\cdots l_b}_{k_1k_2\cdots k_a}. \qquad (1\cdot1\cdot13)$$

这个空間的元素称为 a 阶反变，b 阶共变的張量，它們可表为

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a} \qquad (1\cdot1\cdot14)$$

的形状．$n^{(a+b)}$ 个数 $T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$ 称为这張量在标形 $\{e_i\}$ 下的支量．在选好标形后，一張量由其支量所完全确定．依据 $(1\cdot1\cdot13)$ 和 $(1\cdot1\cdot12)$，可以求出当 P_n 的基 e_i 作改变时，張量的支量的变换規律．事实上，由于

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a}=T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}e'^{l_1\cdots l_b}_{k_1\cdots k_a}=T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_a}_{k_a}\tilde{a}^{l_1}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{l_b}_{j_b}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a},$$

就得出

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_a}_{k_a}\tilde{a}^{l_1}_{j_1}\cdots\tilde{a}^{l_b}_{j_b}. \qquad (1\cdot1\cdot15)$$

同样也有

$$T'^{k_1\cdots k_a}_{l_1\cdots l_b}=T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}\tilde{a}^{k_1}_{i_1}\cdots\tilde{a}^{k_a}_{i_a}a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_b}_{l_b}.$$

对一固定类型的張量来說，它的全体組成复数域上的向量空間，因而它有加法以及同复数的乘法这两种代数运算．此外，由二張量所成的綫性空間可再作它們的張量积，例如 a 阶反变，b 阶共变的張量所成的空間和 c 阶反变，d 阶共变的張量所成的空間的張量积为 $a+c$ 阶反变，$b+d$ 阶共变的張量空間，它的基可选为

$$e^{j_1\cdots j_bj_{b+1}\cdots j_{b+d}}_{i_1\cdots i_ai_{a+1}\cdots i_{a+c}}.$$

当 $b=0$，$a>0$ 时，我們得到 a 阶的反变張量；当 $a=0$，$b>0$ 时，我們得到 b 阶的共变張量，特别当 $b=1$ 时，我們得到 P^*_n 空間中的元素，也称为共变向量．有时空間 P_n 中的元素也称为反变向量．它們都是一阶的張量．为方便計，我們有时把复数本身也理解为 0 阶的張量，并称之为数量．

b 阶的共变張量可理解为 P_n 中的 b 綫性函数，所謂 b 綫性

函数就是依賴于 P_n 中 b 个元素的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_b)$ $(x_1 \in P_n, \cdots, x_b \in P_n)$，它关于每一向量 $x_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, b)$ 均为綫性的．

§ 1·2 綫性变换．綫性变换群

如所知，复向量空間 P_n 到自身的一个对应 $\boldsymbol{A}$ 如具有下述性质：

$$\boldsymbol{A}(\lambda x+\mu y)=\lambda \boldsymbol{A} x+\mu \boldsymbol{A} y \quad (x, y \in P_n, \lambda, \mu \text{ 复数}), \tag{1·2·1}$$

則称它为綫性变换．設 $\{e_i\}$ 为空間 P_n 的一組基，綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 可由它作用于基向量 e_i 的象所完全确定．事实上，設

$$\boldsymbol{A} e_i=\alpha_i^j e_j, \tag{1·2·2}$$

那末

$$\boldsymbol{A} x=\boldsymbol{A} x^i e_i=x^i \boldsymbol{A} e_i=\alpha_i^j x^i e_j. \tag{1·2·3}$$

由这个式子也可以知道，綫性变换可以由

$$\tilde{x}^i=\alpha_j^i x^j \tag{1·2·4}$$

来表示，这里 x^i 和 $\tilde{x}^i$ 分别表示变前和变后的向量的坐标．如果把 P_n 的向量的坐标写成单列的矩陣，称为坐标向量，把(1·2·2)的系数 α_j^i 写成 $n\times n$ 方陣 (α_j^i)，那末綫性变换的式子(1·2·4)就表明：在綫性变换下，变后向量的坐标向量为以方陣 (α_i^j) 乘变前向量的坐标向量的結果．在选好标形之后，綫性变换可以利用 $n\times n$ 方陣表示，如果給定了一个 $n\times n$ 方陣，也就可以作出一个綫性变换，二者之間的对应是一对一的．

应該注意到，綫性变换和矩陣的对应是依賴于基的选取的，如果基有所改变，即取基 $e_i'=a_i^j e_j$ 时，

$$\boldsymbol{A} e_i'=a_i^j \boldsymbol{A} e_j=a_i^j \alpha_j^k e_k=a_i^j \alpha_j^k \tilde{a}_k^l e_l', \tag{1·2·5}$$

所以表示变换的 $n\times n$ 方陣即为与 (α_i^j) 相似的

$$(\alpha_j'^i)=(\tilde{a}_k^i)(\alpha_i^k)(a_j^h). \tag{1·2·6}$$

綫性变换 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的和与积是依下述公式定义的：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})x=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}x, \tag{1·2·7}$$

$$(\boldsymbol{AB})x=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}x). \tag{1·2·8}$$

也可以依

$$(\lambda\boldsymbol{A})x=\lambda\boldsymbol{A}x \quad (\lambda\text{ 复数}) \tag{1·2·9}$$

定义复数和綫性变换的乘积．在选好一个标形后，这些运算对应于相应的方陣間的加法，乘法以及复数和方陣相乘等运算，即若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 对应方陣 (α^i_j)，(β^i_j)，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 对应方陣 $(\alpha^i_j)+(\beta^i_j)=(\alpha^i_j+\beta^i_j)$，$\boldsymbol{AB}$ 对应方陣 $(\alpha^i_j)(\beta^i_j)=(\alpha^i_j\beta^j_k)$，$\lambda\boldsymbol{A}$ 对应方陣 $\lambda(\alpha^i_j)=(\lambda\alpha^i_j)$．

一对一的綫性变换称为非异的，它們对应非异的方陣．两个非异的綫性变换的乘积仍然是非异的綫性变换，非异的綫性变换的逆变换也存在，且为非异的．因而非异的綫性变换的全体构成一群，称为空間 P_n 的完全綫性群，記为 $GL(n, C)$．完全綫性群的任何子群就称为綫性变换群或簡称綫性群．

当 P_n 中作用一非异的綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 时，我們要求在 P^*_n 中的一个相应的綫性变换 $\boldsymbol{A}^*$，使得綫性函数 $f(x)$ 的值保持不变，也就是說，能使 $(\boldsymbol{A}^*f)(\boldsymbol{A}x)=f(x)$．为此只須考虑 $x=e_i$, $f=e^j$，我們有

$$(\boldsymbol{A}^*e^j)(\alpha^k_ie_k)=e^j(e_i)=\delta^j_i,$$

或者

$$\alpha^k_i(\boldsymbol{A}^*e^j)(e_k)=\delta^j_i.$$

把 (α^k_i) 的逆方陣記为 $(\tilde{\alpha}^k_i)$，那末就有

$$(\boldsymbol{A}^*e^j)(e_k)=\tilde{\alpha}^j_k=\tilde{\alpha}^j_ie^i(e_k).$$

因此得到

$$\boldsymbol{A}^*e^j=\tilde{\alpha}^j_ie^i. \tag{1·2·10}$$

这样的綫性变换称为 P_n 中的綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 在 P^*_n 中誘导出来的

綫性变换．如記 $f=f_ie^i$，那末 $\boldsymbol{A}^*f=f_i\tilde{\alpha}^i_je^j$，所以 f 的变后元素的坐标

$$\tilde{f}_i=\tilde{\alpha}^j_i f_j, \tag{1·2·11}$$

依据(1·2·11)和(1·2·4)，我們就有

$$\tilde{f}_i\tilde{x}^i=\tilde{\alpha}^j_i f_j\alpha^i_k x^k=f_ix^i. \tag{1·2·12}$$

这說明，当綫性变换和其誘导的变换同时作用时，P_n 上的綫性形式就不起变化．事实上，这也就是引入誘导的变换的出发点．

同一思想可用之于任意的張量空間．当 P_n 中作用綫性变换 $\boldsymbol{A}$ 时，在 a 阶反变，b 阶共变的張量空間中也誘导出一个綫性变换，記为 $\boldsymbol{A}_{(a,b)}$，它是依下式定义的：

$$\boldsymbol{A}_{(a,b)}e^{j_1\cdots j_b}_{i_1\cdots i_a}=\alpha^{l_1}_{i_1}\cdots\alpha^{l_a}_{i_a}\tilde{\alpha}^{j_1}_{k_1}\cdots\tilde{\alpha}^{j_b}_{k_b}e^{k_1\cdots k_b}_{l_1\cdots l_a}. \tag{1·2·13}$$

对于張量的支量来說，就有

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=\alpha^{i_1}_{l_1}\cdots\alpha^{i_a}_{l_a}\tilde{\alpha}^{k_1}_{j_1}\cdots\tilde{\alpha}^{k_b}_{j_b}T^{l_1\cdots l_a}_{k_1\cdots k_b}. \tag{1·2·14}$$

这样的变换，在 n^{a+b} 維空間（$a+b>1$）来看，是完全綫性群 $GL(n^{a+b}, C)$ 的一个子群，但它和 $GL(n, C)$ 同构．

如果 G 是任意一个綫性群，$T=T^{l_1\cdots l_a}_{k_1\cdots k_b}e^{k_1\cdots k_b}_{l_1\cdots l_a}$ 为任一張量，若对群 G 中的任一元素 g，所誘导出的綫性变换 $\boldsymbol{A}_{(a,b)}$ 常能满足

$$\boldsymbol{A}_{(a,b)}T=T, \tag{1·2·15}$$

这就是，依(1·2·14)所定义的 $\tilde{T}^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}$ 常满足

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}=T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}, \tag{1·2·16}$$

那末就称張量 T 在群 G 下为不变．

§ 1·3　典型群及其几何学

变换群和几何学有密切的关系，古典的几何空間往往都联系于一定的变换群，而空間的几何性质，就是群的不变性质，这便是 F. Klein 所提出的观点(見 F. Klein[1])．

如果用这样的观点来看綫性空間，那末它所联系的变换群

便是完全綫性群．在完全綫性群下不变的基本性质是向量之間的綫性相关关系，的确，这种关系是綫性空間的一項根本性质．

許多重要的空間联系于完全綫性群的子群．我們在这里要介紹复欧氏空間和复辛空間，它們所对应的子群是使某些二阶共变張量或双綫性形式不变的群．

双綫性形式 $f(x, y)$ 如满足

$$f(x, y)=f(y, x) \quad (x\in P_n,\ y\in P_n), \tag{1·3·1}$$

就称它为对称的；又如果 $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y)=-f(y, x), \tag{1·3·2}$$

則称它为反称的；又如果不存在 x $(x\neq 0)$ 使

$$f(x, y)=0$$

对任何 y 成立，那末 $f(x, y)$ 称为满秩的．在选好标形 $\{e_i\}$ 之后，双綫性形式 $f(x, y)$ 可写成

$$f(x, y)=g_{ij}x^iy^j \quad (g_{ij}\text{ 复数}), \tag{1·3·3}$$

那末，$f(x, y)$ 为对称的充要条件是

$$g_{ij}=g_{ji}; \tag{1·3·4}$$

$f(x, y)$ 为反称的充要条件为

$$g_{ij}=-g_{ji}; \tag{1·3·5}$$

又 $f(x, y)$ 满秩的充要条件为

$$\det|g_{ij}|\neq 0. \tag{1·3·6}$$

現在我們討論复欧氏向量空間．一个复 n 維向量空間，如再带有一个满秩的对称的双綫性形式 $f(x, y)$，用来定义空間中每两向量 x, y 的数量积，那末这空間就称为复欧氏向量空間．在这样的空間里，我們称 $f(x, x)$ 为向量 x 的“长度”的平方（它可能不是非負实数），长度平方为 1 的向量称为单位向量．又两个向量 x, y 如满足

$$f(x, y)=0,$$

则称它們为直交的．如有两子空間 K, L, 又 K 中任一向量和 L 中任一向量直交，則称子空間 K, L 为直交的．又空間中的一标形，如果它的基为单位向量，又相互直交，那末就称这标形为直交規范的．在不致发生誤会的情况下，也往往就簡称为直交标形．

現証明

定理 1 复欧氏向量空間中必存在直交規范标形．

首先可見，必存在向量 e, 使 $f(e, e)=c_1\neq 0$. 事实上，如 $f(x, x)=0$ 对所有 x 成立，那末对任何一对向量 x, y, 成立

$$f(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)=\lambda^2 f(x, x)+2\lambda\mu f(x, y)+\mu^2 f(y, y)$$
$$=2\lambda\mu f(x, y)=0,$$

这和 $f(x, y)$ 为满秩这一个假定矛盾．选

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{c_1}}e,$$

那末就有 $f(e_1, e_1)=1$. 現假設已选好 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ $(m<n)$, 使

$$f(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta=1, 2, \cdots, m), \tag{1·3·7}$$

而要証明

$$f(e_\alpha, x)=0 \tag{1·3·8}$$

必有解，它能满足 $f(x,x)\neq 0$. 为此，先注意到任意向量 y 必可书为 $y=\underset{1}{y}+\underset{2}{y}$, 于此 $\underset{1}{y}$ 为 e_α 的綫性組合，而 $\underset{2}{y}$ 满足 (1·3·8) 式．事实上，令 $c^\alpha=f(e_\alpha; y)$, 令 $\underset{1}{y}=c^\beta e_\beta$, $\underset{2}{y}=y-c^\beta e_\beta$, 那末

$$f(e_\alpha, \underset{2}{y})=f(e_\alpha, y-c^\beta e_\beta)=f(e_\alpha, y)-c^\beta f(e_\alpha, e_\beta)=0.$$

現应用反証法．如果所有满足 (1·3·8) 的向量均成立 $f(x, x)=0$, 那末当 x, y 满足 (1·3·8) 式时，$\lambda x+\mu y$ 也满足 (1·3·8) 式，所以有