现代数学

集合与映射、近世代数、拓扑、测度

（第一卷）

R. 罗 曼 著

高金衡 陈浩球
韦博成 张元林 译

江苏科学技术出版社

现代数学

集合与映射、近世代数、拓扑、测度

（第一卷）

P. 罗曼 著
高金衡 陈浩球
韦博成 张元林 译

江苏省科学技术出版社

Paul Roman

Some Modern Mathematics For physicists and Other Outsiders

根据美国«Pergamon»出版有限公司1975年版翻译

现 代 数 学

集合与映射、近世代数、拓扑、测度

（第一卷）

P. 罗 曼 著

高金衡 陈浩球 韦博成 张元林 译

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：沭 阳 县 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 16.125 字数 342,500

1986 年 9 月第 1 版 1986 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2,810 册

书号 13196·207 定价 3.05 元

责任编辑 沈绍绪

译　　序

本书作者P. 罗曼(匈牙利人)是当代著名物理学家，1960年起在美国Boston大学任物理学教授，从事基本粒子、量子理论、场论以及数学物理等方面的研究。他曾写过《基本粒子理论》、《高等量子理论》、《量子场论》等公认的名著。他根据研究的需要写成本书，作为理论物理学家(特别是从事量子理论、高能物理、相对论以及近代统计物理等方面的工作者)、研究工程师以及某些从事结构研究(例如系统分析)的科学工作者必须掌握的一些现代数学内容。作者站在物理学家的角度，从抽象集合的结构与变换的统一观点出发，把现代数学中的重要内容，如近世代数、拓扑学、测度与积分理论、泛函分析等基本理论作了深入浅出的介绍。书中附有大量的有启发性的问题，书末不仅列出有关参考文献，而且附有作者对这些文献的评论。全书文笔流畅，说理清楚，脉络分明，直观性强，便于阅读。阅读本书只需具有微积分的基础和一定的数学素养。

本书可作为综合性大学和师范院校数学系高年级学生、物理系研究生，工科院校的有关研究生、应用数学专业某些课程的教材或教学参考书。

全书分为两卷译出。第一卷由高金衡、陈浩球、韦博成、张元林四同志翻译。其中序言、第三章及第四章由高金衡同志

翻译，第七章、第八章由陈浩球同志翻译，第五章、第六章由韦博成同志翻译，第一章、第二章及附录Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ由张元林同志翻译。在互校的基础上，最后由高金衡同志总校。译文力求符合原意，注意译文的准确性与文字的简洁易懂。但由于水平所限，谬误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

译　者

1982年5月

说明：因缺少六号草体铅字，在习题及注中与正文相应的草体均用斜体字母代替。如

$\mathscr{A}$—A，$\mathscr{B}$—B，$\mathscr{C}$—C，$\mathscr{D}$—D，$\mathscr{E}$—E，

$\mathscr{F}$—F，$\mathscr{H}$—H，$\mathscr{I}$—I，$\mathscr{K}$—K，$\mathscr{L}$—L，

$\mathscr{M}$—M，$\mathscr{N}$—N，$\mathscr{P}$—P，$\mathscr{R}$—R，$\mathscr{S}$—S，

$\mathscr{T}$—T，$\mathscr{U}$—U，$\mathscr{V}$—V，$\mathscr{Y}$—Y。

序　言

在当前出版物迅速增长的时代，一本新书的出版，如果没有充分的材料说明出版该书的必要性，在序中都必须首先做一些解释。尤其当作者冒险进入一个不是他原来擅长的学科领域时，这一点尤为重要。就本书而论，我的解释十分简单，在从事多年基本粒子理论及有关领域的研究工作之后，我认识到我的“标准”数学水平，不能使我跟上理论物理现代发展的步伐。有了这个认识之后，我就在堆积如山的现有文献中发掘那些我所需要的概念与方法，没有它们，我就不可能继续出新的成果。这是一个长时间艰苦的研究过程。我也意识到我的研究生们应当从这个艰苦的工作中解放出来，因此介绍了这门新的一学年的课程，委婉一点说，这门课程可以称之为“现代数学”。这样就产生了本教材。

很明显，在对代数学、拓扑学、测度理论以及泛函分析的有关篇章进行实用的介绍时，如果不把它们的某种中心思想统一起来，并在陈述时，注意使学习这类材料的艰苦工作不仅有用而且真正有趣，就不会达到什么实用的目的。在现代数学中，这种统一观点很自然地表现为对结构的研究。当然，将来有相当多的读者急于尽快地掌握有用的工具而不是需要美的享受。因此，我努力在对结构的研究和实用的定理与方法之间保持恰当的平衡。这一点，我相信是本书与其它由数学专

家或理论物理专家们写的许多书的不同点之一。另一个同等重要的特点，是我完全从零开始，而且对于高度精致及复杂的材料，力图从初等概念清楚地讲起。要想成功地使用这本书，唯一的要求是要有基本微积分的水平。如再懂得一点线性代数（也许还需要一些不太初等的古典分析的知识）将更有帮助，但这不是主要的。

很自然，在一定程度上讲，这本书在选材上也具有特点。开始几章的材料。在以后几乎全部要用到，而且各部分之间有很强的连续性。细心的读者将会发现论述与例子有时有重复，而不要求读者去参考以前的内容。这样做的目的是为了减轻学生的工作量。

我坚持从一般到特殊的讨论方法，这不仅是为了与现代数学的精神相一致，同时也为了使内容易于消化。这与那种先讲例子后讲特殊情况，再建立一般理论的方法相比，用现在的方法提供的知识，就更加稳固而耐久了。

另一方面，我不准备如同大多数专门数学教材那样系统地按照“定义—引理—定理—证明—推论—注记”的程序来进行论述。特别在开始几章，许多定理没有正式加以叙述，而是从一系列观察中引出定理，而不是先叙述定理再详细证明。其次，许多定理（即使某些重要定理）述而不证，特别是那些不标准的，很长的或有高度技巧的证明都略去。从第四章以后，内容的严格性与叙述的严谨性都加强了，因此在格调上有些不均匀。这是从教学法方面考虑决定的。因为我认为对于尚无经验的读者来讲，开始时应当免掉那些有点枯燥的正式推理系统。而在抓住基本结构的特点方面，应该有较快的进展。

我相信本书将能满足大多数理论物理学家（特别是在量

子理论、高能物理、相对论、近代统计物理方面有兴趣的人)、研究工程师以及其他研究与结构问题有关的(如系统分析)科学家们的需要。对于这些领域内的学生，本书基本上是研究生水平的教材。对于数学专业的学生，在他们的早期阶段(二年级或三年级水平)，也能从本书得到益处，因为本书对于他们终将要深入学习的标准内容给出了综合的论述。

本书也可用于自学，因为它是自足的，本书实际上是在作者自学过程中产生出来的。对于那些已经通晓某些章节的读者来说，本书可作为参考。对于那些已学过但已忘记了内容的读者，本书可起快速复习的作用。成功的经验证明这本书可以作为两或三学期的教材之用，第三、四两章(以及开始两章的主要内容)可以作为近世代数简要课程或讨论班之用。同样第五、六两章可以作为拓扑学的简明的导引，第七、八两章可作为测度与积分的教材。如果想对泛函分析的基本内容(特别是Hilbert空间理论)轻松地讲一学期，则可以从第九章开始(对于已有准备的读者)到第十二章结束。另加十三章的某些内容。另一方面，对于已经学过 Hilbert 空间运算子理论而想进一步深入学习的人，第十三章可能是一个好的补充。谈到第十二章与第十三章，我愿意指出，由于考虑量子理论的需要，对于定义域的问题以及无界算子的问题，给予了充分的注意。而这方面的内容在许多初等甚至中等水平的教材中，却被不适当地删去了。

由于多种原因，不可能一贯给出“应用”，甚至指出讨论的定理与方法在哪些领域内特别有用或必需都不可能。我知道即使时而提到量子理论，也不能表示出所论概念在物理方面的重要性。然而，这是一本数学方面的书，我热诚希望学生

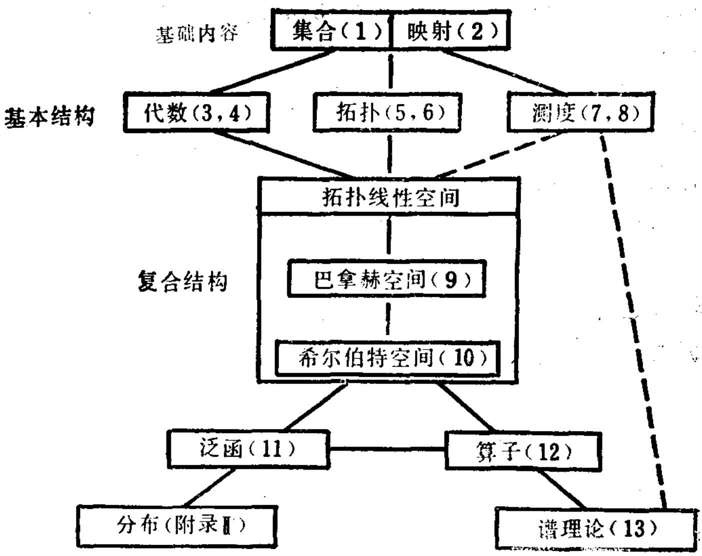
耐心地读完本书以后，能够理解理论物理前沿阵地任何当代论文或书籍，并能有信心地使用那些为扩大从本书所获得的知识所需要的数学原著或专著。

不可避免地，有许多与书中所讨论的内容有同等重要的题材必须完全略去.特别感到遗憾的是略去了拓扑群(特别是李群)及其表示理论的导引．如果起码多写一章非奇异的Fredholm积分方程,则书中所讨论的许多泛函分析内容将可以得到充分验证与直接的运用.如果篇幅允许,象运算子的可换集及其谱表示,可换算子的完备集,Von Neumann代数及其有关问题等都应写进来．同样遗憾的是微分结构完全略掉了．相信有兴趣的读者完全有可能自己去钻研这些问题．附录Ⅲ中附有简明注释的阅读文献，可能有助于进一步学习。

本书的结构

本书各章间的逻辑关系用下表标出，方框内的数字表示各章的号码。

每章分为几节，有些节再分为一个或若干小节．特别在本书的前面部分，每章或每节开始几段可能很长而不标出特别节号(目录表可以帮助查找章节).用符号13.4b表示第十三章第四节小节b等等．定义与定理按照它们所在的小节或节编号,例如定理13.4b(3)表示在小节13.4b中第三个定理,而定义13.4b(3)则表示在同一小节中第三个定义.在一节的开始部分（如果有小节的话,在小节开始之前),则记为定理(或定义)11.2(3)、有时则把相关定理依次表示为定理12.3b



(3a)及12.3b(3b)。图形与表格则按章依次编号，例如图13.3表示第十三章的第三图.方程只有在经常要参考它们或者(特别在本书开始部分)从教学上需要特别注意它们时才予以编号.方程按章依次编号，例如方程(13.4)表示第十三章中第四个编号的方程.有时在证明、例子或简短讨论中，为了使在讨论中便于参考，方程则用希腊字母标出，例如方程(γ)或仅用(γ)表示在附近出现并如此标出的方程．教本中有很多说明的例子，它们在每一小节(或节)中用希腊字母按字母排列的次序标出.例如我们可以指明参考在13.4节中的例γ或13.4a小节中的例α.

对问题要特别加以说明.各章中每一小节，大多数节的开始部分以及有时即使在各章的导引部分都附有经过选择的问

题，例如问题13.4b.8表示在13.4b这一小节末尾的第八个问题，而问题12.2-3则表示第12.2节开始部分（在12.2a小节开始之前）末尾的第三个问题。不必说，问题是本书的整体甚至是有机部分。总数大约有600道以上。我极力鼓励读者去全部完成它们，至少要完成一半（经验证明在一学年之内可以完成）。有一些问题与正文中的例子相类似，它们只是定理或定义的简单说明，而其它许多问题要求读者作深入的理解，并检验自己对以前内容的掌握情况。最后，还有一部分问题是要扩大正文中的内容或者介绍一些新的概念，这些新概念由于这样或那样的原因不便在正文中写出。有时，这些问题引进一些次要的定理然后在正文中要引用，甚至重复引用。在许多问题（不单是较难的问题）中给出了提示，以便解题。这意味着是一种鼓励，开始时最好不要看它而寻求自己的论证。要顺利地解出这些问题，并不需要什么课外读物。

最后说明一下关于参考材料的问题。为了与数学教材的习惯一致（以及由于不可能），不提参考原始发表的材料。但有时当我们略去一个重要定理的证明或者略去其详细内容，我们将提请读者参考某些著作，在那里可以找到详细内容。这样的参考常用如“看Helmberg〔16〕，p.215”的句子表达出来，这是指在书后附录Ⅲ中编号〔16〕的Helmberg的书。有时要参考附录Ⅲ所没有的书，则指出参考书目的全文。

原出版者注：为了方便学生，本书分两卷出版，由于附录Ⅰ在第1卷中没有什么应用，所以把它放到第2卷中去。

导　言

对数学的四种看法：

1.消极派："数学是这样一门科学，在那里，人们不知道说的是些什么，也不知道说的是否正确."（B.RUSSELL）

2.古典学派："数学是那些学科中的一种，它使人们不得不做出决定"，（L.G.DES LAURIERS）.

3.艺术家："数学并非是非计算不可的问题，而是一种庄严的存在：一种无限的回响，谐音和秩序的规律"，（LE CORBUSIER）

4.现代写实派："数学是对某种对象之间的关系的逻辑研究，而不是对它们性质的研究，"（J.DIEUDONNÉ）.

自从Galileo时代以来，普遍公认数学是科学的语言，公认自然的法则可用数学语言表示出来．但是同等重要的（但明显不大被注意）看法是：数学在表示科学思想时也起更基本更有力的作用．这一点可以说数学本身就是表示、比较、描述及构成所有科学与逻辑思想的必要工具．如同E.P.Wigner反复强调那样："数学语言不只是我们所能够说的唯一语言；……从实际意义上讲，数学语言是正确的语言"．实际上人们的脑子似乎不能直接应付客观实际，因此正如H.Eyraud所说的："在继续努力了解自然，掌握并表示自然法则的过程中，人们的思想被引导于构造出一个由符号与运算组成的数学大厦"．

在人类科学思想中，数学这一根本的作用是相当令人吃惊的，甚至是神秘的。如果我们研究一下现代数学家的意图与目的，可能会得到部分的解释，他们的看法是数学的初步目标是研究结构。这个态度仅是在过去五十到七十年中才发展起来的，与古典数学的研究是根本不同的。古典数学就其性质而论基本上是“构造性”的。为了证明一个对象（满足某些条件的一个函数、一个数等）的存在，总认为必须找出如何构造这个特殊对象的方法。与此相反，现代数学的对象是抽象的符号，它们只是由“描述”来加以确认，把这些对象集中起来，并研究它们的关系。一种关系的正确性由一组规则来确定，这些规则只要求对对象之间的相互关联的形式进行考查。

上面这一段内容并非对现代数学的大厦给出专门的评价[1]，但可以帮助我们理解存在于对自然法则的研究与现代数学工作之间的紧密联系，自然科学与数学两者最终都与结构的研究有关。

下面我们扼要评述一下数学结构及其相互关系。

数学思想(更一般地是科学思想)的基本原材料是集合的概念，集合是一个完全无定形，无结构的对象。集合可以通过映射这个基本概念加以比较和相互关连。用语言学形象加以对比的话，集合是“主语”与“宾语”，而映射则起着“动词”的作用。

---

①事实上，我肯定不适宜于做这项工作，有兴趣的读者可在J.Dieudonne′的文章：“现代公理化方法与数学基础”中找到这方面问题的深刻分析，该文见“*Great Currents of Mathematical Thought*”(F. Le Lionnais 编辑，Dover,1971)第二卷251页。

集合可以赋予各种结构，赋以结构的集合通常叫做系统或空间，在现时代，人们所设想的基本结构有两个类型①：

（a） 代数的

（b） 分析的

代数结构主要是哪些从合成两个（或多个）元素以对应集合中另外元素的结构。另一方面，分析结构又有两大类。就拓扑结构的情况而言，在某种意义上讲我们可以通过邻域概念来研究元素之间的关系。第二类分析结构可以称之为测度空间，是用以构成量度（面积、体积、质量、电荷等）的概念。扼要地说，分析结构包含所有熟悉的几何系统。

自然，一个已知集合，可能具有两个以上的结构。事实上，一个集合具有结构越多，则越有意义，研究起来可以获得更丰富的理论。许多现代数学工作就是由各种密切相互关联的结构组成。例如泛函分析就是在代数系统上加上拓扑结构以及（或者）测度结构，因而也可以叫做“拓扑代数”。另一方面，我们可以讨论某些已给的拓扑结构的代数合成，从而导致代数拓扑的研究。

映射（函数）概念在讨论赋有结构的集合之间的关系上具有特别重要意义。所以如此是由于映射使不同的结构之间发生关系的缘故。例如，代数结构上的映射将引出代数系统的详尽理论，例如群的理论。拓扑空间上的映射将揭露古典分析的许多定理及其推广。测度空间上的映射产生了积分理论。对在赋有分析与代数复合结构的空间上的映射进行研究，导致现代泛函分析的丰富理论，并包含如泛函、算子、希尔伯

①在这个前言中所提到的这些以及所有其它概念，都将在以后的章节中严格地给予定义并加以研究，在这里我们只给予扼要的直观的描述。

特(Hilbert)空间理论．广义函数，积分方程等更多的专题．

现在让我们开始踏上对数学结构进行系统研究这一旅程．

目　　录

第一部分　数学的基础内容

第二部分 数学的基本结构

ⅡA 代数结构

ⅡB 拓扑结构