（修订版）

SHU XUE

数学

高二年级

ZHISHIJINGJIANGYUNENGLIXUNLIAN

知识精讲与能力训练

与人教版最新教材（试验修订本）高中数学同步配套

特级教师　刘锐诚◎主编

- 强化综合能力　课内重点点拨
- 典型例题解析　指点考试迷津
- 模拟试卷练习　综合能力检测
- 名校名师伴学　解你学习之忧

人民日报出版社

数学

知识精讲与能力训练

（修订版）

顾　　问　费孝通
策　　划　张正武
主　　编　刘锐诚

（高二·上册）

本册主编　刘风兰
本册编者　王文杰　郭　贞　王凤媛
　　　　　王振国　刘风兰

（高二·下册）

本册主编　刘风兰
本册编者　刘风兰　雷英俊　王振国
　　　　　刘国英　王凤媛

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

知识精讲与能力训练·高二/刘锐诚 主编. -北京:
人民日报出版社,2001.5
ISBN 7-80153-401-8
Ⅰ.知... Ⅱ.刘... Ⅲ.课程-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 021769 号

(修订版)

书　　名:知识精讲与能力训练·高二(数学)
主　　编:刘锐诚
责任编辑:曼　熳　宁　丰
装帧设计:吴本泓

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号,
邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:北京市朝阳区飞达印刷厂

开　　本:890×1240　1/32
字　　数:3454.11 千
印　　张:104
印　　数:5000
印　　次:2002 年 6 月第 1 版　第 2 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-401-8/G·239
高二全套定价:118.50 元　(本册定价:13.00 元)

开卷有益
创新求实
费孝通
二〇〇三年六月

前　言

《知识精讲与能力训练》丛书是配套2000年秋季开始正式使用的人教版最新初、高中教材而编写的辅导与练习丛书。本丛书较好地体现了最新大纲的精神，而且与最新教材的内容和进度同步，既重视了基础知识和基本技能的落实，又照顾到了优等生拓宽拔高的特殊需要。整套丛书的编写强调了科学性与实用性的统一，旨在帮助学生掌握系统的基础知识，训练有效的学习方法，培养思维能力、应用能力和创新能力，全面提高学生的综合素质。

本书《数学知识精讲与能力训练》(高二年级)主要分为"知识精讲"和"能力训练"两大部分。

一、"知识精讲"主要有三个栏目：

【重点难点】　是将本小节内容的重点和难点指出，并指出处理他们的关键所在。

【学法指导】　是将本小节所涉及到的内容、方法、定理、公式、概念等加以梳理，特别是对易错的概念、公式等加以讲评。

【巧学妙思】　主要是解决本小节内容与以往所学知识之间的联系，以及各类题型的处理方法，选择有代表性的题目做例题(有些是历年的高考试题)，进行分析、讲解，给出处理各类题型的方法、技巧，使学生的思维能力有所提高。

二、"能力训练"主要有两个栏目：

【双基过关】　提供有选择题、填空题、解答题三大类型的题，可供教师课堂上检查教学落实的情况，也可用于学生课后练习，以巩固本节内容。题型全、题目新，且大部分是基础题，符合大纲规定的教学要求的水平。

【拔高挑战】　一般配备两个习题，是本学科的综合性习题，其中

有一个题以实际应用为主。本部分为学有余力的同学提供了一个提高分析能力、解题能力的机会，以期达到激发兴趣、培养能力、开发智力的目的。

各章综合检测试题以及期中和期末综合检测试题采用标准题型，便于学生进行阶段自测和考前热身。

书后集中附有训练题和检测题的参考答案及解题思路点拨，便于练习后及时反馈；也可将答案预先统一撕掉，以供老师们在课堂上统一讲用。

参加本书编写工作的全部人员都是亲自教过这套新教材（实验本）而且教学成绩优秀的教师，他们把教学这套新教材中的丰富经验融入了本书的编写工作中，更增加了本书的实用性和科学性。

我们真诚地希望本丛书能成为广大新教材学习者的良师益友，同时也恳请广大师生批评指正。

编　者

2002 年 6 月

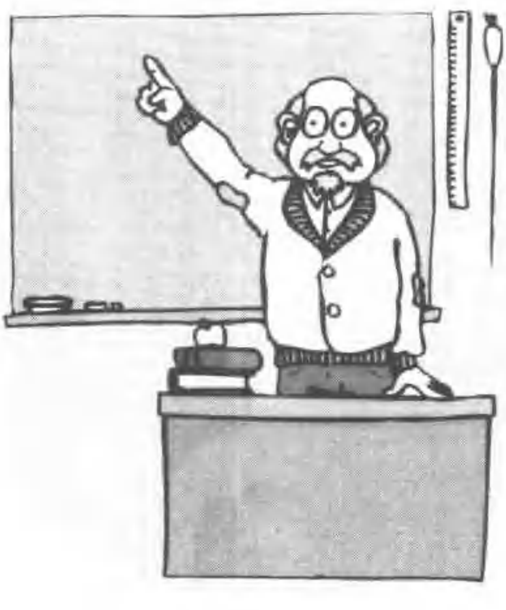
目　录

（上　册）

(下 册)

数 学

（高二·上册）



第六章 不 等 式

§6.1 不等式的性质

知识精讲

【重点难点】

本小节的重点是熟练掌握实数大小比较的依据，系统掌握不等式的性质，熟悉性质定理的证明方法. 难点是正确理解不等式的性质并能够正确应用其解题. 关键是注意性质成立的前提.

【学法指导】

1. 实数的运算性质与大小顺序之间的关系

设 a,b 是两个实数，则：$a>b\Leftrightarrow a-b>0$

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$

说明：

(1)通过观察两数差的符号可以比较两数大小.

(2)由两数的大小关系可以确定其差的符号.

它是本章内容的重要基础，是证明不等式和解不等式的依据.

2. 不等式的性质及其推论

(1)反对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$

(2)传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$

(3)加法保序性：

$a>b\Rightarrow a+c>b+c$

移项法则：$a+b>c\Rightarrow a>c-b$

同向不等式相加：① $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

② 若 $a_1>b_1,a_2>b_2,\cdots a_n>b_n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$

(4)乘正数保序性：

$$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc \begin{cases} \text{同向不等式相乘:若 } a>b>0, \\ \text{乘方法则:若 } a>b>0\Rightarrow a^n>b^n (n\in N \text{ 且 } n>1) \end{cases}$$

$c>d>0$, $ac>bd$

乘负数反序性:$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$

(5)开方法则:$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$,($n\in N$,且 $n>1$)

不等式的上述性质是进行不等式证明和解不等式的依据,而它们又是用实数比较大小的依据来加以证明的.在应用时一定要弄清它们成立的条件.

注意:

(1)同向不等式相乘,要求不等式两边都是正数,否则推不出正确结论.(例如:$-2>-3$,$-1>-8$,但 $-2\times(-1)\not>(-3)\times(-8)$).

(2)不等式两边同时乘方或开方时,要求①不等式两边均为正数(如:$-1>-2$,但 $(-1)^2\not>(-2)^2$);②要求乘方或开方的次数 n 为大于 1 的自然数,否则也得不出正确结论.(如:$3>2$,但 $3^{-1}\not>2^{-1}$).

(3)由性质可以得到一个重要结论:

若 a,b 同号,$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.(倒数法则)

【巧学妙思】

1. 如何进行实数大小的比较

实数大小比较常用如下方法:

(1)作差法;(2)作商法;(3)平方作差法.

比较两个式子的差与零的大小,是判定两个式子大小关系的基本方法.如果已知给定的两个式子均为正值,可用作商法比较大小,为了避免讨论也可以用平方作差法比较.

[**例 1**]设 $0<x<1$,且 $a>0,a\neq1$,试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

分析一:

两数大小比较常用作差法,只需观察差的符号.

$\because |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$

$=\frac{1}{|\lg a|}[|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|]$

$=\frac{1}{|\lg a|}[-\lg(1-x)-\lg(1+x)]$

$=\frac{-\lg(1-x)^2}{|\lg a|}>0$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

本解法中利用了对数换底公式及对数有关性质.

分析二:

$|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 是两个正数,故可用作商法,$\because \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|$

$=|\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)$

$=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>\log_{1+x}(1+x)$

$=1(\because \frac{1}{1-x}>1+x)$

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

本解法中,用到对数换底公式及对数函数单调性等有关概念结论.

分析三:

同分析二,可采用平方作差法.

$\because |\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2$

$=[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)][\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]$

$=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\cdot\frac{1-x}{1+x}$

$=\lg(1-x^2)\cdot\lg\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1}{\lg^2 a}$

$\because 0<x<1\quad \therefore 0<1-x^2<1\quad 0<\frac{1-x}{1+x}<1$

$\therefore \lg\frac{1-x}{1+x}<0\quad \lg(1-x^2)<0\qquad \lg^2 a>0$

$\therefore |\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2>0$,

即:$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

2. 如何正确运用不等式的性质解决有关问题

运用不等式的性质解题的关键是弄清性质成立的前提条件.

[例 2]设 $2<a<3$, $-4<b<-3$,求 $a+b$, $a-b$, $\frac{a}{b}$, ab, $\frac{b^2}{a}$ 的取值范围.

分析:

解决问题的关键是求出 $-b$, $\frac{1}{b}$, b^2 的范围.

$\because -4<b<-3\quad \therefore 4>-b>3$(乘正数保序性)

$\therefore \frac{1}{4}<-\frac{1}{b}<\frac{1}{3}$ (倒数法则)$16>b^2>9$(乘方法则)

$\therefore -2<a+b<0$(同向不等式可加性)　$5<a-b<7$(同上)

$\frac{1}{2}<-\frac{a}{b}<1$(乘正数保序性推论)　$-1<\frac{a}{b}<-\frac{1}{2}$(乘负数反序性)

$6<-ab<12$　$-12<ab<-6$(同上)

$\because \frac{1}{3}<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$(倒数法则)

$\therefore 3<\frac{b^2}{a}<8$(乘正数保序性推论)

注意:

本题在求解过程中易犯如下错误, $-8<ab<-9$ 显然错误, $-\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3}<\frac{a}{b}<-\frac{3}{4}$,希引起重视.

[例 3]已知 $f(x)=ax^2+bx$,且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$, $2\leqslant f(1)\leqslant 4$,求 $f(-2)$的取值范围.

分析一:

要求 $f(-2)$的取值范围,应与已知条件 $f(-1)$及 $f(1)$建立关系,从而由 $f(-1)$, $f(1)$的范围求出.而 $f(-1)=a-b$, $f(1)=a+b$, $f(-2)=4a-2b$

令 $f(-2)=4a-2b=mf(-1)+nf(1)$

$=(m+n)a+(n-m)b$

$\therefore \begin{cases} m+n=4 \\ n-m=-2 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$　即 $f(-2)=3f(-1)+f(1)$

由 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$　$\therefore 3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$

$\therefore 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$

即: $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$

注意:

本题在求解 $f(-2)$的范围时,如果先由 $f(-1)$, $f(1)$的范围求出 a, b 范围,

即 $\begin{cases} 1\leqslant a-b\leqslant 2 \\ 2\leqslant a+b\leqslant 4 \end{cases}$ 求得: $\begin{cases} 1.5\leqslant a\leqslant 3 \\ 0\leqslant b\leqslant 1.5 \end{cases}$

从而 $f(-2)=4a-2b$ 的范围为: $3\leqslant f(-2)\leqslant 12$

即: $f(-2)$的范围扩大了.其错误原因是在求解 a, b 的范围时, a, b 的区域扩大了,如图所示:

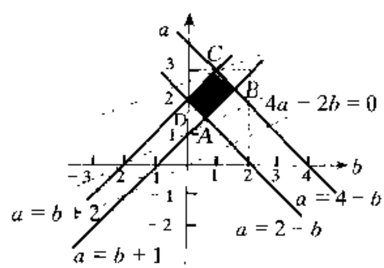


图 6－1

(1)满足 $\begin{cases} 1\leqslant a-b\leqslant 2 \\ 2\leqslant a+b\leqslant 4 \end{cases}$ 的区域如图 6－1

(2)满足 $\begin{cases} 1.5\leqslant a\leqslant 3 \\ 0\leqslant b\leqslant 1.5 \end{cases}$ 的区域如图 6－2

由图可知，图 6－2 所示区域比图 6－1 的要大，所以它们表示的范围不同.

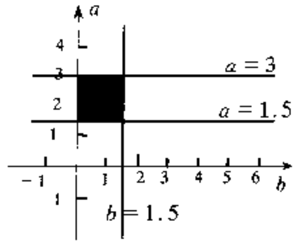


图 6－2

分析二：

由以上解释还可得到此题的一种几何解法.如图 6－1 阴影部分为满足$1 \leqslant f(-1) = a - b \leqslant 2$，$2 \leqslant f(1) = a + b \leqslant 4$ 的 a，b 的取值范围，作 $f(-2) = 4a - 2b = 0$ 的图像（在图6－1中），将直线 $4a - 2b = 0$ 平行移动扫过所示阴影部分的第一点 A 时取得最小值，扫过最后一点 C 时取得最大值. A 点是$a = 2 - b$ 与$a = b + 1$ 交点，C 点是$a = b + 2$ 与 $a = 4 - b$ 的交点.所以 A 坐标(1.5，0.5)，C 坐标是(3，1)，所以最小值为 $4 \times 1.5 - 0.5 \times 2 = 5$，最大值为 $4 \times 3 - 2 \times 1 = 10$，所以 $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10$.

[**例 4**]已知 $3 \leqslant a < 6$，$\frac{1}{3}a < b < 2a$，求 $a + b$ 的范围.

分析一：

由题意可得，$3 + \frac{1}{3}a < a + b < 6 + 2a$，　又∵$3 \leqslant a < 6$　∴$6 + 2a < 12 + 6$　$3 + \frac{1}{3} \times 3 \leqslant 3 + \frac{1}{3}a$，由不等式传递性，$4 < 3 + \frac{1}{3}a < a + b < 6 + 2a < 18$，即　$4 < a + b < 18$.

分析二：

也可以利用图像求解，如图 6－3，$3 \leqslant a < 6$，$\frac{1}{3}a < b < 2a$ 范围为阴影部分，则 $A(3,1)$，$C(6,12)$，$a + b = 0$ 扫过 A 点时最小，扫过 C 点最大，即　当 $a = 3$，$b = 1$ 时　$a + b$ 的最小值为 4，最大值为 18，（取不到∵$a \neq 3$ 且 $a \neq 6$）∴　$4 < a + b < 18$

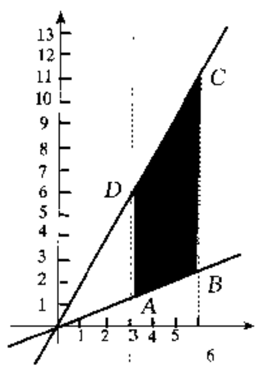


图 6－3

能力训练

【双基过关】

一、选择题(单项选择)

1. 下列命题正确的是　　(　　)

A. 如果 $a>b$,那么 $ac^2>bc^2$

B. 如果 $a>b,c>d$,那么 $ac>bd$

C. 如果$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$,那么 $a>b$

D. 如果 $a>b$ 且 $ab\neq0$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

2. 若 $a>b$ 且 $ab\neq0$,则下列各式中正确的是　　(　　)

A. $a^2>b^2$　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　C. $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$　D. $a^3>b^3$

3. "$a+b>2c$"的一个充分条件是　　(　　)

A. $a>c$ 或 $b>c$　　B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$

4. 已知:$a>0,b>0$,则不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价于　　(　　)

A. $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$　　B. $-\frac{1}{a}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{b}$

C. $x<-\frac{1}{b}$或 $x>\frac{1}{a}$　　D. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

5. 若 $a>b,c>d$,则下列命题正确的是　　(　　)

A. $a-c>b-d$　　B. $ac>bd$

C. $b+d<a+c$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

6. 若 a,b 是任意实数,且 $a>b$,则　　(　　)

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

二、填空题

7. 若 $a,b\in R$,则 $a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$同时成立的充要条件是____________.

8. 若 $a>1,x=\sqrt{a+1}-\sqrt{a},y=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$,则用不等号连接 x ______ y.

9. 已知 $0<a<1$ 且 $A=\sqrt{2a}$，$B=1+a$，$C=\frac{1}{1-a}$，则 A,B,C 中的最大者为____________.

10. 设 $a>1$，$-1<b<0$，则 $a,b,-a,-b,-ab$ 按大小顺序排列为____________.

三、解答题

11. 设 $a>0,b>0$，试比较 $a^a\cdot b^b$ 与 $b^a\cdot a^b$ 的大小.

12. 已知 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\pi$，求 $2\alpha-3\beta$ 范围.

13. 若 $a>b>0$，$m>0$，$n>0$，试比较 $\frac{b}{a}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b+m}{a+m}$、$\frac{a+n}{b+n}$ 的大小关系.

【拔高挑战】

14. [本学科内综合]设实数 a,b,c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，试确定 a,b,c 间的大小关系.

15. [本学科内综合]已知 $a\in R$，比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

16. [本学科内综合]设 $f(x)=ax^2+bx$ 且 $-1\leqslant f(1)\leqslant 1$，$1\leqslant f(-1)\leqslant 3$，求 $3a-b$ 的取值范围.