最新

奥林匹克

初中数学读本

2 年级

OLYMPIC

源于基础
高于课本
创新思维
培养能力

陕西人民教育出版社

最新奥林匹克初中数学读本

本册主编 沈 军
编 者 许涤坎 吴 文
田晓荣 沈 军
姜书念

2年级

陕西人民教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

最新奥林匹克初中数学读本. 二年级/秦驰主编.
—西安：陕西人民教育出版社，2002.6
ISBN 7—5419—8384—5

Ⅰ.最… Ⅱ.秦… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 024914 号

最新奥林匹克初中数学读本

2 年级

出 版 者 陕西人民教育出版社
发 行 者 各地新华书店经销
印　　刷 西北大学印刷厂
印　　次 2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本 880×1230　1/32 开本　8.25 印张
字　　数 165 千字
印　　数 1～5 000
标准书号 ISBN 7—5419—8384—5/G · 7232
定　　价 8.50 元

前 言

随着数学课外活动及数学竞赛的蓬勃开展，为了探索出既切合九年义务教育数学课程特点，又渗透现代数学教育理念；既能够激发学生的求知欲、探索欲，又科学简捷，且难易程度适中的初中数学奥林匹克教材，我们组织了具有多年数学奥林匹克辅导经验，成绩斐然的一线教师和奥林匹克数学竞赛研究专家，对竞赛训练内容精心研讨，筛选出适合各年龄段学生认知特点及心理状况的专项内容，编写了这套《最新奥林匹克初中数学读本》。以期达到既能满足学生参加初中阶段的各级各类竞赛并取得好成绩，又能促进学生掌握更多的数学技能和方法，为以后的学习和工作打下坚实的基础。这套教材能让奥林匹克之门向更广大的学生敞开，使他们真正学到有价值的、必需的数学奥林匹克知识，杜绝那种舍本求末，不注意基础知识的严格训练和真正掌握，而搞题海战术，用大量的难题、偏题或怪题来压学生，挫伤学生的锐气和进取心，束缚学生的聪明才智的错误作法。我们力求做到教材通俗易懂、深入浅出，让学子们通过阅读使用《最新奥林匹克初中数学读本》，对数学奥林匹克不再望而生畏，不再只是翘首期盼，更不是只限于个别人的荣耀，而真正能适合更多的学生，让他们感悟到数学奥林匹克所带来的欣慰和快乐，体会到它的内涵和魅力，为学子们实现数学梦想、遨游数学殿堂提供帮助。

这套《最新奥林匹克初中数学读本》有如下特点：

其一，贯彻了国家对初中课程改革的理念，符合国家对初中数学竞赛内容的各项要求；

其二，内容紧密联系学生实际，体现科学性、针对性、指导性、实用性和高效性，突出应用性、能力性和创新性；

其三，遵循“源于基础，高于课本”，注重同步性（与初中数学教学大纲同步）、提高性（与竞赛大纲内容衔接）及趣味性的统一。结合学生的认知水平精心设计、编排训练内容，以启迪学生思维、掌握方法，培养学生运用数学知识快速判断、解决问题的能力；

其四，尽力体现初中数学课程改革的新理念及数学竞赛命题的新思想、新动态；

其五，是内容求实。内容选取力求做到实实在在，对学生竞赛确有帮助，真正能解决学生竞赛中需要解决的问题。

本套读本编写过程中参考了许多相关图书资料，在此深表谢意。由于编写人员水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请各位读者批评指正。

丛书主编　　　秦　驰
丛书副主编　　刘康宁　江树基
　　　　　　　尤　廉　汪香志
编　　委　　　张秀芬　沈　军
　　　　　　　许　盈　浮新民

目 录

1 因式分解（一）

专项透析

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解. 因式分解是整数质因数分解的发展. 实质是多项式乘法的逆运算. 它是多项式的一种恒等变形，主要包含以下三方面内容：

1. 因式分解的对象是多项式，无论是被分解式还是分解后的每一个因式都必须是多项式或单项式.

2. 因式分解的过程是多项式的恒等变形，每一步都必须保持前后两式恒等，可以逆用多项式乘法或代入具体数值来检验.

3. 因式分解的结果是整式连乘积的形式，并且每个因式都要分解到不能再分解为止.

因式分解的方法很多，而且技巧性较强，在初二课本中主要介绍了提公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法、配方法. 这些方法在应用时虽有一般规律（一提、二公、三巧乘、分组分解压后营），但没有固定模式，而且在分解因式时常常是将几种方法结合交替使用. 本讲将对这几种方法的应用和技巧作进一步的介绍.

附：常用公式

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
2. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;
3. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;
4. $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$;

5. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(a+b+c)^2$;

6. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$;

当且仅当$a+b+c=0$时 $a^3+b^3+c^3=3abc$;

7. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

（其中n为正整数）

8. $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$ （其中n为偶数）

9. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ （其中n为奇数）

例题评点

例 1. 分解因式：$x^2-x^4-2x^7-x^{10}$.

解：原式$=x^2(1-x^2-2x^5-x^8)$

$=x^2[1-(x+x^4)^2]$

$=x^2(1-x-x^4)(1+x+x^4)$.

解题策略

先提公因式，再按（一、三）分组，运用完全平方公式和平方差公式，将该多项式因式分解.

【评点】①不管用什么方法分解因式，有公因式的一定要先提公因式. ②分组要有预见性，本题的关键是$x^2+2x^5+x^8$中x^2+x^8是两项平方和，且系数比为1：2：1.

例 2.分解因式：$2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$

（1999年天津初二数学竞赛试题）.

解：原式$=2x^3-4x^2y+2xy^2-(x^2z-2xyz+y^2z)$

$=2x(x^2-2xy+y^2)-z(x^2-2xy+y^2)$

$=2x(x-y)^2-z(x-y)^2$

$=(x-y)^2(2x-z)$.

解题策略

从系数和字母z入手，观察得到含字母z的三项与不含z的三项系数比都是1：(−2)：1.

例 3. 分解因式：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解法一：原式$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+c^2(a-b)$

$=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)$

$= ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)$

$= (a-b)(ab-ac-bc+c^2)$

$= (a-b)(a-c)(b-c).$

解题策略

将多项式"部分还原"后重新分组，使各组之间有公因式. 提公因式后再分组分解.

解法二：原式$= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)$

$+bc(b-c)$

$= (b-c)(a^2-ab-ab+ac)$

$= (a-c)(a-b)(a-c).$

解题策略

将多项式"部分还原"后，整理成关于a的二次三项式再进行因式分解.

【评点】当多项式是几项积的和时，将多项式"部分还原"或"全部还原"后，重新整理分组，是解决此类问题比较好的方法.

例 4. 分解因式：$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3.$

解：原式$= (1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^6-x^3$

$= (1+x+x^2)^2+2x^3(1+x+x^2)+x^3(x-1)(x^2+x+1)$

$= (1+x+x^2)(1+x+x^2+2x^3+x^4-x^3)$

$= (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4).$

解题策略

将多项式"部分还原"后，整理成关于$1+x+x^2$的二次三项式，再提公因式分解.

【评点】将多项式"部分还原"或"还原"后重新分组，方法比较灵活，需要一定的数学技巧，因此，在做题时，要认真观察、综合分析.

例 5. 分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

（1986年扬州初中数竞）.

解：原式$= (1+y)^2+2x^2(1+y)(1-y)+[x^2(1-y)]^2$

$-2x^2(1+y^2)-2x^2(1-y^2)$

$=[(1+y)+x^2(1-y)]^2-4x^2$

$=(1+y+x^2-x^2y+2x)(1+y+x^2-x^2y-2x)$

$=[(1+x)^2-y(x^2-1)][(x-1)^2-y(x^2-1)]$

$=(x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy-y).$

解题策略

将多项式配方后再用公式进行分解.

【评点】建立"整体"思想，将$(1+y)^2$，$x^4(1-y)^2$分别视为一个整体的平方，运用配方法将多项式因式分解. 本题还可将多项式"还原"

后，整理成关于y的二次三项式进行分解. 方法与例 4 同.

例 6. 分解因式：$x^4+x^3+6x^2+5x+5$.

解：原式$=x^2(x+1)x+x(6x+5)+5$

$$=[(x+1)x+1](x\cdot x+5)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2+5).$$

解题策略

将多项式恰当分组，整理成关于x的二次三项式，运用十字相乘法分解.

【评点】在多项式中，固定一个字母为“主元”将多项式变形为关于这个字母的“二次三项式”尝试十字相乘法，有时非常巧妙.

例 7. 计算

$$\frac{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4)(15^4+4)\cdots(39^4+4)}{(5^4+4)(9^4+4)(13^4+4)(17^4+4)\cdots(41^4+4)}$$

的值.

解题策略

将分子、分母各项分解因式，使分子、分母能约分，达到简化运算的目的.

解：$\because\ x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

$$=[(x+1)^2+1][(x-1)^2+1].$$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{(2^2+1)(4^2+1)(6^2+1)(8^2+1)(10^2+1)}{(4^2+1)(6^2+1)(8^2+1)(10^2+1)(12^2+1)}$

$$\frac{(12^2+1)\cdots(38^2+1)(40^2+1)}{(14^2+1)\cdots(40^2+1)(42^2+1)}=\frac{2^2+1}{42^2+1}=\frac{1}{353}.$$

【评点】利用因式分解将 x^4+4 变形为$[(x+1)^2+1][(x-1)^2+1]$使分子、分母出现公因式，达到约分的目的，是解决本题的关键.

例 8. 已知：多项式$f(x)=x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+\cdots+x^{1111}+1$

$$g(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1,$$

试证：$f(x)$能被$g(x)$整除.

解题策略

$f(x)$有 10 项，$g(x)$也有 10 项，项数较多不便于比较，故需找一项数较少的多项式来“传递”.

解：$\because\ g(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$

$\therefore\ g(x)\mid x^{10}-1$

而 $f(x)-g(x)=x^9(x^{9990}-1)+x^8(x^{8880}-1)$

$$+x^7(x^{7770}-1)+\cdots+x(x^{1110}-1)$$

$$=x^9[(x^{10})^{999}-1]+x^8[(x^{10888}-1)]$$

$$+x^7[(x^{10})^{777}-1]+\cdots+x[(x^{10})^{111}-1]$$

$\because\ x^{10}-1 \mid (x^{10})^{999}-1$，　$x^{10}-1 \mid (x^{10})^{888}-1$，…，

$x^{10}-1 \mid (x^{10})^{111}-1$；

$\therefore\ g(x) \mid (x^{10})^{999}-1$．　$g(x) \mid (x^{10})^{888}-1$．…．

$g(x) \mid (x^{10})^{111}-1$．

$\therefore\ g(x) \mid f(x)-g(x)$．

$\therefore\ g(x) \mid f(x)$．

【评点】根据因式分解的思想分析得$g(x) \mid x^{10}-1$是解决本题的关键．

专项精练

（1）若$\triangle ABC$的三边a，b，c满足$a^4+b^2c^2-a^2c^2-b^4=0$则$\triangle ABC$的形状为（　）．（第6届希望杯试题）

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

（2）$x^4-\frac{1}{16}x^2$因式分解的结果为（　）．

A. $(x^2+\frac{1}{4}x)(x^2-\frac{1}{4}x)$

B. $x^2(x^2-\frac{1}{16})$

C. $x^2(x+\frac{1}{16})(x-\frac{1}{16})$

D. $x^2(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$

（3）化简$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$的结果为（　）．（2000年希望杯试题）

A. 3　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

（4）若四个连续奇数之积与q^2-9的和为完全平方数．则q的值为________．

（5）If $a+b+c=0$, then the resultof $a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3$ is________．（第9届希望杯试题）

(6) $\dfrac{19931992^2}{19931991^2+19931993^2-2}=$________.(第4届希望杯试题)

(7) 分解因式:$(a+b-2x)^3-(a-x)^3-(b-x)^3$.

(第12届希望杯培训题)

(8) 若$a^3+a^2+a+1=0$求$a^{2008}+2a^{2000}+5a^{1996}$的值.

(第12届希望杯培训题)

专项精练参考答案与提示

1. $\because\ a^4+b^2c^2-a^2c^2-b^4=0$,

$\therefore\ (a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0.$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0.$

即 $a^2=b^2$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$.

$\because\ a$, b, c为$\triangle ABC$的三边;

$\therefore\ a>0$, $b>0$.

即 $a=b$或 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore\ \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形故选 D.

2. $x^4-\dfrac{1}{16}x^2=x^2\left(x^2-\dfrac{1}{16}\right)=x^2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$. 故选 D.

3. $\because\ \sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$

$=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1$

$=2\sqrt{2}.$

$\therefore$ 选C.

4. 解:设四个连续奇数最小的一个为n,则

$n(n+2)(n+4)(n+6)+q^2-9$

$=(n^2+6n)(n^2+6n+8)+q^2-9$

$=(n^2+6n)^2+8(n^2+6n)+q^2-9.$

$\because$ 它是完全平方数,

$\therefore\ q^2-9=4^2.$

$q=\pm 5.$

5. $\because \quad a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2+b^2-ab)$

$=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)$,

又 $a+b+c=0$,

$\therefore$ 原式 $=0$.

6. $$\frac{19931992^2}{19931991^2+19931993^2-2}=\frac{19931992^2}{(19931992-1)^2+(19931992+1)^2-2}$$

$$=\frac{19931992^2}{19931992^2-2\times19931992+1+19931992^2+2\times19931992+1-2}$$

$$=\frac{19931992^2}{2\times19931992^2}=\frac{1}{2}.$$

或设 $a=19931991$，则

原式$=\dfrac{(a+1)^2}{a^2+(a+2)^2-2}=\dfrac{(a+1)^2}{a^2+a^2+4a+4-2}=\dfrac{(a+1)^2}{2(a+1)^2}=\dfrac{1}{2}$.

7. 解法一：$(a+b-2x)^3-(a-x)^3-(b-x)^3$

$=(a+b-2x)^3-[(a-x)+(b-x)][(a-x)^2-(a-x)(b-x)+(b-x)^2]$

$=(a+b-2x)^3-(a+b-2x)[(a-x)^2-(a-x)(b-x)+(b-x)^2]$

$=(a+b-2x)[(a+b-2x)^2-(a-x)^2-(a-x)(b-x)-(b-x)^2]$

$=(a+b-2x)[(a+b-2x+a-x)(a+b-2x-a+x)+(b-x)(a-x-b+x)]$

$=(a+b-2x)(b-x)[(2a+b-3x)+(a-b)]$

$=(a+b-2x)(b-x)(3a-3x)$

$=3(a+b-2x)(b-x)(a-x)$.

解法二：$\because \quad a+b-2x+(x-a)+(x-b)=0$

$\therefore \quad (a+b-2x)^3-(a-x)^3-(b-x)^3$

$=(a+b-2x)^3+(x-a)^3+(x-b)^3$

$=3(a+b-2x)(x-a)(x-b)$.

8. 解法一：由 $a^3+a^2+a+1=0$ 得 $a\neq1$.

于是 $(a-1)(a^3+a^2+a+1)=0$，有 $a^4-1=0$，即 $a^4=1$.

故 $a^{2008}+2a^{2000}+5a^{1996}$

$=(a^4)^{502}+2(a^4)^{500}+5(a^4)^{499}$

$=1+2+5$

$=8.$

解法二：∵ $a^3+a^2+a+1=0$,

∴ $(a+1)(a^2+1)=0.$

∵ $a^2+1\neq 0$,

∴ $a+1=0.$ $a=-1.$

故，原式 $=1+2+5=8.$

2 因式分解（二）

专项透析

第一讲研究了因式分解的提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法、配方法的应用和技巧，这一讲主要学习因式分解的拆添项法、换元法、待定系数法、特殊值法、双十字相乘法等.

1. 拆添项法：把代数式中的某项拆成两项或几项叫代数式的拆项. 添上两个系数互为相反数的项叫添项. 拆项、添项都是代数式的恒等变形.

拆、添项与多项式乘法中的合并同类项互为逆运算. 拆、添项的目的是把某些已被合并的同类项根据需要恢复. 使多项式的某些项建立起联系. 由于合并同类项的结果是惟一的，而与之对应的拆添项却是多样的，因此，拆添项的方法比较灵活，有比较强的技巧性. 所以它在因式分解中应用非常广泛，尤其是很多数学竞赛题常常要利用拆、添项法来解决.

2. 换元法：将一个较复杂的代数式中某一部分看做一个整体. 用新的字母替代这个整体来运算.它可以使不熟悉的问题转化为熟悉的问题，复杂的问题转化为简单的问题. 从而运用熟悉或简单的方法达到解决问题的目的.

3. 双十字乘法：就是进行两次十字相乘，它以十字相乘法为基础，用双十字乘法主要分解二元二次式.

4.待定系数法：根据多项式恒等性质：若$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$