智能科学与非线性科学丛书

西安电子科技大学出版社

非线性传递函数理论与应用

焦李成 著

非线性传递函数理论与应用

焦李成 著

西安电子科技大学出版社
1992

（陕）新登字 010 号

内容提要

非线性传递函数理论是近十年迅速发展起来的研究非线性系统建模、分析、综合与故障诊断的一个强有力的理论体系和分析工具，它已经成为非线性科学中一个非常有前途的新的研究领域。

本书系统地总结了这一领域近十年来所取得的最新成果，论述了非线性传递函数理论的数学基础、基本理论和方法以及有关应用。主要内容包括：非线性传递函数理论基础和基本理论及面向工程应用的基本方法；非线性系统的频域建模、分析与综合、故障诊断、稳定性和灵敏度理论；非线性振荡系统、离散系统和随机系统分析以及它在非线性故障诊断、VLSI 处理系统、非线性系统辨识和非线性信号处理等领域的应用。

本书可用作大学电路与系统、信号与信息处理、自动控制、通信与电子系统、数学、力学、机械和动力工程等专业的高年级大学生与研究生教材，同时对上述有关领域科技工作者和工程技术人员有重要的使用和参考价值。

非线性传递函数理论与应用
焦李成　著
责任编辑　谭玉瓦

西安电子科技大学出版社出版发行
西安电子科技大学印刷厂印刷
新华书店经销
开本 787×1092 1/16　印张 25 12/16　字数 610 千字
1992 年 5 月第 1 版　1992 年 5 月第 1 次印刷　印 1－3 000

ISBN7－5606－0184－7/TN・0067　　定价：7.00 元

前　言

非线性科学在过去廿年间激励了自然科学、工程技术与社会科学的几乎全部学科领域的研究者并向人们提出了划时代的挑战。计算机科学的迅速发展，使得非线性定量数值仿真实验成为可能。同时，随着非线性“普适性”和新的数学分析方法如Volterra泛函级数理论、分形数学等理论的诞生，使得许多长期认为是很困难的非线性问题的求解取得了相当的成功，充分显示了非线性科学的巨大潜力。非线性科学及其复杂巨系统如人脑、神经网络、浑沌动力学系统与分形、孤子系统、非平衡自组织系统等已发展成为科学研究的中心。人们正在努力摆脱穷于应付非线性的局面，而进入考虑利用非线性的新时期。

面对飞速发展的科学技术的迫切需要，我们不仅需要开发新的器件（如量子霍尔效应器件、室温超导器件、光集成器件，电子神经器件和生物器件等），更为重要的是建立非线性系统理论，发展易为广大科技工作者所掌握和使用的非线性分析方法和工具，使人们逐步跨上智能处理的历程。

经过许多领域科技工作者的共同努力，Volterra泛函级数理论已经发展成为非线性系统分析、建模与综合的最具魅力的理论。特别是近十年来，基于Volterra泛函级数的非线性传递函数理论颇受各领域学术界的重视，并取得了长足的进展。由于Volterra泛函级数与幂级数有着天然的密切联系和相似之处，因而易为广大科技工作者和工程技术人员所接受和使用。非线性传递函数理论不仅有着严格的数学基础，而且具有鲜明的物理意义；虽说其数学基础相当深，但其方法使用却极为简单，且可进行工程上的频域分析，这对工程技术领域非常切合实际，它不仅提供了一新的理论体系，而且为真正解决非线性实际问题提供了强有力的方法和工具。更为重要的是，它是频域中完全解析的符号化方法，适于一般非线性系统；它使得人们可以像使用线性拉氏变换和线性传递函数分析线性系统那样，用类似的非线性

传递函数理论和方法研究一般的非线性运动系统。这对于熟悉线性传递函数方法的广大科技工作者具有重要的使用价值，同时它也必将有力地促进非线性科学的研究与发展。

近十年是 Volterra 泛函级数理论发展最为迅速的十年。然而自 1982 年以来，国内外还未见有有关著作问世，我们已在这一领域学习和工作了近十年，因而有责任为这一新的理论的应用与发展做些有益的工作，本书的目的是将近十年这一领域的最新进展和我们所做的研究工作作一小结，因此作者认为写一本关于非线性传递函数理论的著作是必要的，但又考虑到它目前还处于发展之中，等待一段时间写书则条件将会更好。在这一矛盾的形势下，作者选择了前者，这样再加上作者水平等限制，本书的缺点与错误可能是难免的。作者诚恳地欢迎来自各位专家的批评与指正，希望在大家的帮助下，使本书更加完善。

在非线性频域符号化解析处理的统一框架之下，本书系统地论述了非线性传递函数理论的数学基础、基本理论和方法以及有关应用，把严格的数学证明与面向工程应用方法、连续与离散系统、确定性与随机性系统融为一体。本书特别注重于面向实际非线性系统研究的基本方法，其中许多内容是作者近年来所做的一些工作。本书的主要内容有：

· 第一章论述非线性科学和 Volterra 泛函级数的发展与现状，非线性传递函数的现代分析基础、基本性质和定理等；

· 第二章主要讨论非线性传递函数的基本理论，包括各种非线性传递函数分析方法，如拓扑法、方程法、一般时/频域递归法等；（第一、二章包含了作者的部分工作 [103, 104]）

· 第三章讨论非线性系统的稳态频率响应的分析方法、性质及非线性频率失真测度理论，最后还给出了基于 Volterra 级数的非线性暂态响应分析方法；（这一章主要是作者的一些工作 [103, 104, 131, 133]）

· 第四章为基于非线性传递函数理论的系统建模方法及非线性频域核的测量与验证；

· 第五章讨论基于非线性传递函数的非线性系统频域稳定性和灵敏度分析理论与方法；（这一章主要是作者的一些工作 [104, 109, 117, 134]）

· 第六章研究面向非线性自治振荡系统的非线性传递函数方法，并讨论了它与传统振荡分析方法和 Hopf 分叉定理等之间的关系；（本章包含了作者的部分工作 [105 - 106]）

· 第七章讨论离散非线性系统的 Volterra 级数和非线性传递函数理论，包括稳态响应分析，多模式振荡分析与核的测量等；（本章包含了作者的部分工作 [116]）

· 第八章研究非线性随机系统的非线性传递函数理论与方法；

· 第九章系统地论述了与 Volterra 泛函级数密切相关的 Wiener 泛函级数理论与方法，它将会使人们耳目一新；

· 第十章研究基于非线性传递函数理论的非线性故障诊断和决策分析方法；（这一章主要是作者的工作 [107, 108, 114, 115, 118]）

· 第十一、十二两章主要是非线性传递函数理论在新近得到迅速发展的两类全集成连续时间滤波系统（MOSFET－C 和跨导－C）非线性动力学研究中的应用，作者首次把这一理论应用于这两类具有很大应用前景的全集成系统，为非线性传递函数理论开拓了新的应用领域[104, 112, 122, 131, 132, 133, 135, 136, 119 - 121]；

· 第十三章为面向非线性系统辨识、参数估计和非线性信号处理的非线性传递函数方法的研究，这一领域工作还刚刚开始，具有很大的潜力和应用前景。

导师夏承铨教授将我引入非线性领域，导师邱关源先生和保铮先生指导我学习和研究非线性系统理论及应用，仅借此机会表达我对他们由衷的敬意和感激。美国加州伯克莱大学的 L. O. Chua 教授给予我热情的关怀，并提供了许多宝贵的资料和建议，作者向蔡少棠先生表示诚挚的谢意。感谢西安电子科技大学科研处和电子所领导及各位老师的热情关怀与支持；感谢西安电子科技大学出版社的大力支持；感谢被引用文献的作者以及提出过良好建议的各位同行和专家。作者认为，本书是国内外这一领域科技工作共同的劳动成果。

焦李成

1991.7 于西安

目 录

第一章　非线性传递函数理论基础

1.1　非线性科学:成功与挑战

当牛顿力学成功地解释许多天体运动的时候,以牛顿力学为基础的整个经典力学便形成了。它的辉煌成就,使得牛顿力学在其诞生之后差不多近三个世纪的岁月里,人们对它的信仰达到了“玄学”的地步。与此同时,牛顿力学的认识论也成为经典自然科学的基石。这种认识论概括起来就是确定论、时空分离和线性观。

牛顿力学在本世纪经历了两次变革:一次是量子论,它把我们的认识引向了微观世界;另一次是爱因斯坦的相对论,它把我们引向了宇宙。然而,在经典自然科学中,时间只起一个参数的作用,是一个没有任何物理意义的幻像。过去和未来没有什么区别,只要给定运动方程和初始信息,就能决定过去,预告未来。系统变量之间严格遵循线性叠加律,系统的局部性质与整体性质是一致的;在这里严格成立可逆性(包括量子论与相对论),无论何种相对坐标的对称运算都是许可的,无论过去、将来都在给定的现在之中,后继运动将不再给出任何新的信息,任何线性变换都给出相同的定性行为,稳定、有序、单一、均匀、对称与平衡也成为其主要特征。

进入 20 世纪,特别是进入信息时代以来,人们在弥补经典自然科学的种种缺陷上取得了相当的成功:时空分离早在爱因斯坦时代就已解决;时间 T 通过洛仑兹变换与空间紧密相关;人类赖以生存的是四维空间,差不多已成为科普常识。统计力学的成就,量子力学中的海森堡测不准原理以及近十年才发展起来的奇怪吸引子与浑沌动力学理论,从根本上动摇了拉普拉斯的“世界的精髓是可测的”信念。近十几年来,耗散结构、弧粒子、自组织结构、协同学、超循环与微循环、奇怪吸引子与浑沌及神经网络系统理论的发展,使人们认识到:非线性是一切动力学复杂性之源,自然界和现实生活中所有系统都是非线性的。正是由于非线性作用,才孕育出大自然的万千气象,人类社会的风云变幻和人类思维的错踪差异。人们所看到的也是一个五彩缤纷、以非线性方式运动与发展且具有对称破缺、充满不可逆性与随机性及开放性的世界。

然而与此同时,新的问题不断暴露,困难接踵而来。虽说自然科学已经能解释许多复杂的现象,创造出极为罕见的物理、化学与生物等条件。但是,对于自然界那些普遍存在的问题却无能为力:玻璃是大量使用的材料,而玻璃为什么会透光的问题,直到本世纪 70 年代才算基本解决;水的相变仍然困惑着物理学家;力学中的三体问题整整折磨了人们整个 19 世纪;超导现象仍处于攻关之中;人们对社会经济的知识远远不能适应社会的发展。旨在揭示人脑思维与智能奥秘的神经网络的研究从 40 年代信息科学的开创时期诞生到现在走过了半个世纪的曲折历程后,迎来了一个空前活跃的新的发展时期,成为脑科学、数理科学与信息科学等研究领域的共同前沿之一。这不仅体现了近几十年来自然科学发展的重要特征,也体现了科学演化的新趋势——研究和探索非线性动力学复杂性。探索脑的组织和工作原理及其信息处理机制,是整个人类面临的一项挑战,也是整个自然科学的前沿领域。以非线性并行分布自适应处理为主流的神经网络系统理论既体现了非线性科学的精髓,又向人们提出了下列基本问题:

①神经系统的基本组成是什么?

②脑怎样完成对于特定任务的自组织？

③脑中的不同等级结构是怎样形成的？

④脑如何解释环境中的景物？

⑤脑怎样建模并控制行为？

⑥脑的学习策略是什么？

⑦知识在脑中是怎样表征的？

⑧时间在脑的内部组织中起什么作用？

⑨脑系统是如何发展演化的？

⑩脑系统如何完成对信息的处理与重建？

⑪什么是智能？

⑫思维的本质到底是什么？

总之，思维系统、脑系统、生命系统、社会经济系统、生态系统等许多巨系统的研究，都依赖于非线性科学的研究和进展；而当今任何一个科学领域的研究与应用，也都离不开非线性科学。

物质世界中，无论是宇观、宏观、亚微观、微观或渺观，都是由一定层次结构和功能的非线性系统构成的。由于非线性作用，系统一般都具有开放性、对称破缺、不可逆性、遍历性和不确定性。在非线性世界里，人们不能再指望并且也不会存在有象牛顿力学那样普适完备的理论。所有理论和方法都有其适用范围，即使像数学公理体系也都是不完备的(这就是所谓的哥德尔定理，它被谌称为本世纪最伟大的数学成就之一)；在这里普适性成为人们的口头禅，而局部与整体不再是一回事(即整体性原则)；线性叠加最多只能在局部近似成立；任何一个好的模型都有例外的情况不能包括；局部的失稳不会导致整条河水倒流；由于系统的内在随机性，其后继运动可能成为长期不可预测的；在这里，时而会失去对称性、可逆性、因果律，而表现出历史性、对称破缺、不可逆和随机性。

非线性科学在过去 20 年间激励了自然科学、工程技术与社会科学的几乎全部学科的研究者并向他们提出了划时代的挑战。计算机科学的迅速发展，使得非线性定量数值模拟成为可能。同时，随着非线性“普适性”和新的数学分析方法的诞生使得许多长期认为是很困难的非线性问题的求解取得了相当的成功，显示了非线性科学的巨大潜力和重要意义，非线性科学及其复杂巨系统如人脑与神经网络系统等已成为科学研究和发展的中心。然而，尽管在新近十几年非线性科学研究取得了迅速的发展，但对非线性问题仍然缺乏系统的处理方法和分析框架，对一般非线性发展方程还没有与线性问题中像Fourier 变换那样类似的工具。一旦非线性科学研究有所突破，将对一系列复杂系统获得规律性的认识，进而推动整个科学的发展，如浑沌动力学使人们对客观世界的认识产生了一次新的飞跃。新近问世的神经网络计算机显示了非线性系统的巨大潜力和经济价值，它的发展必将影响新一代科学技术的发展。

面对这一现状，我们不仅需要开发新的器件(如电子器件、光集成器件、生物器件、超导器件等)，而且更为重要的是急待建立非线性系统理论，发展为广大科技工作者易于掌握和使用的非线性分析方法。

1.2 Volterra 泛函级数

1.2.1 Volterra 泛函级数的发展历史

Volterra 级数是一种泛函级数，它是由意大利数学家 vito Volterra 于 1880 年首先提出的，他当时是作为 Taylor 级数的推广而提出来的。1912 年，Volterra 将这种泛函级数用于研究某些积分方程和积分-微分方程的解。直到 1942 年，美国著名科学家、控制论的奠基人 N. Wiener 才首次将 Volterra 泛函级数用于非线性系统的分析，把这种级数用于分析具有白噪声激励的非线性 *RLC* 电路。其后，在美国 MIT 一直有人继续 N. Wiener 的工作，他们的主要工作是把 Volterra 泛函级数用于发展非线性算子理论以及非线性方程和系统的分析。1967 年，美国科学家 Narayanan 首次将这种方法用于分析具有实际意义的晶体管放大器的波形失真问题。70 年代后，Volterra 泛函级数开始受到人们的普遍重视，其中 Narayanan，Bedrosian，Rice，Bussgang，Schetzen，Weiner 和 Rugh 等人的工作对后人起了承上启下的推动作用。值得一提的是，美国加州伯克莱大学蔡少堂(L. O. Chua)教授与其合作者 Ng、唐跃生、Boyd 的工作是独树一枝的，他们在非线性自治振荡系统分析与 Volterra 核测量等方面做出了突出的贡献。法国学者 Fliess 等人建立了由 Lie 群表示的动力系统的 Volterra 泛函级数分析理论。Brockett 研究了 Volterra 泛函级数与几何控制论的关系，美国 IBM 的 Sandberg 研究了一大类非线性动力系统。我国焦李成等人也在非线性传递函数分析理论、稳定性与灵敏度理论、非线性动力学与失真分析及故障诊断等方面做出创造性贡献。近几年来，由于计算机科学和数字集成电路技术的飞速发展，已有成功的范例显示了 Volterra 泛函级数的应用价值与巨大潜力。

Volterra 泛函级数理论之所以具有如此大的吸引力，根本的原因在于它与幂级数有着天然的密切联系和相似之处，因而易为广大工程技术人员和科技工作者所接受。Volterra 核(特别是频域核)具有鲜明的物理意义，且可进行工程上的频域分析，这对工程技术领域非常切合实际，它不仅提供了一新的理论体系，而且为真正解决非线性实际问题提供了强有力的方法和工具。更为重要的是，它是频域完全解析的符号法，这是已有任何方法所难以比拟的，且适用于一般的非线性系统。它使得人们能像使用一维拉氏变换和线性传递函数法分析线性系统那样，用类似的非线性传递函数理论和方法研究与分析一般的非线性动力系统。这对于熟悉线性传递函数方法的科技工作者分析和设计非线性系统具有主要的使用价值。它也必将会有力地推动和促进非线性科学的研究与进展。

1.2.2 线性动态系统的 I/O 描述

对于单输入非时变系统，其输入 $x(t)$与输出 $y(t)$之间的关系可用线性算子表示如下：

$$y(t) = T[x(t)] \tag{1.1}$$

由于系统是非时变的，所以算子 T 不随时间而变化，故有

$$y(t+\tau) = T[x(t+\tau)] \tag{1.2}$$

若假设系统是一线性非时变系统，则输出 $y(t)$可以表示为输入 $x(t)$的广义函数

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{1.3}$$

(1.3)式表明:线性非时变系统可以用该系统对单位冲激输入的响应 $h(t)$ 给予完备地描述。一旦已知 $h(t)$,即可由(1.3)式确定系统对任意输入 $x(t)$ 的响应。

一个系统在任一给定时间的输出若与未来的输入无关,则称之为因果系统。换句话说,对于任一给定的 t_1,$y(t_1)$ 并不取决于 $t>t_1$ 时 $x(t)$ 的值。由(1.3)式可知,$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t_1-\tau)d\tau$ 正是未来的输入值对 $t=t_1$ 时输出值的贡献。要满足因果性条件,这个积分对于任何输入都必须等于零,而这一条件也只有当下式成立时才可满足:

$$h(t) = 0 \qquad \forall\, t < 0 \tag{1.4}$$

由(1.3)式还可看出:在 τ 秒以前的输入值对现在的输出值的贡献是由 $h(\tau)$ 来决定的。在这个意义上说,单位冲激响应代表线性非时变系统的记忆性。假若线性时不变系统没有记忆性,则有

$$h(t) = c\delta(t)$$

此处 $\delta(t)$ 是单位冲激函数,且系统的响应

$$y(t) = cx(t)$$

即为 x　y 平面上过原点的一条直线。

在这里,我们要提出如下的问题:当系统既为非线性又具有动态性质时,其 I/O 关系应该如何表示?或者说,怎样才能完全确定地表征一个非线性动态系统?

1.2.3　非线性动态系统的 Volterra 级数表示

对于这一问题可以回答如下:一大类非线性动态系统在很弱的约束条件下可以由 Volterra 泛函级数完全确定地表征。下面我们证明这一结论。

现在考虑任意一非线性动态系统,并假定

①它是一个因果性的物理系统,也就是说它在 t_0 时刻的输出值 $y(t_0)$ 只由 $t\leqslant t_0$ 时间区间内的输入值 $x(t)$ 决定,而与 $t>t_0$ 以后的 $x(t)$ 无关。这是物理系统所普遍具有的性质,否则它将成为能够预知未来的非现实的系统;

②它是一非时变系统,也就是说如果它对于输入信号 $x(t)$ 的输出为 $y(t)$,则对输入信号 $x(t-t_0)$ 的输出将为 $y(t-t_0)$。

任何具有因果性的时不变非线性动态系统 N,对于输入 $x(t)$ 的作用可以表示为一个泛函 F(或称作为一个非线性算子):

$$y(0) = F\left[x(t)\,\Big|_{-\infty}^{0}\right] \tag{1.5}$$

简单地说,泛函是普通函数概念的推广。普通的函数是二个数值空间之间的映射,而泛函则是从函数空间(空间中每个点对应于一个不同的函数)到数值空间的映射,其定义域是函数空间,而值域是数值空间。如

$$y(0) = F\left[x(t)\,\Big|_{-\infty}^{0}\right] = \left[\int_{-\infty}^{0} e^t x^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

就是一个泛函。这里的数值 $y(0)$ 取决于函数 $x(t)$ 从 $t=-\infty$ 到 $t=0$ 的全部历史,而不仅是依赖于函数 $x(t)$ 在某一瞬时的值。

假设

①输入 $x(t)$ 满足

$$\| x(t) \| = \left[\int_{-\infty}^{0} x^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.6}$$

式中 $\| x(t) \|$ 称为 $x(t)$ 的 L_2 范数。所有定义于 R 且具有 L_2 范数的函数集合称为 L_2 函数空间，记为 $L_2(R^-)$ 。(1.6)式的物理意义即信号 $x(t)$ 具有有限的能量；

②非线性动态系统 N 所对应的泛函 F 是连续的。函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的连续性意即当 $|x - x_0| \to 0$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| \to 0$ 。对于泛函 F，若对任意二个具有 L_2 范数的函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，当

$$\| x_2(t) - x_1(t) \| \to 0$$

时恒有

$$|F[x_2(t)|_{-\infty}^{0}] - F[x_1(t)|_{-\infty}^{0}]| \to 0$$

则称泛函 F 是连续的。

定理 1.1 非线性动态系统分解定理

由连续泛函 F 所表征的非线性动态系统 N，当其输入信号具有有限能量时，总可以任意准确地分解为一组线性动态系统和一个非线性即时系统，如图 1.1 所示。

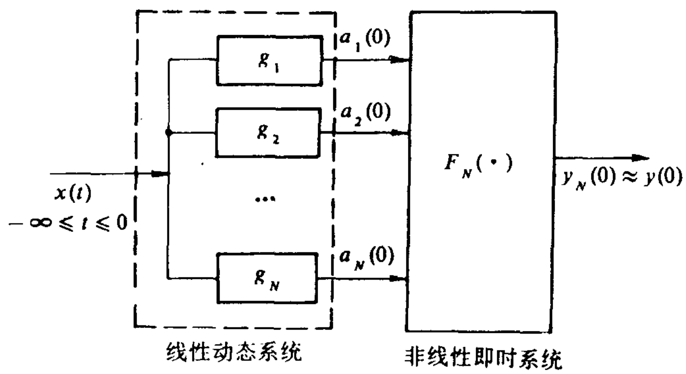

图 1.1 非线性动态系统的分解

在图 1.1 中，$g_1,g_2,\cdots,g_N$ 组成一个线性动态系统，而 $F_N(a_1,a_2,\cdots,a_N)$ 为一个非线性即时系统。定理 1.1 具有重要而深刻的含义。它告诉我们：非线性动态系统在一些很容易满足的假设条件下总可以进行分解，分解的结果将能够把所有的“动态”因素都归于线性系统，而把所有的“非线性”因素都归于即时系统。这样的分解也是很自然的，因为它把非线性动态系统这一复杂系统分解成了两类比它简单的系统。下面我们证明定理 1.1。

证明：当满足条件(1.6)式时，类似于函数的 Fourier 级数分解，可以把函数 $x(t)$ 对于 $L_2(R^-)$ 空间中的一组正交基底函数进行分解。一族函数 $P_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 称为 $L_2(R^-)$ 空间的一组归一化正交基底意味着它们满足下列条件：

$$P_n(t) = 0 \qquad \forall\, t > 0$$

$$\int_{-\infty}^{0} P_n(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

我们称

$$a_n \triangleq \int_{-\infty}^{0} x(t)P_n(t)dt$$

为函数 $x(t)$对于正交基底 $P_n(t)$的 Fourier 系数。函数 $x(t)$对于选定的一组正交基底的分解结果是唯一的，因此 Fourier 系数序列 $\{a_n\}$ 完全表征了函数 $x(t)$。在

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[x(t)-\sum_{n=1}^{N}a_nP_n(t)\right]^2 dt\right\}=0$$

的意义下有

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nP_n(t)$$

由泛函 F 的连续性假设，有

$$\begin{aligned} y(0) &= F[x(t)] \\ &= \lim_{N\to\infty}F\left[\sum_{n=1}^{N}a_nP_n(t)\right] \\ &\approx F\left[\sum_{n=1}^{N}a_nP_n(t)\right] \end{aligned}$$

这里

$$F\left[\sum_{n=1}^{N}a_nP_n(t)\right]$$

是用部分和

$$\sum_{n=1}^{N}a_nP_n(t)$$

代替 $x(t)$作为输入信号时所得到的响应。当 a_n 随 n 的增大而衰减时，可以截取有限的 N 项来逼近 $x(t)$。这样由原来的无限数列 $\{a_n\}$ 表征的函数 $x(t)$就可以近似地用 N 个数集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$来表示，而由函数 $x(t)\in R^-$ 到 $y(0)$的映射（即泛函 $y(0)=F[x(t)|_{-\infty}^{0}]$）就可以近似地用由 R^N 到 R 的函数 F_N 来代替，也即

$$\begin{aligned} y_N(0) &= F_N(a_1,a_2,\cdots,a_n) \\ &\triangleq F\left[\sum_{1}^{N}a_iP_i(t)\right] \\ &\approx F[x(t)]=y(0) \end{aligned}$$

且有

$$\lim_{N\to\infty} y_N(0)=y(0)$$

这里 F_N 是一个无记忆的非线性函数，它对数集$\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$进行代数运算，不包含求导、积分等“动态”运算。

因此，我们可以设计一组专用的线性时不变系统（也可以视为一种模拟计算机）来不断地分解出 $a_1,a_2,\cdots,a_N$，然后把它们输入到非线性即时系统 F_N，则所得的输出近似地为 $y(0)$。

如对每一 g_i（它表示一个线性时不变系统），选取其冲激响应为

$$g_i(t)=P_i(-t)$$

由 $P_i(t)$的性质可知

$$g_i(t)=0 \qquad \forall\, t<0$$