

674

517011  
Y31

高职高专推荐教材  
(财经类、管理类)

# 应用微积分

禹实 编著

中国财政经济出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

应用微积分/禹实编著. —北京: 中国财政经济出版社, 2002.8  
高职高专推荐教材. 财经类、管理类用  
ISBN 7-5005-5899-6

I. 应… II. 禹… III. 微积分—高等学校: 技术学校—教材  
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 047750 号

中国财政经济出版社 出版

URL: <http://www.cfeph.com>

E-mail: [cfeph@drc.gov.cn](mailto:cfeph@drc.gov.cn)

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100036

发行处电话: 88190406 财经书店电话: 64033436

清华大学印刷厂印刷 各地新华书店经销

850 × 1168 毫米 32 开 11.75 印张 276 000 字

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

印数: 1—5 000 定价: 28.00 元

ISBN 7-5005-5899-6/0·0023

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

---

## 前 言

微积分学产生于 17 世纪下半叶的西欧，至今已有 300 多年的历史了，多少年来，它被近代自然科学和工程技术广泛应用，促进了人类社会的文明进步，它的创立被恩格斯誉为“人类精神的最高胜利”。上个世纪下半叶，随着新经济时代的到来，人们在经济管理的定量分析中，广泛使用了数学方法，微积分亦在其中。经济的应用使得这门古老的学科又焕发了青春，带给人们不可估量的经济效益，又一次推动了人类社会的文明进步。

我们随便翻开一本微观经济学或管理经济学的书籍便可以看到，许多经济问题的论证用到微积分的理论，因此，学好微积分尤为重要。

本教材是根据国家教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》及北京市教委审定的“高等院校高职高专经济类、管理类专业《经济应用数学基础》教学大纲”的要求，并在编者 20 年教学研究和实践的基础上完成的。作为财经类高职高专教学用书，除了保证微积分理论的科学性，力求适合高职高专学生的自身特点，达到高职高专教育的学习目的，在编写上还具有五个特点：第一，为了便于学习上的衔接，首先在第一章介绍了学习微积分所需的初等数学相关知识；第二，全书以“学以致用”为主导思想，采取从实际问题引入概念，最后回到实际问题中去的方法编著，因此书中引入较多经济问题，并用微积分给予解决，使学生真正体会到微积分的实用性，不仅提高学习兴趣、掌

握微积分基本理论，而且提高学生解决实际问题的能力，为后续课打好基础；第三，全书力求内容深入浅出，文字通俗易懂，例题解法详细，习题列出参考答案，便于自学；第四，书中第七章介绍了用数学软件 Mathematica 计算微积分的主要方法；第五，本书涵盖了专升本入学高等数学（二）考试复习大纲要求的全部内容，学习之后，再经过综合练习，便于通过该项考试。

本书可作为普通高校、成人高校财经类、管理类高等职业技术教育、高等专科学校的教材和专升本考试补习教材，也可作为各大专院校文科专业以及高等教育自学考试的教学参考书，并可供广大经济工作者参考。书中如有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

**编 者**

2002 年 3 月

---

---

# 目 录

第一章 初等数学相关知识	( 1 )
§ 1.1 实数系	( 1 )
§ 1.2 解析式	( 2 )
一、一般概念	( 2 )
二、整式	( 3 )
三、分式	( 4 )
四、根式	( 6 )
五、指数式与对数式	( 7 )
§ 1.3 三角函数式的变换	( 10 )
一、同角三角函数的基本关系式	( 10 )
二、倍角公式	( 11 )
三、半角公式	( 11 )
四、三角函数的和差化积公式	( 12 )
§ 1.4 集合	( 12 )
一、集合的概念	( 12 )
二、集合的表示法	( 13 )
三、空集和全集	( 13 )
四、集合的关系和运算	( 14 )
五、集合的运算律	( 17 )
六、区间、邻域和区域	( 18 )
§ 1.5 不等式	( 21 )

---

一、不等式和不等式组的概念·····	( 21 )
二、一元一次不等式·····	( 22 )
三、一元一次不等式组·····	( 23 )
四、一元二次不等式·····	( 24 )
五、二元一次不等式·····	( 27 )
§ 1.6 数学命题·····	( 29 )
一、数学命题的意义和结构·····	( 29 )
二、命题的四种形式及关系·····	( 29 )
三、数学命题的条件·····	( 30 )
习题一·····	( 31 )
<b>第二章 函数</b> ·····	( 35 )
§ 2.1 函数的概念·····	( 35 )
一、函数的定义·····	( 35 )
二、函数的表示法·····	( 38 )
三、函数的性质·····	( 40 )
四、反函数的概念·····	( 43 )
§ 2.2 初等函数·····	( 45 )
一、基本初等函数·····	( 45 )
二、复合函数与简单函数·····	( 51 )
三、初等函数·····	( 53 )
§ 2.3 建立函数关系·····	( 56 )
§ 2.4 经济学中常见的函数·····	( 59 )
一、需求函数·····	( 59 )
二、供给函数·····	( 61 )
三、收益函数·····	( 62 )
四、成本函数·····	( 63 )

五、利润函数·····	(65)
习题二·····	(65)
<b>第三章 极限与连续</b> ·····	(69)
§ 3.1 极限的概念·····	(69)
一、变量的极限·····	(69)
二、无穷小量与无穷大量·····	(71)
三、函数的极限·····	(75)
§ 3.2 极限的四则运算·····	(78)
§ 3.3 两个重要的极限·····	(83)
一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ·····	(83)
二、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ·····	(85)
§ 3.4 函数的连续性·····	(88)
一、函数的增量·····	(88)
二、函数连续的概念·····	(89)
三、函数的间断点·····	(93)
四、初等函数的连续性·····	(95)
五、闭区间上连续函数的性质·····	(98)
六、经济学中函数的连续性·····	(100)
习题三·····	(101)
<b>第四章 一元函数微分学及应用</b> ·····	(105)
§ 4.1 导数的概念·····	(105)
一、导数的定义·····	(105)
二、导数的几何意义·····	(109)
三、导函数·····	(111)

---

四、函数的连续与可导的关系·····	(115)
§ 4.2 导数的运算法则·····	(117)
一、导数的四则运算·····	(117)
二、反函数的导数·····	(119)
三、导数的基本公式·····	(121)
四、复合函数的导数·····	(121)
五、隐函数的导数·····	(125)
六、对数求导法·····	(127)
七、高阶导数·····	(128)
§ 4.3 导数的应用·····	(130)
一、中值定理·····	(130)
二、洛必达法则·····	(132)
三、函数的单调性与极值·····	(139)
四、函数的最大值与最小值·····	(149)
五、曲线的凹凸性与拐点·····	(152)
六、导数的经济应用·····	(156)
§ 4.4 微分·····	(166)
一、微分的概念·····	(166)
二、微分的几何意义·····	(169)
三、微分的基本公式和运算法则·····	(170)
四、微分在近似计算中的应用·····	(172)
习题四·····	(173)
第五章 一元函数积分学及应用·····	(183)
§ 5.1 不定积分·····	(183)
一、不定积分的概念·····	(183)
二、不定积分的计算·····	(189)



---

§ 5.2 定积分 .....	(203)
一、定积分的概念 .....	(203)
二、定积分的计算 .....	(213)
三、定积分的应用 .....	(224)
四、广义积分 .....	(232)
§ 5.3 积分学的经济应用 .....	(238)
一、由边际函数求总函数 .....	(238)
二、消费者剩余 .....	(240)
三、国民收入分配的不平均系数 .....	(241)
四、最佳停产时刻与最大利润 .....	(242)
习题五 .....	(244)
<b>第六章 多元函数微积分初步</b> .....	<b>(253)</b>
§ 6.1 空间解析几何简介 .....	(253)
一、空间直角坐标系 .....	(253)
二、曲面与方程 .....	(255)
§ 6.2 多元函数的概念 .....	(259)
一、二元函数的定义 .....	(259)
二、二元函数的极限与连续 .....	(263)
§ 6.3 偏导数与全微分及经济应用 .....	(265)
一、二元函数的偏导数 .....	(265)
二、二元函数的全微分 .....	(268)
三、偏导数与全微分的经济应用 .....	(271)
四、齐次函数与欧拉公式 .....	(279)
§ 6.4 复合函数与隐函数的导数 .....	(281)
一、复合函数的导数 .....	(281)
二、隐函数的导数 .....	(284)

§ 6.5 二元函数的极值及经济应用 .....	(286)
一、极值的概念与判定 .....	(286)
二、条件极值 拉格朗日乘数法 .....	(296)
§ 6.6 二重积分 .....	(302)
一、二重积分的基本概念 .....	(302)
二、二重积分的基本性质 .....	(305)
三、二重积分的计算 .....	(306)
习题六 .....	(312)

## 第七章 Mathematica 的微积分计算 .....

(318)

§ 7.1 Mathematica 简介 .....	(318)
一、进入 Mathematica .....	(318)
二、Mathematica 中常用的数学常数和算术运算符 .....	(319)
三、Mathematica 中常用的函数 .....	(319)
四、Mathematica 的算术运算 .....	(320)
五、用 Mathematica 解方程和方程组 .....	(322)
六、退出 Mathematica .....	(322)
§ 7.2 Mathematica 与函数 .....	(323)
一、变量 .....	(323)
二、自定义函数 .....	(325)
三、一元函数作图 .....	(327)
§ 7.3 Mathematica 与一元函数微积分 .....	(328)
一、求极限 .....	(328)
二、求导数 .....	(329)
三、求微分 .....	(330)
四、求不定积分 .....	(331)

---

五、求定积分·····	(331)
六、求广义积分·····	(331)
§ 7.4 Mathematica 与二元函数微积分·····	(332)
一、求偏导数·····	(332)
二、求全微分·····	(333)
三、求隐函数的偏导数·····	(334)
四、求二重积分·····	(335)
附表 希腊字母表·····	(336)
习题参考答案·····	(337)

---

---

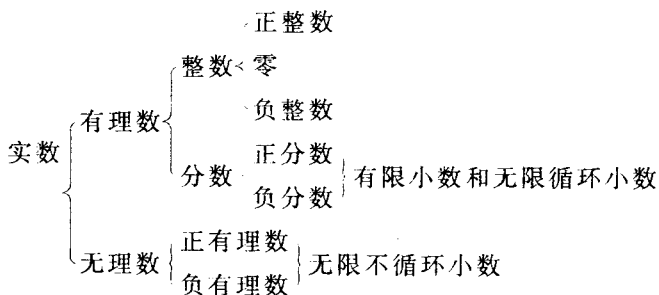
# 第一章 初等数学相关知识

在这一章里,我们简单地介绍初等数学的有关知识.

## § 1.1 实 数 系

数是数学的一个重要的研究对象.我们通常所用的十进制,使用了十个基本符号:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,这些符号叫数字.

实数可以归类如下:



实数轴是具有原点、正方向和长度单位的一条直线,简称数轴(图 1-1).任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示,反之,数轴上的任何一点都表示一个实数,即数轴上的点和实数之间可以建立一一对应的关系.为了简便起见,我们将实数与数轴上该实数的对应点不加区别,并用相同的字母表示.例如点  $a$  和实数  $a$  的意思相同.

从数轴上看,原点对应于零,用长度单位向原点两侧所截得的各分点,左侧的点对应于负整数,右侧的点对应于正整数,而每两个相邻的分点之间还有无穷多个点,它们不再是整数,而是分数或无理数,如图 1-1.

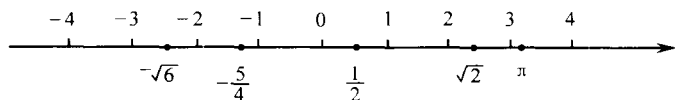


图 1-1

对于任意两个实数  $a$  与  $b$ , 则有  $a = b$ , 或者  $a > b$ , 或者  $a < b$ , 三者必有一个成立, 而且只有一个成立, 我们称它为实数的有序性.

在任意两个不相等的实数  $a$  与  $b$  之间, 存在无穷多个有理的与无理的实数, 我们称它为实数的稠密性. 此外, 实数还具有连续性.

## § 1.2 解 析 式

### 一、一般概念

用数学运算符号把数字和字母连成的式子叫做解析式. 例如,

$$2a + b, \frac{x^2 - 2x + 3}{4x + 1}, \sqrt{a^2 + b}, \log_2(x + y), \sin x + \tan x$$

等都是解析式. 单独一个数字或字母也叫解析式. 解析式包含代数式和超越式.

用运算符号加、减、乘(乘方)、除、开方把数字和字母连成的式

子叫做代数式.例如以上解析式中的

$$2a + b, \frac{x^2 - 2x + 3}{4x + 1}, \sqrt{a^2 + b}$$

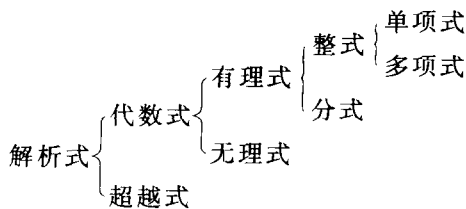
都是代数式,单独的一个数字或字母也叫代数式.

无理数次乘方、对数运算、三角运算和反三角运算叫做超越运算.如果在解析式中还含有超越运算,称该式为超越式,例如以上解析式中的

$$\log_2(x + y), \sin x + \tan x,$$

都是超越式.

解析式归类如下:



## 二、整 式

简单说,单项式是只含有乘法(包括乘方和数的除法)的式子.多项式是单项式的代数和.单项式与多项式合起来叫整式.

整式的加减法就是同类项的合并结果.

单项式的乘除法要用到以下运算法则:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m > n),$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

多项式的乘法要依据逐项相乘的法则:

$$(a + b + c)(m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn.$$

此外,以下乘法公式要牢记:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3,$$

**例 1**  $2a^2bx \cdot (-3ab^2x) = -6a^3b^3x^2.$

**例 2**  $(-6x^4y^2) \div (-2x^2y) = 3x^2y.$

**例 3**  $(2x+y)(4x-y) = 8x^2 - 2xy + 4xy - y^2$   
 $= 8x^2 + 2xy - y^2.$

与多项式的乘法相反的运算是所谓因式分解,即把一个多项式化为几个整式的乘积形式,叫做把这个多项式因式分解.

因式分解有四种基本方法,即提公因式法;运用乘法公式法;分组分解法和十字相乘法.

**例 4** 将下列各式分解因式:

(1)  $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3;$

(2)  $x^4 - 3x^3 - 28x^2.$

**解** (1)  $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = (x^3 + x^2y) - (xy^2 + y^3)$   
 $= x^2(x+y) - y^2(x+y) = (x+y)(x^2 - y^2)$   
 $= (x+y)(x+y)(x-y) = (x+y)^2(x-y).$

此题用的分组分解法,其中还用到了提取公因式和运用公式法.

(2)  $x^4 - 3x^3 - 28x^2 = x^2(x^2 - 3x - 28)$   
 $= x^2(x+4)(x-7).$

此题用的提取公因式法和十字相乘法.

### 三、分 式

简单说,除式中含有字母的有理式叫做分式.一个分式可以看

或是分子除以分母所得的商. 在分式中, 分母的值不能为零.

分式的基本性质是, 分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式, 分式的值不变, 用式子表示是:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times M}{b \times M}, \frac{a}{b} = \frac{a \div M}{b \div M} (M \neq 0).$$

分式的符号法则是, 分式的分子、分母和分式本身的三个符号中, 任意改变其中两个, 分式的值不变, 即

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{-a}{-b}; \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}; \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}; \\ \frac{a}{-b} &= \frac{-a}{b}; \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

分式的加减法法则是, 同分母的分式相加减, 分母不变, 把分子相加减, 即

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}.$$

异分母的分式相加减, 先通分, 变为同分母的分式, 然后再加减, 即

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

分式的乘除法法则是, 分式乘以分式, 用分子的积做积的分子, 分母的积做积的分母; 分式除以分式, 把除式的分子、分母颠倒位置后, 与被除式相乘. 用式子表示是:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}; \\ \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

分式的乘方法则是:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

例 5 计算  $\left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4}\right) \div \frac{x-4}{x}$ .

解  $\left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4}\right) \div \frac{x-4}{x}$



$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)^2} \right] \cdot \frac{x}{x-4} \\
 &= \frac{(x+2)(x-2) - x(x-1)}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x-4} \\
 &= \frac{x^2 - 4 - x^2 + x}{x(x-2)^2} \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{1}{(x-2)^2}.
 \end{aligned}$$

例 6 计算  $\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x}\right)^3 \div \left(-\frac{y}{x}\right)^4$ .

解  $\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x}\right)^3 \div \left(-\frac{y}{x}\right)^4$

$$= \frac{x^4}{y^2} \cdot \left(-\frac{y^6}{x^3}\right) \cdot \frac{x^4}{y^4} = -x^5.$$

#### 四、根 式

如果  $x^n = a$  ( $n$  是大于 1 的正整数), 那么  $x$  叫做数  $a$  的  $n$  次方根, 记作  $\sqrt[n]{a}$ . 作为代数式,  $\sqrt[n]{a}$  叫做根式,  $n$  叫做根指数,  $a$  叫做被开方数 (或根底数). 在实数范围内, 负数不能开偶次方, 一个正数开偶次方有两个方根, 其绝对值相同, 符号相反.

由根式的定义有以下根式的基本性质:

(1)  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ;

(2) 当  $n$  为奇数时,  $\sqrt[n]{a^n} = a$ ;

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } \sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

在根式的运算中, 我们有以下法则:

(1)  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$ ;

(2)  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$ ;

(3)  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0)$ ;

(4)  $\sqrt[n^p]{a^{m^p}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0)$ .