高职高专推荐教材

(财经类、管理类)

应用微积分

禹实　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用微积分/禹实编著．—北京：中国财政经济出版社，2002.8
高职高专推荐教材．财经类、管理类用
ISBN 7-5005-5899-6

Ⅰ．应…　Ⅱ．禹…　Ⅲ．微积分－高等学校：技术学校－教材
Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 047750 号

中国财政经济出版社 出版
URL：http://www.cfeph.com
E-mail：cfeph@drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
清华大学印刷厂印刷　各地新华书店经销
850×1168 毫米　32 开　11.75 印张　276 000 字
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月北京第 1 次印刷
印数：1—5 000　定价：28.00 元
ISBN 7-5005-5899-6/O·0023
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

微积分学产生于17世纪下半叶的西欧，至今已有300多年的历史了，多少年来，它被近代自然科学和工程技术广泛应用，促进了人类社会的文明进步，它的创立被恩格斯誉为“人类精神的最高胜利”。上个世纪下半叶，随着新经济时代的到来，人们在经济管理的定量分析中，广泛使用了数学方法，微积分亦在其中。经济的应用使得这门古老的学科又焕发了青春，带给人们不可估量的经济效益，又一次推动了人类社会的文明进步。

我们随便翻开一本微观经济学或管理经济学的书籍便可以看到，许多经济问题的论证用到微积分的理论，因此，学好微积分尤为重要。

本教材是根据国家教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》及北京市教委审定的“高等院校高职高专经济类、管理类专业《经济应用数学基础》教学大纲”的要求，并在编者20年教学研究和实践的基础上完成的。作为财经类高职高专教学用书，除了保证微积分理论的科学性，力求适合高职高专学生的自身特点，达到高职高专教育的学习目的，在编写上还具有五个特点：第一，为了便于学习上的衔接，首先在第一章介绍了学习微积分所需的初等数学相关知识；第二，全书以“学以致用”为主导思想，采取从实际问题引入概念，最后回到实际问题中去的方法编著，因此书中引入较多经济问题，并用微积分给予解决，使学生真正体会到微积分的实用性，不仅提高学习兴趣、掌

握微积分基本理论，而且提高学生解决实际问题的能力，为后续课打好基础；第三，全书力求内容深入浅出，文字通俗易懂，例题解法详细，习题列出参考答案，便于自学；第四，书中第七章介绍了用数学软件 Mathematica 计算微积分的主要方法；第五，本书涵盖了专升本入学高等数学（二）考试复习大纲要求的全部内容，学习之后，再经过综合练习，便于通过该项考试。

本书可作为普通高校、成人高校财经类、管理类高等职业技术教育、高等专科教育的教材和专升本考试补习教材，也可作为各大专院校文科专业以及高等教育自学考试的教学参考书，并可供广大经济工作者参考。书中如有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

编　者

2002 年 3 月

目　　录

第一章 初等数学相关知识

在这一章里，我们简单地介绍初等数学的有关知识.

§1.1 实 数 系

数是数学的一个重要的研究对象.我们通常所用的十进制，使用了十个基本符号:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,这些符号叫数字.

实数可以归类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left.\begin{matrix}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数和无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正有理数}\\ \text{负有理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

实数轴是具有原点、正方向和长度单位的一条直线，简称数轴(图 1－1).任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，反之，数轴上的任何一点都表示一个实数，即数轴上的点和实数之间可以建立一一对应的关系.为了简便起见，我们将实数与数轴上该实数的对应点不加区别，并用相同的字母表示.例如点 a 和实数 a 的意思相同.

从数轴上看，原点对应于零，用长度单位向原点两侧所截得的各分点，左侧的点对应于负整数，右侧的点对应于正整数，而每两个相邻的分点之间还有无穷多个点，它们不再是整数，而是分数或无理数，如图 1－1.

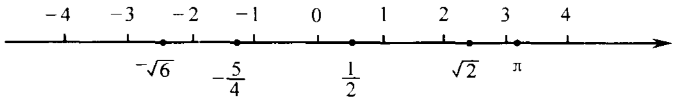

图 1－1

对于任意两个实数 a 与 b，则有 $a=b$，或者 $a>b$，或者 $a<b$，三者必有一个成立，而且只有一个成立，我们称它为实数的有序性.

在任意两个不相等的实数 a 与 b 之间，存在无穷多个有理的与无理的实数，我们称它为实数的稠密性. 此外，实数还具有连续性.

§1.2　解　析　式

一、一般概念

用数学运算符号把数字和字母连成的式子叫做解析式. 例如，

$$2a+b, \frac{x^2-2x+3}{4x+1}, \sqrt{a^2+b}, \log_2(x+y), \sin x+\tan x$$

等都是解析式. 单独一个数字或字母也叫解析式. 解析式包含代数式和超越式.

用运算符号加、减、乘（乘方）、除、开方把数字和字母连成的式

子叫做代数式.例如以上解析式中的

$$2a+b,\frac{x^2-2x+3}{4x+1},\sqrt{a^2+b}$$

都是代数式,单独的一个数字或字母也叫代数式.

无理数次乘方、对数运算、三角运算和反三角运算叫做超越运算.如果在解析式中还含有超越运算,称该式为超越式,例如以上解析式中的

$$\log_2(x+y),\sin x+\tan x,$$

都是超越式.

解析式归类如下:

$$\text{解析式}\begin{cases}\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}\\\text{超越式}\end{cases}$$

二、整　式

简单说,单项式是只含有乘法(包括乘方和数的除法)的式子.多项式是单项式的代数和.单项式与多项式合起来叫整式.

整式的加减法就是同类项的合并结果.

单项式的乘除法要用到以下运算法则:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$

$$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0,m>n),$$

$$(a^m)^n=a^{mn},$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

多项式的乘法要依据逐项相乘的法则:

$$(a+b+c)(m+n)=am+bm+cm+an+bn+cn.$$

此外,以下乘法公式要牢记:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3,$$

例 1　$2a^2bx\cdot(-3ab^2x)=-6a^3b^3x^2.$

例 2　$(-6x^4y^2)\div(-2x^2y)=3x^2y.$

例 3　$$\begin{aligned}(2x+y)(4x-y)&=8x^2-2xy+4xy-y^2\\&=8x^2+2xy-y^2.\end{aligned}$$

与多项式的乘法相反的运算是所谓因式分解,即把一个多项式化为几个整式的乘积形式,叫做把这个多项式因式分解.

因式分解有四种基本方法,即提公因式法;运用乘法公式法;分组分解法和十字相乘法.

例 4　将下列各式分解因式:

(1) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$;

(2) $x^4-3x^3-28x^2$.

解　(1) $$\begin{aligned}x^3+x^2y-xy^2-y^3&=(x^3+x^2y)-(xy^2+y^3)\\&=x^2(x+y)-y^2(x+y)=(x+y)(x^2-y^2)\\&=(x+y)(x+y)(x-y)=(x+y)^2(x-y).\end{aligned}$$

此题用的分组分解法,其中还用到了提取公因式和运用公式法.

(2) $$\begin{aligned}x^4-3x^3-28x^2&=x^2(x^2-3x-28)\\&=x^2(x+4)(x-7).\end{aligned}$$

此题用的提取公因式法和十字相乘法.

三、分　式

简单说,除式中含有字母的有理式叫做分式.一个分式可以看

成是分子除以分母所得的商.在分式中,分母的值不能为零.

分式的基本性质是,分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变,用式子表示是:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times M}{b\times M},\frac{a}{b}=\frac{a\div M}{b\div M}(M\neq 0).$$

分式的符号法则是,分式的分子、分母和分式本身的三个符号中,任意改变其中两个,分式的值不变,即

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b};\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b};\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b};$$

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b};\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

分式的加减法法则是,同分母的分式相加减,分母不变,把分子相加减,即

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

异分母的分式相加减,先通分,变为同分母的分式,然后再加减,即

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

分式的乘除法法则是,分式乘以分式,用分子的积做积的分子,分母的积做积的分母;分式除以分式,把除式的分子、分母颠倒位置后,与被除式相乘.用式子表示是:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

分式的乘方法则是:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

例 5　计算 $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$.

解　$\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$

$$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\cdot\frac{x}{x-4}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$$
$$=\frac{x^2-4-x^2+x}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}=\frac{1}{(x-2)^2}.$$

例 6　计算$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\left(-\frac{y^2}{x}\right)^3\div\left(-\frac{y}{x}\right)^4$.

解　$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\left(-\frac{y^2}{x}\right)^3\div\left(-\frac{y}{x}\right)^4$

$$=\frac{x^4}{y^2}\cdot\left(-\frac{y^6}{x^3}\right)\cdot\frac{x^4}{y^4}=-x^5.$$

四、根　式

如果 $x^n=a$(n 是大于 1 的正整数),那么 x 叫做数 a 的 n 次方根,记作$\sqrt[n]{a}$.作为代数式,$\sqrt[n]{a}$叫做根式,n 叫做根指数,a 叫做被开方数(或根底数).在实数范围内,负数不能开偶次方,一个正数开偶次方有两个方根,其绝对值相同,符号相反.

由根式的定义有以下根式的基本性质:

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$;

(2) 当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0;\\ -a, & a<0.\end{cases}$

在根式的运算中,我们有以下法则:

(1) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$　($a\geqslant 0,b\geqslant 0$);

(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$　($a\geqslant 0,b>0$);

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　($a\geqslant 0$);

(4) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$　($a\geqslant 0$).